Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek
Elementární spůsob vyšetřování křivek v rovině

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 4 (1875), No. 5, 217--225

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121193

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1875

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Elementární spůsob vyšetřování křivek v rovině.

Pro žáky středních škol podává

Augustin Pánek.

§. 1.

Při sestrojování křivých útvarů geometrických podlé zákona výtvarného vyskytují se mnohdy takové polohy bodu tvořícího, že udělujíce křivce zvláštní ráz napomáhají nemálo k bližšímu ustanovení tvaru jejího.

Takové význačné polohy nazýváme *zvláštními body* křivky vůbec a *vrcholy*, body *obratu*, *návratu* a *úvratu*, body *násobné* a *osamělé* zvlášť.

Bod, v němž se křivení mění, sluje bodem *obratu*, *obratník* neb *inflexe* křivky.

Tečnu v bodu obratu lze považovati za sečnu, jejíž průsečné tři body s křivkou, kterou vyjádříme nerozvinutou funkcí mezi orthogonálními souřadnicemi x a y

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

v jediný bod splynou.

Je-li tedy rovnice této přímky

$$y = ax + b \tag{2}$$

a leží-li body (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) v ní, vyhoví se rovnicím

$$y_1 = ax_1 + b \tag{3}$$

$$y_2 = ax_2 + b \tag{4}$$

$$y_3 = ax_3 + b \tag{5}$$

tudíž i podmínce

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

kteráž značí, že plocha trojúhelníku těmito body stanovenému rovná se 0. *)

*) Viz *Studnička* „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech. „Čas. pro pěst. mathem. a fysiky.“ R. II. pag. 70.

Poněvadž tyto body jsou společné s křivkou, tedy bude také

$$f(x_1, y_1) = 0, \qquad (6)$$

$$f(x_2, y_2) = 0, \qquad (7)$$

$$f(x_3, y_3) = 0. \qquad (8)$$

Jestli pak

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, \qquad y_2 = y_1 + \beta, \qquad (9)$$

$$x_3 = x_1 + 2\alpha, \qquad y_3 = y_1 + 2\beta, \qquad (10)$$

obdrží rovnice (7) a (8) tvar

$$f(x_1 + \alpha_1\, y_1 + \beta) = 0 \qquad (11)$$

$$f(x_1 + 2\alpha, y_1 + 2\beta) = 0 \qquad (12)$$

kdež značí α, β rozdíly souřadnic.

Spojíme-li rovnice (6), (11) a (12) a položíme-li pak veličiny α a β rovny nulle, obdržíme podmínečnou rovnici, aby bod (x_1, y_1) křivky (1) byl bodem *obratu.*

Když protíná přímka (2) křivku (1) v dvou bodech (x_1, y_1) (x_2, y_2), vyhoví se rovnicím (6) a (7), pak (3) a (4), z kterýchžto posledních plyne

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_2}$$

a podle (9)

$$a = \frac{\beta}{\alpha} = tan\, \tau. \qquad (13)$$

Stane-li se ale průsečník (x_1, y_1) s (x_2, y_2) totožným čili jsou-li rozdíly souřadnic rovny nulle, obdrží směrnice a hodnotu určitou, mající však v rovnici (13) tvar $\frac{0}{0}$. Jest tudíž třeba z rovnice (6), (11) a (13) vyvoditi rovnici mezi veličinami α, β, a, by hodnota a určitou se stala, když α, β přejde v nullu.

Poněvadž obecný člen rovnice (6) má tvar

$$M x^m_1\, y^n_1,$$

jest patrně týž u rovnice (11)

$$M (x_1 + \alpha)^m\, (y_1 + \beta)^n;$$

odečteme-li pak rovnici (6) od (11), obdržíme rovnici, jejíž obecný člen jeví se v tvaru

$$M\begin{vmatrix}(x_1+\alpha)^m, & x^m{}_1\\ y^n{}_1, & (y_1+\beta)^n\end{vmatrix},$$

značí-li M libovolnou stálou, exponenty m a n celistvá positivná čísla, která se též nulle rovnati mohou.*)

Z této úvahy vyplývá, že se nám v rovnici, vzniklé spojením rovnic (11) a (6), vyskytnou členy činitelů α a β, tak že rovnice ta nabude tvaru

$$h_1\alpha+h_2\beta+h_3\alpha^2+h_4\alpha\beta+h_5\beta^2+\psi=0, \qquad (14)$$

kdež koefficienty h_i ($i=1, 2, .., 5$) neobsahují α a β, funkce ψ však obsahuje mimo stálé veličiny ještě α neb β aneb α i β avšak rozměru nejméně třetího.

Zavedeme-li podle rovnice (13) do (14) αa místo β, dělíme-li pak na α a položíme-li potom $\alpha=0$, povstane

$$h_1+h_2\,a=0,$$

tedy

$$a=-\frac{h_1}{h_2}. \qquad (15)$$

Je-li $a=0$, jest i

$$h_1=0, \qquad (16)$$

a poněvadž a značí číselnou hodnotu goniometrické tangenty úhlu odchylky τ přímky s osou úseček, jest nám tu činiti s přímkou souběžnou s osou x.

Rozřešivše tedy rovnici (16), obdržíme hodnoty úseček bodů *kulminačních* čili *vrcholů* křivky.

Jsou to tudíž takové polohy bodu tvořícího, kterými se dělí sousední části křivky na dva *souměrné* díly, hledíme-li k normále onoho bodu.

Poněvadž z rovnice (6) povstala (11) zavedením hodnot $x_1+\alpha$, $y_1+\beta$ místo x_1, y_1, proto také vznikne (12) ze (14) píšeme-li 2α místo α, 2β místo β, takže rovnice (12) přejde v

$$2h_1\alpha+2h_2\beta+4h_3\alpha^2+4h_4\alpha\beta+4h_5\beta^2+\psi'=0,$$

kdež ψ' má hodnotu, které nabude ψ, zavedeme-li do něho 2α, 2β místo α a β.

*) Srovnej „*Fort*, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 1. Theil. Leipzig, Teubner, 1872, pag. 234.

Jestliže do poslední rovnice vložíme αa místo β a dělíme-li pak na 2α, povstane

$$h_1 + h_2 a + 2h_3 \alpha + 2h_4 \alpha a + 2h_5 \alpha a^2 + \frac{\psi'}{2\alpha} = 0.$$

Podle rovnice (15) jest součet prvních dvou členů roveň nulle, takže dělíme-li opětně na 2α a položíme-li $\alpha = 0$, přejde též i ψ' v nullu a tudíž podmínka, by bod (x_1, y_1) byl obratníkem, jest

$$h_3 + h_4 a + h_5 a^2 = 0 \qquad (17)$$

aneb dle rovnice (15),

$$h_3 h_2^2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h_1^2 = 0. \qquad (18)$$

Aby tedy bod $(x_1 - y_1)$ byl bodem obratu, třeba rovnicím (6) a (18) vyhověti.

Jakmile ale v rovnici (18) hodnota levé strany pro hodnoty vrcholů jest $\gtrless 0$, mají v tomto přechodním bodě pořadnice křivky hodnoty buď největší neb nejmenší.

Bod, jehož pořadnice jest největší, sluje *vrcholem horním* a je-li pořadnice hodnoty nejmenší, *vrcholem dolním*.

Zda-li křivka k ose úseček obrací *vypuklou* neb *vydutou* stranu, poznáme z relace

$$h_3 h^2_2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h^2_1 \gtrless 0, \qquad (19)$$

V prvním případě jest křivka *vypuklá*, v posledním *vydutá*.

Přihlížíme-li k jednotlivým bodům křivky, náleží každému bodu v křivce vůbec danému tečna jediná, jejímžto během určuje se zároveň *běh křivky* v tomto bodě.

Není-li křivka přetržitou a jest-li pro určitou danou hodnotu úsečky nějakého bodu

$$\frac{-h_1}{h_2} > 0, \quad \text{jest} \quad \tau < \frac{\pi}{2},$$

tehdy *stoupá* křivka v tomto bodě; jestli ale

$$\frac{-h_1}{h_2} < 0, \quad \text{jest} \quad \tau > \frac{\pi}{2},$$

pak v témž bodě křivka *klesá*.

Příklad.

Dána-li rovnice křivky parabolické

$$y = x^3 - x^2 - 5x + 4$$

a je-li nám ustanoviti vrcholy a body obratu jejího, položme

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

a tu obdržíme především

$$y_1 + \beta = (x_1 + \alpha)^3 - (x_1 + \alpha)^2 - 5(x_1 + \alpha) + 4;$$

jest tedy dle rovnice (14)

$$h_1 = 3x^2_1 - 2x_1 - 5, \; h_2 = -1, \; h_3 = 3x_1 - 1, \; h_4 = 0, \; h_5 = 0,$$

načež podle rovnice (16)

$$3x_1^2 - 2x_1 - 5 = 0,$$

čímž obdržíme kořeny této rovnice

$$x'_1 = \frac{5}{3}, \quad x''_1 = -1$$

co úsečky vrcholů křivky.

Křivka ta stoupá od $x_1 = -\infty$ až $x''_1 = -1$, klesá odtud až do $x'_1 = \frac{5}{3}$ a opět stoupá až do $x = +\infty$.

Podlé rovnice (18) obdržíme bod obratu z rovnice

$$(3x_1 - 1)(-1)^2 = 0;$$

jest tedy úsečka bodu obratu $x_1 = \frac{1}{3}$. Příslušná pořadnice plyne z dané rovnice křivky.

Poněvadž

$$\int^{\frac{5}{3}} (h_3 h_2^2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h_1^2) = 4,$$

$$\int^{-1} (h_3 h_2^2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h_1^2) = -4,$$

poznáme, že pro $x'_1 = \frac{5}{3}$ jest y_1' minimum a křivka má tedy vrchol dolní; pro $x''_1 = -1$ jest y''_1 maximum a křivka má vrchol horní.

Zároveň poznáváme, že pro první hodnotu $\frac{5}{3}$ jest křivka vypuklá, pro druhou -1 vydutá.*)

*) Má-li se ustanoviti hodnota x, pro kterou obdrží funkce

$$y = (x-k_1)^2 + (x-k_2)^2 + \ldots + (x-k_n)^2$$

§. 2.

Rovnice přímky jdoucí bodem (x_1, y_1) jest

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Jestli přímka tečnou křivky, bude podle rovnice (15), §. 1.,

$$y - y_1 = -\frac{h_1}{h_2}(x - x_1) \qquad (1)$$

aneb

$$(x - x_1) h_1 + (y - y_1) h_2 = 0 \qquad (1')$$

rovnicí tečné v bodu (x_1, y_1) sestrojené.

---

maximální neb minimální hodnotu, položme

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

čímž obdržíme

$$y_1 + \beta = \sum_{n=1}^{n} \left((x_1 + \alpha) - k_n\right)^2$$

čili

$$y_1 + \beta = \sum^{n} (x_1 + \alpha)^2 - 2 \sum^{n} (x_1 + \alpha) k_n + \sum^{n} k_n,$$

tedy

$$h_1 = -2 \sum^{n} k_n + 2 \sum^{n} x_1, \quad k_2 = -1,$$
$$h_3 = n, \quad h_4 = 0, \quad h_5 = 0.$$

Třeba tudíž řešiti rovnici

$$h_1 = n x_1 + \sum^{n} k_n + 0,$$

a zavedeme-li symbol součtu dle *Gaussa*

$$x_1 = \frac{(k_n)}{n};$$

poněvadž

$$h_3 h_2^2 - h_4 h_2 h_1 + h_5 h_1^2 = n,$$

tedy nully větší, proto je daná funkce minimum.

V této úloze značí y součet čtverců zbývajících chyb, v němž k_n jsou hodnoty veličiny pozorované a x pravděnejpodobnější hledaná hodnota téže veličiny, kteráž jest tedy rovna arithmetickému průměru všech pozorování k.

Tento princip sluje methodou nejmenších čtverců (methoda nejmenších součtů čtverců) a pochází od *Gaussa*, kterýž prý ho r. 1795 upotřebil.

První však pokus této methody nalezá se v pojednání od slavného *Legendre-a* z r. 1806 uveřejněném ve zprávách Pařížské akademie umění a nazvaném „Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cométes“, kdež uvádí normální rovnice tohoto počtu.

Poněvadž normála jest kolmá na tečně v bodě dotyčném, bude rovnice přímky normálné

$$y - y_1 = \frac{h_2}{h_1}(x - x_1) \tag{2}$$

aneb

$$(x - x_1)\,h_2 - (y - y_1)\,h_1 = 0. \tag{2'}$$

Tečna rovnicí (1) neb (1') vyjádřená uzavírá s osou úseček úhel τ, který nazveme τ_x a s osou pořadnic úhel τ_y, jichž hodnoty ustanovíme dle vzorců goniometrických

$$cos\,\tau_x = \frac{1}{\sqrt{1 + tan^2\tau}} \tag{3}$$

$$cos\,\tau_y = sin\,\tau_x = \frac{tan\,\tau}{\sqrt{1 + tan^2\tau}},$$

a podlé rovnice (15), §. 1.,

$$cos\,\tau_x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}} = \frac{h}{\sqrt{h_1^{\,2} + h_2^{\,2}}}, \tag{4}$$

$$cos\,\tau_y = \frac{-\frac{h_1}{h_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}} = \frac{-h_1}{\sqrt{h_1^{\,2} + h_2^{\,2}}}. \tag{5}$$

Ustanovíme nyní všeobecné vzorce pro délky tečny a normály a jich orthogonální průměty na osu úseček, totiž délku subtangenty a subnormály.

Nazveme-li tyto veličiny po sobě $Tg.$, $Nr.$, $St.$, $Sn.$, jest pořadnice bodu styku

$$\begin{aligned} y_1 &= Tg.\; sin\,\tau_x, \\ &= St.\; tan\,\tau_x, \\ &= Nr.\; cos\,\tau_x, \\ &= Sn.\; cot\,\tau_x, \end{aligned}$$

z kterýchžto rovnic a dle vzorců (4) a (5) plyne

$$Tg = \frac{y_1}{sin\,\tau_x} = \frac{-y_1}{h_1}\sqrt{h_1^{\,2} + h_2^{\,2}}, \tag{6}$$

$$St = \frac{y'}{tan\,\tau_x} = -y_1\frac{h_2}{h_1}, \tag{7}$$

$$Nr = \frac{y_1}{\cos \tau_x} = \frac{y_1}{h_2} \sqrt{h_1{}^2 + h_2{}^2}, \tag{8}$$

$$Sn = y_1 \tan \tau_x = -y_1 \frac{h_1}{h_2}. \tag{9}$$

Volme si za příklad rovnici pro kuželosečky v soustavě orthogonálné

$$2px + qx^2 - y^2 = 0,$$

kdež příslušná kuželosečka jest ellipsou, parabolou neb hyperbolou dle toho, jestli $q \lesseqgtr 0$.

Podle předešlého §. bude

$$2p(x_1 + \alpha) + q(x_1 + \alpha)^2 - (y_1 + \beta)^2 = 0;$$

tu patrno, že

$$h_1 = 2p + 2qx_1, \quad h_2 = -2y_1,$$

tedy

$$\frac{h_1}{h_2} = -\frac{p + qx}{y_1},$$

tudíž jest rovnicí tečny

$$y - y_1 = \frac{p + qx}{y_1}(x - x_1)$$

aneb použijeme-li rovnice křivky této,

$$yy_1 = p(x + x_1) + qxx_1,$$

a tudíž rovnicí přímky normálné

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p + qx_1}(x - x_1).$$

Dle vzorců (6), (7), (8), (9) jest

$$Tg = \frac{y_1{}^2}{p + qx_1} \sqrt{1 + \left(\frac{p + qx_1}{y_1}\right)^2}$$

aneb přihlížíme-li k rovnici dané,

$$Tg = \frac{y_1}{p + qx_1} \sqrt{p^2 + (1 + q)\, 2p\, x_1 + qx_1{}^2)};$$

dále

$$St = \frac{px_1}{p + qx_1} + x_1,$$

$$Nr = \frac{Tg}{-\frac{h_1}{h_2}} = \sqrt{p^2 + (1+q)(2px_1 + qx_1^2)}\,,$$

$$Sn = p + qx_1 = \frac{y_1^2}{x_1} - p.$$

Pro theorii tangent volme si *cissoidu Dioklesovu*,*) kteráž jest dána rovnicí

$$(x^2 + y^2)\,x = py^2$$

aneb

$$x^3 - py^2 + xy^2 = 0;$$

položíme-li

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

povstane

$$(x_1 + \alpha)^3 - p\,(y_1 + \beta)^2 + (x_1 + \alpha)(y_1 + \beta)^2 = 0,$$

kdež patrně jest koefficient veličiny α, β,

$$h_1 = 3x_1^2 + y_1^2$$

$$h_2 = -2py_1 + 2x_1y_1 = -2y_1(p - x_1)$$

$$= -\frac{2x_1^3}{y_1},$$

tedy

$$\frac{h_1}{h_2} = -\frac{(3x_1^2 + y_1^2)\,y_1}{2x_1^3}$$

a tudíž má tečna cissoidy rovnici

$$y - y_1 = \frac{(3x_1^2 + y_1^2)\,y_1}{2x_1^3}(x - x_1),\text{**)}$$

aneb použije-li se rovnice křivky

$$y = \pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(p-x)^{\frac{1}{2}}},$$

$$y = \pm\frac{x_1^{\frac{1}{2}}}{2\,(p-x_1)^{\frac{3}{2}}}\left\{(3p - 2x_1)\,x - px_1\right\},$$

dle toho volíme-li horní neb dolní znaménko, jest bod styku na straně pořadnice buď kladné neb záporné. (Dokončení.)

*) *Diokles* žil v druhém století před Kr., čehož důkazem jest zmínka o kissoidě neb jak obyčejně se píše, cissoidě ve spise *Geminově*, „*ἐξηγήσεις γεωμετρικαί*", z něhož *Prokles* několik míst uvádí. *Geminos* žil okolo r. 100 před Kr.

**) Viz „*Fort*, Analytische Geometrie", pag. 238. *Brahy* pag. 166.