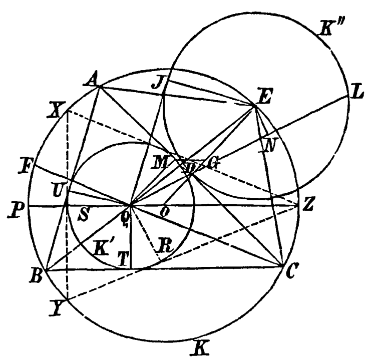
Geometrická úloha.

Napsal

professor **Antonín Jeřábek,**

c. k. okresní školní inspektor ve Slaném.

Jsou dány dva kruhy K (r) a K' (ϱ), spolu pak jejich středná (d): má se sestrojiti $\triangle ABC$ tak, aby strany jeho byly tětivami kruhu jednoho (K) a tečnými kruhu druhého (K').



Veďme tětivu XY, která dotýkajíc se kruhu menšího K' v bodě S na středné kolmo stojí, a nad tou opišme rovnoramenný trojúhelník XYZ kolem K'. Leží-li pak vrchol jeho Z na kruhu K, vyhovuje úloze nesčetné množství trojúhelníkův; jinak jest úloha nemožná. Předpokládejme:

I. *Vrchol Z leží na kruhu K.*

Veďme k libovolnému bodu M kruhu K' tečnou AC, spusťme poloměr OE na ni kolmo, veďme přímku z bodu E středem Q kruhu K', která protne K' v bodě B: i je pak $\triangle$ABC žádaný.

Důkaz. Učiníme-li QR $\perp$ YZ, plyne ze $\triangle$SZY $\sim\triangle$RZQ:

$$\frac{\text{QR}}{\text{RZ}}=\frac{\text{YS}}{\text{SZ}} \text{ čili } \frac{\varrho^2}{(r+d)^2-\varrho^2}=\frac{r^2-(d+\varrho)^2}{(r+d+\varrho)^2},$$

aneb

$$d^2-r^2+2r\varrho=0. \tag{1}$$

Přičteme-li (1) ku $r^2 - OD^2 = DC^2$, obdržíme

(2) $$DC^2 = d^2 + 2r\varrho - OD^2.$$

Vedeme-li $MG \parallel QO$, jest $OG = QM = \varrho$; $MG = QO = d$ a potom

(3) $$DC^2 = MG^2 + 2r \,.\, OG - OD^2.$$

Máme-li zřetel k trojúhelníku MGD pravoúhlému, vyplývá též

$$DC^2 = MD^2 + DG^2 + 2r \,.\, OG - OD^2$$

a ježto $DG = OG - OD$, bude

(4) $$DC^2 = MD^2 + OG^2 - 2OD \,.\, OG + 2r \,.\, OG.$$

Dosadíme-li do (4) $OG = QM$, jest

$$DC^2 = MD^2 + QM^2 + 2QM \,.\, (r - OD) = QD^2 + 2QM \,.\, ED\,,$$

neboli

(5) $$DC^2 = QD\left(QD + \frac{2QM \,.\, ED}{QD}\right).$$

Opíšeme-li kruh K″ kolem E, jenž se dotýká AC v bodě D, vyplývá z (5)

(6) $$DC^2 = QD\,(QD + DL)\,,$$

neboť $DN = \frac{QM \,.\, ED}{QD}$, jelikož $\triangle QMD \sim \triangle DNE$, když $EN \perp$ na prodlouženém QD.

Lze tedy vyjádřiti

(7) $$DC^2 = QD \,.\, QL = QJ^2\,,$$

značí-li QJ tečnou ke K″ vedenou; pročež $DC = QJ$; potom však $\triangle QEJ \cong \triangle CED$, odkud $QE = EC$ neboli

(8) $$\sphericalangle ECQ = \sphericalangle EQC\,.$$

Podle (8) je též

$$\text{arc } FA + \text{arc } AE = \text{arc } EC + \text{arc } BF,$$

neboli, protože arc $AE =$ arc EC,

(9) $$\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCF\,.$$

Spustíme-li $QT \perp BC$, je $QM = QT$, ježto podle (9) $\triangle QMC \cong \triangle QTC$, odkud vysvítá, že bod T na kruhu K′ leží a že BC jest jeho tečnou. Že i AB je tečnou kruhu K′, plyne zase z $\triangle BUQ \cong \triangle BTQ$, značí-li totiž QU kolmici na AB spuštěnou.

II. *Vrchol Z neleží na kruhu K.*

V tom případě je d buď větší nebo menší než v I. a tedy

(α) $$d^2 - r^2 + 2r\varrho > 0$$

(β) $$d^2 - r^2 + 2r\varrho < 0.$$

Dokážeme, že potom hledaný trojúhelník není možný.

Důkaz. Kdyby totiž byl možný a v bodě M se dotýkala strana jeho AC kruhu K′, byla by tím již dána příčka EQ, úhel při vrcholu protějším B rozpolující, která nutně bodem E, protože oblouk AC rozpoluje, a středem Q, protože strany AB a BC mají se dotýkati kruhu K′, procházeti musí. Ale tím dán by byl i vrchol protější B, jenž má býti zároveň na této příčce a na kruhu K, tedy v průseku obou. Potom by musila přímka spojující průsek B s bodem C býti tečnou, což však býti nemůže:

α) Dejme tomu, že $d^2 - r^2 + 2r\varrho = c^2 > 0$, ($c^2$ značí veličinu kladnou vůbec), potom jest $DC^2 + c^2 = d^2 + 2r\varrho - OD^2$ podle (2) a také $DC^2 + c^2 = QJ^2$ dle (7) neboli $DC < QJ$, tedy $EC < QE$ a $\sphericalangle EQC < \sphericalangle ECQ$ čili

$$\text{arc } BF + \text{arc } EC < \text{arc } FA + \text{arc } AE,$$

z čehož $\text{arc } BF < \text{arc } FA$, tudíž $\sphericalangle FCB < \sphericalangle FCA$ vyplývá. Ale pak jest $QT < QM$, tedy BC sečnou kruhu K′.

β) Jeli však $d^2 - r^2 + 2r\varrho < 0$, lze podobně dokázati, že BC leží mimo kruh K′.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,

professor v Hradci Králové.

Čísla Bernoulliova. Čísla tato vyskytující se poprvé ve slavném spise Jakuba Bernoullia „Ars conjectandi“ (1713), různě bývají označována a definována. Pro svou důležitosť v analysi jsou častým a oblíbeným předmětem pojednání; podáme tuto stručnou zprávu o některých novějších pracích čísel těch se týkajících.

Baraniecki, docent university varšavské, pojednal o nich ve sborníku: Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie (tom. XIII. 1886. str. 183). Vyvineme-li výraz

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (k-1)^n$$

v řadu dle mocnin veličiny k, bude