Jaroslav Friedrich

Původ jednotnosti v pravidle Neperově

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 8, D151--D157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121211

A tak také filosofickým stránkám matematiky porozumí ten žák, který mnoho počítal a ne jen slyšel o matematických problémech takového rázu přednášet. Jestliže se však má žák matematice naučit, třeba ho stále kontrolovat; ne jen nahodile, nýbrž soustavně. A proto vybízím — v případě numerického počítání, ale platí to všude — aby učitel žáka při jeho práci stále pozoroval; pravím výslovně a na to kladu důraz: při práci, nikoli jen při zkoušení. I to je z mého článku zřejmo. Je to zas jeden z požadavků Binetových: Učitel má býti pozorovatelem. Upozorňuji výslovně na Bineta; ten ještě dlouho nezastará!

Článek kolegův je, jak říkají Němci, pravá „Fundgrube" všelikých podnětů; snad se k některým časem ještě vrátím.

Původ jednotnosti v pravidle Neperově.

Jaroslav Friedrich, Praha.

V nedávné své poznámce k témuž thematu[1]) dotkl jsem se otázky po útvaru, jenž by — pro školu vhodně — poskytoval jednotnou zásadu Neperovým pravidlem vyslovenou jako výsledek vnitřního vztahu prvků v pravoúhlém trojhranu. Podmínku vhodnosti pro školu jsem dodával, maje na mysli odvození Neper-Lambertovo[2]) z útvaru pojmenovaného Gaussem „pentagramma mirificum"; způsobu tohoto by totiž ve škole sotva kdo asi upotřebil, neboť prospěch z něho byl by neúměrný vynaloženému času a námaze, když vlastní jádro věci přece jen zůstává neodkryto. Učebnice se obvykle otázky původu řečené pravidelnosti nedotýkají, a pokud jsem se kde v literatuře se zmínkou o tomto problému setkal, opírá se vysvětlení všude jen o fakt cyklických permutací v oné grupě 5 sférických trojúhelníků pravoúhlých.[3]) A přece je pravděpodobné, že musí existovati řešení průhlednější a názornější, i pokusil jsem se proto vyšetřiti na pravoúhlém trojhranu samotném, která to jest jeho vlastnost, která onu jednotnost zakládá. Sleduje v dalším především jen tento věcný účel, ponechávám otázku didaktického upotřebení prozatím stranou.

---

[1]) Na str. D 124 tohoto ročníku Časopisu.

[2]) Je založeno na této vlastnosti pravoúhlého trojúhelníka sférického: Prodloužíme-li přeponu a odvěsnu za společný vrchol o jejich doplňky, vznikne nový pravoúhlý trojúhelník, jehož prvky — až na jeden úhel — jsou doplňky prvků trojúhelníka původního. Pokračujeme-li týmž způsobem dále, řada trojúhelníků se po pátém uzavře, a jejich přepony tvoří sférický pětiúhelník zvláštních vlastností.

[3]) Viz Enzyklopädie der math. Wiss. III AB 9, str. 1044; Weber-Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik, II 407; Lietzmann, Methodik des math. Unterrichts, II, 179; Fladt, Elementargeometrie, 3, 109; Tropfke, Geschichte der Elementar-Mathematik, V, 133.

Stanovení vztahů na pravoúhlém trojhranu, daném rovinami σ a $\varphi \perp \psi$, vyžaduje ještě čtvrté roviny $\tau \perp (\sigma\varphi)$. Vznikající tím útvar $\sigma \perp \tau \perp \varphi \perp \psi$ má význačnou vlastnost jisté souměrnosti, neboť si roviny i útvary s obou stran uvedeného pořadí odpovídají. Jedna i druhá krajní rovina tvoří totiž přeponu nad krajním párem odlehlým (σ nad $\varphi \perp \psi$, ψ zase nad $\sigma \perp \tau$), a jedna i druhá rovina vnitřní, jsouc kolmá k oběma sousedním, měří jejich úhel. Lze tudíž rozvrhnouti čtyři trojiny rovin v našem útvaru možné ve dvě kategorie: V jedné je příslušný trojhran typu pravoúhlého, ve druhé pravoramenného. Již tato korespondence napovídá, že se každý vztah veličin vyskytne dvojmo.

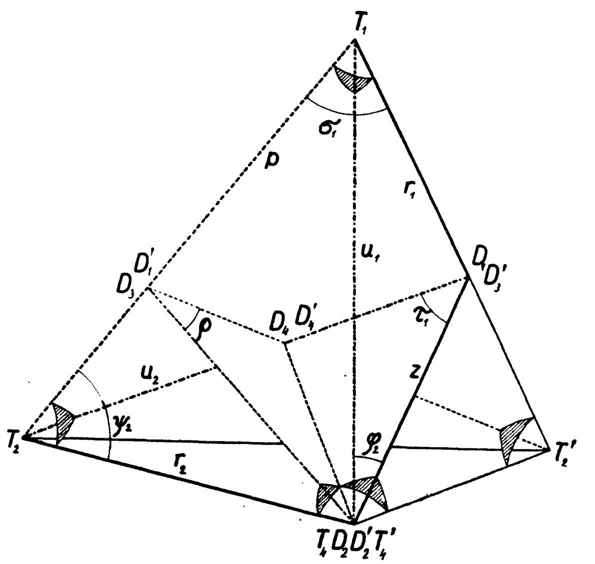
Všimněme si nyní blíže, jak se ona korespondence jeví na čtyrstěnu, jenž jest takovými rovinami, postupně k sobě kolmými, vymezen. Stěny jeho jsou vesměs pravoúhlé trojúhelníky, a tato vlastnost sama o sobě poskytuje především možnost, vyjádřiti goniometricky, ať zavedeme do počtu kterékoli úhly na jeho povrchu, vztah libovolných tří z nich. Stačí k tomu zjistiti délku — na př. d, g, m — všech tří hran, jež se sbíhají v průsečíku jejich rovin, a užíti identity

$$\frac{d}{m} = \frac{d}{g} \cdot \frac{g}{m}. \tag{1}$$

Chceme-li však docíliti při tom výsledků urovnaných, je ovšem nutné provésti volbu úhlů do počtu zavedených důsledně podle nějaké zásady, a při tom může nám býti vodítkem právě ona korespondence.

Dobrou orientaci k tomu poskytují vrcholy a hrany čtyrstěnu. Ony lze lišiti podle typu jejich trojhranů na dva pravoúhlé T_1, T_2 (viz obrazec) a dva pravoramenné D_1, D_2, tyto pak podle jejich významu pro přilehlé trojúhelníky. Jedny totiž — počtem tři — jsou na obě strany odvěsnami; jsou k sobě vzájemně kolmé a tvoří spojitou lomenou linii od jednoho vrcholu pravoúhlého ke druhému přes oba vrcholy pravoramenné. Přeponou na obě strany je pouze jedna hrana a to spojnice obou vrcholů pravoúhlých. Tyto uvedené čtyři hrany tvoří tudíž charakteristický prostorový čtyrúhelník: Z koncových bodů jeho „základny“ D_1D_2 vybíhají kolmo a také vzájemně kolmo „ramena“ D_1T_1 a D_2T_2, útvar pak uzavírá „přepona“ T_1T_2. Úhlopříčkami jsou mu zbývající dvě hrany čtyrstěnu D_2T_1, D_1T_2, ony významu oboustranně různého. — Takto se dostává každé z hran uvažovaného čtyrstěnu z, r_1, r_2, p, u_1, u_2 zvláštního významu, a umožňuje se sledovati pohodlně korespondenci úhlů. Tak na př. úhlu $\widehat{pr_1}$ roviny σ, jenž jest pro trojhran T_1 přeponou, odpovídá v rovině ψ úhel $\widehat{pr_2}$ jako přepona trojhranu T_2 (současně doplněk odvěsny $\widehat{pu_1}$ trojhranu T_1); k úhlu $\widehat{u_1r_1}$ roviny φ, odvěsně trojhranu T_1, stejnolehlým je v rovině τ úhel $\widehat{u_2r_2}$, odvěsna trojhranu T_2 a zároveň doplněk úhlu $\widehat{u_2z}$ trojhranu T_1; atd.

Po této orientaci není nesnadno vyšetřiti všechny možné případy účelné dislokace úhlů. V každém páru rovin si odpovídajících, t. j. σ, ψ, resp. τ, φ jsou možny pouze dvě dvojice úhlů stejnolehlých, a vzájemným spojováním těchto dvojic dají se tudíž vytvořiti čtyři varianty pro účel jednotné formulace vztahů. Detailně a v přehledu jeví se toto seskupení úhlů ve čtveřiny takto: Z dvojic stejnolehlých úhlů



$$
\begin{array}{llllll}
\text{v rovině} & \sigma & \psi & \tau & \varphi & \\
(2^a) & \widehat{pr_1}, & \widehat{pr_2}; & \widehat{u_2z}, & \widehat{u_1z} & (3^a) \\
(2^b) & \widehat{pu_2}, & \widehat{pu_1}; & \widehat{u_2r_2}, & \widehat{u_1r_1} & (3^b)
\end{array}
$$

vznikne spojením dvojic

(2^a), (3^a) čtveřina I, (2^a), (3^b) čtveřina III,
(2^b), (3^b) čtveřina II, (2^b), (3^a) čtveřina IV,

výsledek pak — po označení úhlů jménem jejich roviny a indexem podle příslušnosti k trojhranu T_1, resp. T_2 — jeví se v tabulce

	σ	τ	φ	ψ
I:	σ_1	τ_1	φ_2	ψ_2
II:	σ_2	τ_2	φ_1	ψ_1
III:	σ_1	τ_2	φ_1	ψ_2
IV:	σ_2	τ_1	φ_2	ψ_1

(4)

Podle toho dalo by se tudíž v souboru rovnic pro pravoúhlý trojhran dosáhnouti souhlasnosti při čtveré jejich formě.

Dvě z uvedených možností nevyhovují však praktické potřebě. Dosud jsme zde totiž na cestě za jednotností měli zřetel pouze k tomu, aby se výhoda dvojstrannosti útvaru mohla uplatniti souhlasností struktury ve vzorcích pro veličiny různé, a nepřihlíželo se vůbec k otázce jednotnosti ve vzorci jednotlivém. Splnění i tohoto druhého požadavku by výhodu dosavadní podstatně stupňovalo, ježto by odpadla potřeba úhly v upotřebené dvojici podle polohy rozeznávati. Konkretněji vyjádřeno — jde nyní ještě o to, zda při některé z uvedených čtyř variant pro dislokaci úhlů je možné, aby oba poměry, jichž součin tvoří pravou stranu identity (1), představovaly touž goniometrickou funkci zavedených úhlů, a zda se může tato vlastnost vyskytnouti dokonce pro obojí kategorii vzorců současně.

Prvním k tomu doporučitelným krokem jest voliti vhodně prvek, jenž druhými dvěma má býti vyjádřen. Bude totiž věci pravděpodobně na prospěch, bude-li jím prvek k oběma ostatním stejně položený, totiž v trojině souvislé (na př. σ, τ, φ) prvek prostřední (úhel roviny τ), v nesouvislé (na př. σ, φ, ψ) prvek isolovaný (úhel roviny σ). Za takové volby přichází v úvahu poloha úhlů v páru rovin jednak σ a φ, jednak φ a ψ, i rozhoduje tu, jak vidno, jiné rozeskupení úhlů čtveřiny, než z jakého korespondencí v útvaru vznikla. Řešení předložené otázky bylo by sice možno provésti krátce mechanicky pouhou superposicí obojí dislokace úhlů, ale do nepřehledné situace více světla vnese následující úvaha.

Přihlédněme především k okolnosti, že v pravoúhlém páru φ, ψ této nové vazby jde vzhledem k „smíšené“ povaze společné jejich hrany o kroky současně buď sinové, buď kosinové, a že proto zde stejnolehlost goniometrická znamená příslušnost k témuž pravoúhlému trojhranu. Požadavku souhlasnosti ve funkci hoví tudíž pouze páry φ_1, ψ_1 a φ_2, ψ_2, a tím je již rozhodnuto — viz tabulku (4) — o vyloučení čtveřin III a IV. V páru σ, φ typu rovnoramenného, kde vstupují v poměr výhradně odvěsny, a oba kroky mají tudíž býti buď kotangentové neb tangentové, vyžaduje si tato souhlasnost příslušnosti k pravoúhlým trojhranům různým. I tento požadavek je čtveřinami I, II splněn, neboť obsahují páry σ_1, φ_2, resp. σ_2, φ_1. Další pak nějaké kombinační možnosti mezi páry σ, φ a φ, ψ není, ježto každým z úhlů φ_1, φ_2 jejich společné roviny φ je situace úhlů v rovinách ostatních jednoznačně určena. Konečně, co se týče třetího úhlu v každé trojině, povšimněme si, že obojí pár druhých rovin tvoří v trojúhelníku roviny třetí přeponu a odvěsnu. V této vlastnosti se tedy oba typy — pravoúhlý i pravoramenný — shodují, a vchází proto do levé strany vzorců, plynoucích z identity

(1) pro obojí pár, shodně buď kosinus — při dislokaci I — neb sinus při dislokaci II.

Souborné schema, zahrnující všechny vztahy mezi prvky pravoúhlého trojhranu, může míti tudíž tento dvojí tvar

$$(5^{\mathrm{I}})\quad \begin{array}{l} \cos\sigma_1 = \sin\varphi_2 \sin\psi_2; \\ \cos\tau_1 = \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\sigma_1; \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sin\sigma_2 = \cos\varphi_1 \cos\psi_1; \\ \sin\tau_2 = \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\sigma_2. \end{array} \quad (5^{\mathrm{II}})$$

Druhý z nich je v podstatě původní Neperův z r. 1614, byť v jiné, vhodnější a dnešní formulaci přizpůsobené úpravě; první pochází teprve od Chr. v. Wolffa z r. 1717.[4]) Při srovnání obou způsobů je hned na první pohled z důsledné záměny funkcí patrna vzájemná doplňkovost všech použitých úhlů; původ toho je ovšem prostě v sestavení korespondence (2^b, 3^b) z doplňků úhlů v korespondenci (2^a, 3^a). Kdežto se ve formulaci (5^{I}) zachází — vzhledem k trojhranu T_1 — pouze s doplňky jeho odvěsen, užívá se v (5^{II}) zase naopak odvěsen samotných, avšak doplňků obou úhlů i přepony. Ježto tento méně vhodný způsob není dnes v užívání,[5]) nebudu se jím dále zabývati.

Vazba trojhranů po dvou na našem čtyrstěnu poskytuje podle (5^{I}) celkem tyto 4 vztahy

$$\begin{array}{ll} \cos\sigma_1 = \sin\varphi_2 \sin\psi_2, & \cos\tau_1 = \operatorname{cotg}\varphi_2 \operatorname{cotg}\sigma_1, \\ \cos\psi_2 = \sin\tau_1 \sin\sigma_1, & \cos\varphi_2 = \operatorname{cotg}\tau_1 \operatorname{cotg}\psi_2. \end{array} \qquad (6)$$

Jsou to, zůstaneme-li v dalším, aby se zjednal přehled po souboru všech 10 vzorců pravoúhlého trojúhelníka sférického, pouze u veličin trojhranu T_1 a užijeme nadále obvyklého označení a, b, c, α, β, takže jde o případ $c \perp \alpha \perp b \perp a$ s úhly $a \equiv \psi_1$, $b \equiv \varphi_1$, $c \equiv \sigma_1$, $\alpha \equiv \tau_1$, $\beta \equiv \varrho$, prozatím jen tyto vzorce

$$\begin{aligned} \cos c &= \sin(90^0 - a) \sin(90^0 - b), \\ \cos(90^0 - a) &= \sin\alpha \,.\, \sin c, \\ \cos\alpha &= \operatorname{cotg}(90^0 - b) \operatorname{cotg} c, \\ \cos(90^0 - b) &= \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}(90^0 - a). \end{aligned} \qquad (7)$$

Ke třem z nich můžeme vytvořiti další

$$\begin{array}{l} \cos(90^0 - b) = \sin\beta \sin c, \quad \cos\beta = \operatorname{cotg}(90^0 - a) \,.\, \operatorname{cotg} c, \\ \qquad\qquad \cos(90^0 - a) = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}(90^0 - b) \end{array} \qquad (8)$$

prostě obdobou; vznikají však také přímo z útvaru, vedeme-li, aby se zavedl do úvahy úhel β, nový řez $\varrho \perp (\sigma\psi)$ a použijeme pak

[4]) J. Tropfke: Geschichte der Elementar-Mathematik, díl V, 2. vyd., str. 133 a 134.

[5]) Lietzmann se s ním setkává — viz citované místo! — v holandské učebnici Versluysově z r. 1909.

zásad (6) na čtyrstěn $T_1D'_1D'_2T'_2$.[6]) Je však možno po zavedení roviny ϱ (β) pokračovati také v prvotním směru na čtyrstěnu $T_2D_3D_4T_4$ podle týchž zásad a zjednati si odtud dva nové vzorce

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - a)\sin\beta, \quad \cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta. \tag{9}$$

Stejně s druhé strany poskytne konečně čtyrstěn $T'_2D'_3D'_4T'_4$ zbývající desátou rovnici

$$\cos\beta = \sin(90^0 - b)\sin\alpha. \tag{10}$$

Do podstaty jednotnosti lze však nahlédnouti ještě hlouběji. Povšimněme si blíže přechodu od trojhranu T_1 k trojhranu T_2! Nezmění se ani vzájemná poloha rovin, ani hodnoty prvků přicházejících do počtu, ale změní se jejich význam — vyjímaje prvek β, jenž zůstává společným oběma trojhranům i co do významu a tvoří tím jejich vazbu. K změně významu dochází tím, že změnou vrcholu odpadají hrany (ab), (cb) a zavádějí se nově $(a\alpha)$, $(c\alpha)$, t. j. místo stěny b nastupuje stěna α a trojina c, $a \perp b$ je nahrazena trojinou a, $\alpha \perp c$. Stává se proto $90^0 - a$ přeponou, $90^0 - b$ úhlem; přistupují do nového trojhranu sice také doplňky $90^0 - c$, $90^0 - \alpha$, ale ježto jsou odvěsnami, vcházejí do vzorců přece jen hodnoty c, α. Zkrátka — v známém kruhovém schematu . . . c, β, $90^0 - a$, $90^0 - b$, α, c, . . . pootočil se ukazovatel významu ob jeden prvek.

Zřejmě bude tomu stejně také při dalším přechodu od T_2 k T_4, kde zase společným prvkem je úhel $90^0 - b$, atd. I dospíváme takto k poznatku, že na uvažovaném prostorovém útvaru je cyklus 5 pravoúhlých trojhranů T_1, T_2, T_4, T'_4, T'_2, v němž určitého významu (na př. přepony neb úhlu) nabývá postupně každý z prvků c, β, $90^0 - a$, $90^0 - b$, α a to v pořadí c, $90^0 - a$, α, β, $90^0 - b$.

Zde stýká se tato úvaha s řešením Lambertovým. Metodicky liší se od něho tím, že přímo na samotném útvaru, tak jak jest pravoúhlým trojhranem dán, existenci dalších čtyř trojhranů oné cyklické vlastnosti odkrývá, místo aby byly k danému pravoúhlému trojúhelníku sférickému další takové až do plného cyklu uměle konstruovány. Dá se ovšem mezi oběma způsoby tušiti souvislost.[7]) Zde budiž jen stručně poznamenáno, že poloměry vedené ze středu libovolné koule rovnoběžně a v souhlasném smyslu k hranám všech 5 trojhranů cyklu vymezí na jejím povrchu sférické pravoúhlé trojúhelníky v takových polohách, že lze z nich, zamění-li se ony dva s přeponami $90^0 - a$, $90^0 - b$ za protilehlé, sestaviti ,,pentagramma mirificum".

[6]) Jako body se D_2, D'_2 ztotožňují, nikoli však jako trojhrany. Podobně dále D_3 s D'_1, D'_3 s D_1, D'_4 s D_4 a T'_4 s T_4 i s D_2 a D'_2.

[7]) Stručně se jí dotýká G. Hessenberg, Ebene und sphärische Trigonometrie, 1920, str. 126 (3. vyd.)

Uzavírám poznámkami didaktickými. Úvaha na tomto právě poli vznikla a to ze snahy, aby nemusilo býti žákům pravidlo Neperovo podáváno jen dogmaticky resp. mechanicky, jako by šlo o pouhou pomůcku mnemotechnickou, nýbrž, pokud možno, s vnitřním důvodem. Oba způsoby, uveřejněné zde na str. D 123 a 124, jak totiž dojíti k znění pravidla aspoň induktivně ze souboru základních vzorců, jsou přece jen nouzovými a nemohou proto uspokojiti učitele ani žáka. Pokusil jsem se proto vyšetřiti podstatu věci vazbou útvarů, jež vznikají v pravoúhlém trojhranu pěti postupně v cyklu k sobě kolmými rovinami, a soudím z povahy nalezeného výsledku, že se výkladu na této myšlence založeného na střední škole upotřebiti dá. Tím nechce však býti řečeno, aby se snad základní vzorce hned od počátku tímto způsobem projednávaly. Tomuto vyššímu, jednotícímu hledisku náleží místo až po uvedení do základní myšlenky, jak si vztahy zjednávati, po poznání jejich rázu a, až se takto pocit potřeby nějakého soustředění dostaví.

Představuji si proto postup počáteční k prvním vzorcům jako obvykle, ale již v tomto stadiu doporučovalo by se pamatovati na některé kroky a okolnosti, jež jednotnost připravují. Tak zvláště na jednotnou zásadu pro odvozování vzorců — na př. podle identity (1) —, na význačné znaky a souměrnost útvaru, na opakování se typů. Od získaného souboru vzorců bylo by však potom záhodno dospěti k pravidlu Neperovu deduktivně úvahou o čtyrstěnu (c, a, b, α), ovšem proti předchozímu projednání značně zkrácenou. Stačilo by věnovati pozornost dvojímu typu jeho vrcholů a dvojstrannosti, hotově zavésti odpovídající si prvky c, $90^0 - a$, resp. α, $90^0 - b$ a poukázati na záměnu významu prvků při přechodu od jednoho trojhranu pravoúhlého k sdruženému jako na počátek a princip celého cyklu. Dobře by tu také posloužil vhodný model. Při takovémto postupu nemělo by se ovšem zapomínati, mechanismus pravidla motivovati poznanou vlastností útvaru. Proto by mělo býti úvodem k jeho formulaci vytknouti výslovně a zřetelně onu vlastnost pravoúhlého trojhranu, že v trojúhelnících pravoúhlých, které se na něm vytvoří rovinnými řezy α, β, jsou prvky c, α, β, $90^0 - a$, $90^0 - b$ tak umístěny, že každý z nich jest v jednom z 5 vyskytujících se tu trojhranů pravoúhlých přeponou a v jednom z 5 trojhranů pravoramenných základnou.