Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
Mathematická nauka o plynech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 5, 226--237

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121194

Mathematická nauka o plynech.

Podlé Langa sestavil

Dr. F. J. Studnička.

(Pokračování.)

§. 4.

O stejnosti živých sil při smíšených plynech.

Jsou-li v nádobě dva rozličné plyny uzavřeny a tudíž v témž prostoru částice dvojího druhu obsaženy, naráží opět neustále částice tyto na sebe tak dlouho, až konečně každá má tutéž průměrnou živou sílu.

Představme si dvě rozličné částice hmoty m a m', které při svém postupném pohybu na sebe narazí; co se tu stane? Složky rychlosti p a p', které jsou směru tohoto nárazu rovnoběžny, promění se v P a P', takže rozdíl živých sil tu bude pak

$$\frac{m}{2}P^2 - \frac{m'}{2}P'^2$$

a tudíž použijeme-li vzorců (1) pag. 177.,

$$\frac{m}{2}\left(p + 2m'\frac{p'-p}{m+m'}\right)^2 - \frac{m'}{2}\left(p' + 2m\frac{p-p'}{m+m'}\right)^2,$$

aneb přeměníme-li tento výraz přiměřeným spůsobem,

$$\left[\frac{8\,mm'}{(m+m')^2} - 1\right]\left[\frac{m'}{2}p'^2 - \frac{m}{2}p^2\right] + 4\,mm'\frac{m-m'}{(m+m')^2}pp'.$$

Poněvadž tu p a p' může býti tak dobře positivní jak negativní, jest pravděpodobnost stejně veliká, že v tomto výrazu bude poslední člen, obsahující součin pp', buď positivní neb negativní; průměrná hodnota jeho jest tedy 0, takže po náraze těchto dvou částic bude

$$\frac{m}{2}P^2 - \frac{m'}{2}P'^2 = \left[\frac{8\,mm'}{(m+m')^2} - 1\right]\left[\frac{m'}{2}p'^2 - \frac{m}{2}p^2\right].$$

Ale tu jest na pravé straně první faktor ryzým zlomkem, pokud se m liší od m'; neb jelikož geometrický průměr dvou veličin vždy jest menší nežli arithmetický, bude především

$$\sqrt{mm'} < \frac{m+m'}{2}$$

a tudíž

$$8\,mm' < 2\,(m+m')^2$$

z čehož snadným spůsobem se obdrží

$$\frac{8\,mm'}{(m+m'^2)} - 1 < 1.$$

Rozdíl živých sil po prvním srázu rovná se tudíž rozdílu živých sil před srázem, znásobenému ryzým zlomkem, stal se tudíž menším, z čehož patrno, že *po každém srázu dvou nestejných částic, rozdíl jejich živých sil průměrně se zmenšuje a tudíž konečně se stává* 0, takže průměrné živé síly nestejných částic v témž prostoru uzavřených se stávají stejnými, jak s počátku bylo praveno.

§. 5.

O teplotě.

Značí-li v a v' při stejném tlaku obsahy plynu při teplotě T a T', jest, jak známo,

$$v : v' = T : T',$$

tak že můžeme pro ten případ, že T značí absolutní temperaturu plynu a q veličinu pro všechny permanentní plyny stálou, klásti

$$v = q\,T. \tag{7}$$

Použijeme-li tedy rovnice (4) pag. 179, obdržíme pro stejný obsah a stálý tlak

$$T = \frac{2}{3}\,\frac{N}{pq}\,\frac{m}{2}\,u^2\,, \tag{8}$$

z kteréhožto vzorce patrno, že při stejném tlaku *absolutní teplota plynu jednoduchého jest přiměřena průměrné živé síle postupného pohybu jeho částic.*

A tato poučka platí i o rozličných plynech, jelikož $\frac{m}{2}u^2$ jest pro všechny plyny stejné hodnoty.

Představme si dva plyny při stejném tlaku napřed od sebe odděleny stěnou, takže pro stejnost tlaku tu bude podle vzorce (3) pag. 178.

$$nmu^2 = n'm'u'^2, \qquad (9)$$

a pak odstraňme stěnu, při čemž, jak známo, teplota se nezmění; poněvadž spojením obou plynů průměrné živé síly jednotlivých částic se taktéž nezmění, musí

$$mu^2 = m'u'^2,$$

jelikož by podlé předcházejícího výkladu při spojení se změnily, kdyby původně nebyly stejny. Pomocí této rovnice jde pak ze vzorce (9)

$$n = n', \qquad (10)$$

z čehož patrno, že *všechny plyny obsahují při stejném tlaku a teple v stejných objemech stejný počet částic.*

Ve vzorci (8) jest tedy nejenom q, nýbrž i N pro stejné obsahy rozličných plynů stálou veličinou a jest tudíž *absolutní teplota plynů při stejném tlaku přiměřená průměrné živé síle postupného pohybu jejich částic.*

§. 6.

O hutnosti a váze atomové.

Podlé vzorce (10) jest patrně

$$v = kN,$$

kdež značí k veličinu při stejném tlaku a teple *stálou;* jestli tedy s poměrná a G prostá váha plynu, bude

$$\frac{v}{N} = \frac{G}{sN} = k. \qquad (11)$$

Poněvadž ale váha jednotlivé částice hmoty m jest mg, musí zároveň

$$mg = \frac{G}{N},$$

takže pomocí vzorce (11) obdržíme

$$\frac{mg}{s} = k, \qquad (12)$$

kdež by levá strana značila objem jedné částice, kdyby prostor byl jimi zcela vyplněn.

Ačkoli neznáme prosté váhy částic plynových, můžeme poslední vzorec porovnati se zkušeností, jelikož váhy částic jsou multipla váhy rovnomocné, t. j. váhy nejmenší, při lučebním sloučení možné. Učíť zkušenost, že při lučebních sloučeninách poměrné množství prvků jest vždy multiplum určitých veličin, jež označujeme písmenami H, O, P,... a při tom klademe $H = 1$. Podlé tohoto zkušeností odůvodněného zákonu soudíme, že prvky se skládají z atomů určité váhy, kteréž se arci jen celistvě mohou spojovati, takže místo váhy rovnomocné krátce pravíme váhy atomové.

A poněvadž v pochodech lučebních jen celistvě mohou se částice jeviti, musí býti váhy molekulární celistvá čísla a multipla váhy atomové, pročež můžeme klásti

$$mg = ax,$$

kdež značí a váhu atomu plynu, x pak číslo celistvé, načež ze vzorce (12) obdržíme

$$\frac{a}{s} = \frac{k}{x}, \tag{13}$$

z čehož plyne poučka, že *atomové objemy plynů jsou přiměřeny číslům celistvým*, což již *Gay-Lussac* ze skušenosti vyvodil.

Zavedeme-li do vzorce (13) místo s přiměřenou veličinu ϱ z §. 3., obdržíme pro

$$\begin{array}{ll}
H & \dfrac{1}{0\cdot0693} = 14\cdot44 = \dfrac{28\cdot88}{2} \\[2ex]
O & \dfrac{16}{1.106} = 14\cdot44 = \dfrac{28\cdot88}{2} \\[2ex]
P & \dfrac{31}{4\cdot294} = 7\cdot22 = \dfrac{28\cdot88}{4} \\[2ex]
NH_2 & \dfrac{17}{0\cdot589} = 28\cdot88 = \dfrac{28\cdot88}{1} \\[2ex]
N_2O & \dfrac{44}{1.524} = 28\cdot87 = \dfrac{28\cdot87}{1},
\end{array}$$

z čehož patrno, že nejmenší hodnoty, které rovnici (13) vyhovují, jsou pro jmenované plyny $x = 2, 2, 4, 1, 1$. Z toho soudíme tedy, že částice *vodíková* se skládá nejméně ze *dvou*, částice *kostíková* nejméně ze *čtyr* atomů; pro složené plyny pak se tu obdrží vesměs $x = 1$.

Chceme-li tedy chemické vzorce tak napisovati, aby obsahovaly přímo váhy molekulární, musíme místo H, O, P,... psáti H_2, O_2, P_4,..., načež budou obsahy těmto vzorcům příslušné vesměs stejny. A poněvadž se poměrné váhy plynů mají k sobě jako váhy molekulární, značí poslední symboly přímo poměrné váhy pro $H = 1$.

§. 6.

O množství tepla v plynu obsaženém.

Značí-li G váhu jistého plynu teploty T a dU množství tepla, kterýmž se jeho teplota zvýší o dT, jest, jak známo

$$dU = cG \, . \, dT,$$

při čemž měrné teplo c pro stálý obsah jest podlé zkušenosti nezávislé na tlaku a teplotě u plynů permanentních, takže z této rovnice plyne

$$U = cGT + k,$$

značí-li k veličinu stálou.

Neobsahuje-li plyn žádného tepla, musí pro $T = 0$ též $U = 0$ býti, z čehož jde, že pro absolutní míru teploty bude $k = 0$ a tudíž

$$U = cGT, \tag{14}$$

kdež značí U množství tepla při stálém obsahu.

Značí-li ale g akceleraci známou, jest též

$$G = gNm \tag{15}$$

a tudíž dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice předcházející,

$$U = cgNmT = cgNm\,T\frac{u^2}{u^2}$$

neb

$$U = 2cg\frac{T}{u^2}E, \tag{16}$$

zavedeme-li označení

$$E = \frac{Nm}{2}u^2 \tag{17}$$

pro živou sílu postupného pohybu všech v G obsažených částic plynových.

Z rovnice (16) jde na jevo, že množství tepla v plynu nějakém obsaženého se obdrží, násobí-li se živá síla E s veličinou

$$K = 2cg\frac{T}{u^2}; \qquad (18)$$

a poněvadž u nezávisí na tlaku a jest podlé vzorce (8) přiměřené $\sqrt{T}$, jest faktor K co do tlaku a teploty veličinou stálou, takže tu platí zákon, že *množství tepla, jež obsahuje plyn při stejném obsahu, jest přiměřeno živé síle postupného pohybu jeho částic.*

Abychom vypočítali hodnotu pro K, dosaďme do vzorce (18) za u hodnotu ze vzorce (6) pag. 180., načež obdržíme

$$K = 2cg\varrho\frac{T_0}{485^2} = \frac{c\varrho}{51{\cdot}75}; \qquad (19)$$

a poněvadž pro permanentní plyny platí

$$c\varrho = \frac{c'\varrho}{k} = \frac{0{\cdot}24}{1{\cdot}41} = 0{\cdot}17,$$

obdržíme konečně

$$K = \frac{1}{261}$$

$$E = 261\ U. \qquad (20)$$

Poněvadž ale živá síla E rovná se práci částic, vykonané od té doby, co jejich rychlost byla 0, teplota tedy též absolutní 0, byla by podlé vzorce (20) jednotka tepla rovnomocna 261 jednotkám práce. Jak odjinud známo, jest však jednotka tepla přiměřená 424 jednotkám práce, z čehož jde, že teplo, jež se plynu při stálém obsahu dodá, nespotřebuje se vesměs k zvýšení postupného pohybu částic, nýbrž že asi třetina jeho jinak se zabaví.

Jakou tento zbytek práci koná, není na jisto postaveno; možná, že částice mají mimo pohyb postupný též točivý aneb že atomy mají v skupení molekulárním pohyby točivé a kolisavé neb oscillující a že část živé síly tu se spotřebuje.

Co v tomto odstavci bylo vyloženo, vyzpytoval nejprvé *Clausius* a sice, jak patrno, na základě hypothetickém, že $\frac{m}{2}u^2$

představuje průměrnou živou sílu částice hmoty m. Avšak tu jest sice u^2 čtverec průměrné rychlosti u, nikoli průměr čtverců rychlosti, jejž označujeme symbolem $[u^2]$, o němž platí vždy

$$[u^2] > u^2;$$

závisíť pravý poměr obou na tom, jak hojně se která rychlost u kterých částic vyskytuje.

Maxwell, který se hloub zanášel s touto otázkou, určil pro tento poměr vzorec

$$[u^2] = \frac{3\pi}{8} u^2, \tag{21}$$

takže předcházející vzorce pomocí této hodnoty se promění v

$$U = \frac{16}{3\pi} cg \frac{T}{u^2} E, \tag{22}$$

$$E = \frac{Nm}{2} [u^2] = 304\, U,$$

z čehož patrno, že tu rovnomocnina tepla značně se změnila.

§. 8.

O nárazech částic v klidu a pohybu.

Abychom později mohli určiti průměrnou hodnotu rozběhu l pro částice rozličných plynů, musíme vyšetřiti pro jistou částici pravděpodobnost setkání se s jinými buď stejně rychle se pohybujícími aneb klidnými částicemi. A tu nutno rozeznávati případy tři:

1. *Částice hmoty m pohybuje se rychlostí u, kdežto ostatní jsou v klidu.*

Tu jest pravděpodobnost W_0, že m setká se v době dt s některou klidnou částicí, přiměřená rychlosti, takže bude

$$W_0 = \alpha u, \tag{23}$$

kdež značí α veličinu stálou.

2. *Částice hmoty m pohybuje se rychlostí u a směrem, s nímž dráhy ostatních stejně rychle se pohybujících částic uzavírají úhel φ.*

Tu jest relativní rychlost částice m podlé ostatních

$$u' = \sqrt{u^2 + u^2 - 2u^2 \cos\varphi}$$

a tudíž pravděpodobnost W, dosadíme-li tuto hodnotu do vzorce předešlého

$$W = \alpha u \sqrt{2(1-\cos\varphi)}. \tag{24}$$

3. *Částice pohybují se vesměs rychlostí u směry různými, takže každý směr se stejně zhusta vyskytuje.*

A tu jest třeba vyšetřiti průměrnou relativní rychlost spůsobem zvláštním.

Sestrojíme-li kolem středu O kouli poloměru r a naneseme-li v konečných bodech poloměrů příslušné rychlosti průměrné a značí-li tu poloměr OA pohyb částice m, kterýž s pohybem OB uzavírá úhel $\sphericalangle AOB = \varphi$, (obr. 17.), bude v A relativní rychlost 0, v B pak

$$u' = u \sqrt{2(1-\cos\varphi)}.$$

Tutéž rychlost bude míti též bod C, který sousedí s bodem B, při čemž $\sphericalangle BOC = d\varphi$, takže pro nekonečně malý oblouk BC se obdrží co součet rychlostí

$$u'' = u \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, BC;$$

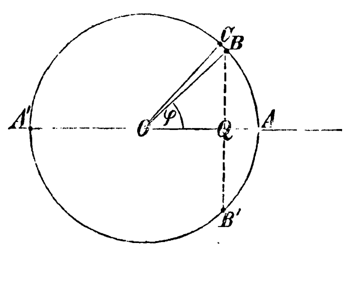
otočíme-li pak oblouk BC kolem osy OA, obdržíme kroužek poloměru $BQ = r \sin\varphi$, v němž jsou rychlosti tytéž jako v obloučku BC, takže tu bude součet rychlostí

$$u'' = 2\pi r u\, BC \sin\varphi \sqrt{2(1-\cos\varphi)}.$$

Chceme-li konečně znáti tento výraz pro celou kouli, musíme sečítati tyto kroužky od A až A' neb výrazy předcházející od $\varphi = 0$ až do $\varphi = \pi$, načež obdržíme, jelikož $BC = r\,d\varphi$,

$$U = \int_0^\pi 2\pi r^2 u \sin\varphi \sqrt{2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi.$$

Obr. 17.



co součet všech poměrných rychlostí. Dělíme-li tedy tento výraz součinem $4\pi r^2$ co povrchem této koule obdržíme průměrnou rychlost poměrnou

$$u_0 = u \int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= 4u \int_0^{\pi} \sin^2\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{4}{3} u \Big/_0^{\pi} \sin^3\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{3} u.$$

Dosadíme-li tedy tuto hodnotu do vzorce (23), obdržíme pro pravděpodobnost nárazu vzorec

$$W = \alpha . \frac{4}{3} u, \qquad (25)$$

takže porovnáním obou vzorců bude

$$W_0 : W = 3 : 4; \qquad (26)$$

má se tedy pravděpodobnost, že se částice rychlostí u se pohybující setká s jinou klidnou, k pravděpodobnosti, že se setká s jinou stejnou rychlostí a libovolným směrem se pohybující jako 3 : 4.

§. 9.

O míře vrativosti.

Dosud jsme si pro jednoduchost představovali, že všecky částice plynu mají rozběh stejně velký; abychom však se přidrželi skutečnosti a pravou hodnotu této veličiny mohli ustanoviti, vyšetřme především, kolik částic z daného jich počtu Z dostane se postupným pohybem svým až do vzdálenosti x, vyhledejme tedy Z_x co počet částic, jejichž rozběh jest buď větší nežli x aneb aspoň se rovná x, načež rozdíl $Z - Z_x$ naznačí počet částic, které již v mezích vzdálenosti x na sebe narazí.

Máme-li na zřeteli malou část dráhy ξ, můžeme za to míti, že počet částic, které se v mezích této vzdálenosti zarazí, přiměřen jest velikostí její ξ a počtu částic Z a tudíž vyjádří se součinem $\alpha \xi Z$, kdež α jest stálým koefficientem, ustanovujícím míru, v jaké se odrážení neb vracení částic děje a tudíž *mírou vrativosti* (Reversionskoefficient) sluje.

Po proběhnutí prvního prvku dráhy zbude nám tedy jen Z_1 částice, která se dále bude moci ubírati, kdež

$$Z_1 = Z(1 - \alpha\xi);$$

podobně bude po proběhnutí druhého, třetího,... n-tého prvku dráhy

$$Z_2 = Z_1(1 - \alpha\xi)$$
$$Z_3 = Z_2(1 - \alpha\xi)$$
$$\cdots\cdots$$
$$Z_n = Z_{n-1}(1 - \alpha\xi)$$

takže znásobíme-li soustavu tuto na obou stranách, obdržíme

$$Z_n = Z(1 - \alpha\xi)^n.$$

Položíme-li tu pak $n\xi = x$, promění se poslední vzorec v

$$Z_n = Z\left(1 - \frac{\alpha x}{n}\right)^n,$$

z čehož jde pro nekonečně velké n, jak z algebraické analyse známo,

$$Z_x = Z e^{-\alpha x}. \tag{27}$$

Jak z tohoto výrazu patrno, jest Z_x čili počet částic, které se postupným pohybem svým dostanou do vzdálenosti x, tím menší, čím větší jest x a sice ubývá jich velmi rychle s přibývajícím x, což souhlasí velmi dobře se zkušeností, že plyny se poměrně zvolna rozprostraňují, má-li se zřetel k veliké jich původní rychlosti postupné u.

Abychom ze vzorce (27) vypočítali *průměrný* rozběh, násobme všecky částice s jich rozběhem a dělme součin tento počtem jich.

Především tedy třeba věděti, kolik částic má rozběh délky x, do kteréž vzdálenosti podlé vzorce (27) z počtu Z dostane se jich jen Z_x. A tu patrno, že z tohoto počtu se zarazí ve vrstvě tloušťky dx podle známého vzorce počet $\alpha Z_x dx$ a tento počet jich tedy bude míti rozběh x, takže tu bude součet drah

$x \alpha Z_x dx$; sečteme-li tedy všechny možné výrazy tyto a dělíme-li původním počtem Z, obdržíme

$$l = \frac{1}{Z} \int_0^\infty \alpha Z_x x \, dx$$

aneb použijeme-li vzorce (27)

$$l = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} x \, dx = \frac{1}{\alpha}, \tag{28}$$

z čehož patrno, že *převratná hodnota míry vrativosti rovná se průměrnému rozběhu.*

Položíme-li pak ve vzorci (27)

$$x = h l,$$

obdržíme pomocí předešlého vzorce

$$\frac{Z_x}{Z} = e^{-h} = \left(\frac{1}{e}\right)^h = 0{\cdot}37^h,$$

z čehož jde na jevo, že z jistého počtu částic, které současně nastoupí dráhu svou, jen 37% dostane se do vzdálenosti rovnající se rozběhu, kdežto 63% již dříve narazí na jiné částice; kdybychom položili

$$x = 5hl,$$

obdrželi bychom podobně

$$\frac{Z_x}{Z} = e^{-5h} = \left(\frac{1}{e^5}\right)^h = 0{\cdot}01^h,$$

z čehož patrno, že do vzdálenosti pětkrát tak velké dostane se sotva 1% částic.

Poněvadž míra vrativosti tak se stává důležitou pro výzkumy tohoto druhu, bude prospěšno i s jiné strany ji objasniti.

Představme si, že částice plynu jsou koule průměru σ, takže dvě částice se srazí, měří-li vzdálenost jich středů σ; opíšeme-li pak kolem středu částice m kouli poloměrem σ, tož patrno, že do ní nemůže střed jiné částice připadnouti, aniž by nebyla na ni narazila.

Představme si dále, že podlé předešlého ve vrstvě tloušťky ξ se zarazí z počtu částic Z jich $\alpha Z \xi$ a že pro tenkost vrstvy částice tyto leží takřka v jedné rovině; v této rovině zaujmou pak tyto částice na jednotce plochy část $n\xi\sigma^2\pi$, takže se každá ze Z částic tu zadrží, jakmile se v tomto oboru jen octne. I měl by se tudíž počet všech k počtu zadržených jako: $1 : n\xi\sigma^2\pi$, kdyby částice vrstvy ξ byly v klidu. Poněvadž se však tyto částice též pohybují, projde jich touto vrstvou podlé předešlého ještě menší počet a bude tu podlé vzorce (25)

$$Z : \alpha Z\xi = 1 : {}^4/_3\, n\xi\sigma^2\pi\,,$$

z čehož jde, zkrátíme-li,

$$\alpha = {}^4/_3\, \pi\sigma^2 n \tag{29}$$

aneb máme-li zřetel k vzorci (28)

$$n l = \frac{3}{4\pi\sigma^2}\,. \tag{30}$$

Ze vzorce tohoto jde na jevo, že součin nl závisí jen na průměru částic σ a jest tudíž nezávislým na tlaku a teplotě, pokud se zároveň nemění velikost jich.

(Dokončení.)

Poznámka o součtu čísel kvadratických.

Podává

František Hromádko.

V čísle 2. roč. IV. tohoto časopisu uveřejněn jest zajímavý spůsob, jakým lze sečísti n přímo po sobě jdoucích ztrojmocněných členů přirozené řady čísel.

Úloze této stojí po boku úloha jiná, jednající o součtu čísel zdvojmocněných od 1 až do n^2 včetně.

Úloha ta jest sice v zmíněném čísle časopisu na str. 79. vzorcem pro všeobecný člen čtyřbokých jehlanů mimochodem rozhodnuta; spůsobem nezávislým lze ji však snadno řešiti takto:

Ze vzorce

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$