

# Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

---

František Graf

O integraci dvou typů kvadratických diferenciálních rovnic prvního řádu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 2, 128--130

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121202>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1906

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

a s různými aparátů mohou býti prospěšny všem, kteří nepřecházejí zajímavou tuto partii optiky jen výkresy a výkladem na tabuli, ale vyvozují výklady své na základě instruktivních a přesvědčivých pokusů.

## O integraci dvou typů kvadratických diferenciálních rovnic prvního řádu.

Napsal dr. František Graf v Praze.

Budiž předložena diferenciální rovnice:

$$dx^2 + 2 \frac{f(x+y) \pm f(x-y)}{f(x+y) \mp f(x-y)} dx dy + dy^2 = 0.$$

Položme v případě, že platí hořejší znaménka:

$$u = x + y, \quad v = x - y,$$

a rovnice přejde ve formu:

$$f(u) du^2 - f(v) dv^2 = 0,$$

čímž integrace je redukována na pouhou kvadraturu. V případě druhém zavedme  $iv$  místo proměnné  $v$ , tedy:

$$u = x + y \quad iv = x - y,$$

z čehož následuje:

$$f(u) du^2 - f(iv) dv^2 = 0.$$

Výsledku tohoto chci použití k určení asymptotických křivek na transcendentní ploše:

$$z = \cos x \cos y.$$

Plocha tato sestává z kongruentních polštářovitých dílů a protíná rovinu  $XY$  v síti čtverců o straně  $\pi$ . Rovnice řečených křivek zní:

$$dx^2 - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y dx dy + dy^2 = 0,$$

a lze ji převést na druhý typ následkem relace:

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}.$$

Rozložíme-li kvadratickou formu v součin, vyplývá:

$$[\sqrt{\cos u} du + \sqrt{\cos iv} dv][\sqrt{\cos u} du - \sqrt{\cos iv} dv] = 0.$$

Vznikající integrály jsou elliptickými druhého druhu a dají se vyjádřiti integrály funkcí elliptických. Zavedeme-li totiž Weierstrassovu  $p$ -funkci, hovní rovnici:

$$p'^2 u = 4p^3 u - 4pu, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 0,$$

a položíme-li  $\cos u = p\alpha$ ,  $\cos iv = p\beta$ ,  
bude:

$$\sqrt{\cos u} du = -2i p\alpha d\alpha, \quad \sqrt{\cos iv} dv = -2p\beta d\beta$$

a integrací pak:

$$\int \sqrt{\cos u} du = 2i \zeta(\alpha), \quad \int \sqrt{\cos iv} dv = 2 \zeta(\beta).$$

Soustavy asymptotických křivek budou tedy dány parametry:

$$U = \zeta(\alpha) + i \zeta(\beta), \\ V = \zeta(\alpha) - i \zeta(\beta),$$

při čemž:

$$\alpha = \int_{\cos u}^{\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t^3 - t}}, \quad \beta = \int_{\cos iv}^{\infty} \frac{dt}{2\sqrt{t^3 - t}}.$$

Naskytuje se otázka, které křivky na ploše dělí body elliptické od hyperbolických.

Za tím účelem vyšetříme, kdy diskriminant dané rovnice diferenciální jest roven nulle. Diskriminant ten jest

$$\frac{\cos(x+y) \cos(x-y)}{\cos^2 x \cos^2 y}.$$

Hledané křivky jsou tedy určeny rovnicemi:

$$\cos(x-y) = 0, \quad x-y = \pm (2n+1) \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(x+y) = 0, \quad x+y = \pm (2n+1) \frac{\pi}{2}.$$

Tyto dva systémy přímek v rovině tvoří opět čtvercovou síť, půli strany čtverců dříve uvedených a jsou průměty sinusových křivek plochy. Ježto pak pro  $x=y=0$ , jsou křivky

asymptotické irreálnými, má část plochy, obsahující vrcholy polštářů ( $z = \pm 1$ ) zakřivení elliptické, ostatní díl pak zakřivení hyperbolické.

## Věstník literární.

Recenze knih.

### Přehled novější literatury o radioaktivitě a vedení elektřiny v plynech.

(Dokončení.)

Obrátíme se nyní k některým spisům, které celé jsou věnovány otázce radioaktivity. Především jest to **E. Rutherfordova: Radioactivity** (Cambridge, 1904, X + 399 str.), která vyšla stejně jako spis *Thomsonův* — jemuž je autorem, *Thomsonovým* žákem a nyní professorem v Montrealu, věnována — ve sbírce Cambridge Physical Series. Jest to dosavade nejúplnější přehled prací a názorů o radioaktivitě, napsaný badatelem, jenž má na experimentálním prozkoumání záhady radia lví podíl. V první kapitole obeznamuje čtenáře v hlavních rysech s různými látkami radioaktivními. Druhá podává na 40 stránkách úryvek ionizační theorie plynů, pokud je jí potřebí k porozumění pozorovacích a měrných method. Není ovšem tak úplný jako ve spise *Thomsonově* a leckde také pro stručnost uváděny jsou různé věty matematické bez důkazu. Třetí kapitola obeznamuje čtenáře s methodami měrnými, při čemž různé praktické pokyny zvyšují živost líčení a cenu obsahu. Veliká (60 str.) kapitola čtvrtá poučuje čtenáře o povaze radiací,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  a sekundárních paprscích. Zvlášť v části jednající o  $\gamma$ -paprscích jest velmi zajímavá diskusse různých možných názorů o jejich podstatě — jsou-li obdobny velmi pronikavému záření Roentgenovu (názor, který se nejnověji všeobecně ujímá), nebo jsou-li proudem negativních částic pohybujících se rychlostí světelnou (*Paschen*), nebo sestávají-li snad z velmi rychle se pohybujících partikulí nenabitých. Další kapitola jedná o rychlosti, kterou vydávají látky aktivní energii jednak ve tvaru záření, jednak ve tvaru tepla. Dále popisují se vlastnosti radiací vzbuzovati fosforescenci, zmenšovati odpor pevných a tekutých látek, dále akce chemické a fyziologické. V kapitole sedmé jedná *Rutherford* o svých a *Soldyových* pracích o neustálém tvoření se aktivních látek uranium-X a thorium-X z urania a thoria; v obšírných kapitolách osmé a deváté probírá zjevny radiové emanace a vzbuzené (indukované)