Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Jeřábek

O dvou místech geometrických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 4, 170--175

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121171`

Na př. Je-li číslo soustavy desítkové 190 napsáno v jiné soustavě číslicemi 276, jaký základ (x) má soustava tato?

Zde jest řešiti rovnici

$$2x^2 + 7x + 6 = 190 \text{ čili } x^2 + \frac{7}{2}x = 92,$$

z kteréž náležitě omezené

$$(x+1)^2 < x^2 + \frac{7}{2}x = 92 < (x+2)^2$$

poznáme, že $x + 1 = 9$ a tedy $x = 8$.

Na př.: Z rovnice

$$x^3 + \frac{4}{5}x^2 = 76\frac{4}{5}$$

obdržíme $x = 4$.

Na př.: Je-li součet členů řady čísel kvadratických 650, kolik členů bylo tu sečteno?

Součtový vzorec řady této jest

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

tedy zde

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 650$$

neb

$$2n^3 + 3n^2 + n = 3900$$

čili

$$n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 1950,$$

odkudž dostaneme

$$n = 12, \text{ protože } 12 < \sqrt[3]{1930} < 13.$$

O dvou místech geometrických.

Pojednal

V. Jeřábek, professor v Brně.

Dvěma vrcholy A, B rovnoramenného trojúhelníka ABC (AC = BC) prochází proměnlivá parabola P, jejíž přímka řídící otáčí se kolem třetího vrcholu C. Hledejme: 1. geom. místo ohniska paraboly, jeho tečnu a asymptoty; 2. geom. místo krajního bodu průměru paraboly, který středem strany AB prochází.

1. Budiž AB osou Y a střed O strany AB počátkem pravoúhlé soustavy souřadnic. Fokální rovnice paraboly jest

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x\cos\varphi+y\sin\varphi-p)^2,$$

neboť rovnice tato byvši odmocněna vyjadřuje, že vzdálenost bodu (x, y) od ohniska $F(\alpha, \beta)$ rovná se vzdálenosti téhož bodu (x, y) od přímky řídící $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$.

Položíme-li $OC=h$, $p=h\cos\varphi$, můžeme rovnici paraboly upraviti takto:

$$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2-2x(\alpha-h\cos^2\varphi)-2y(\beta-h\sin\varphi\cos\varphi)$$
$$+\alpha^2+\beta^2-h^2\cos^2\varphi=0.$$

Parabola tato bude danými body $A(0, c)$, $B(0, -c)$ procházeti, když rovnice určující ordinaty bodů průsečných paraboly s osou Y má kořeny, které jsou rovny pořadnicím $+c$, $-c$ bodů A, B. Rovnici, jež tyto pořadnice stanoví, obdržíme, když do rovnice předešlé položíme $x=0$. Jest tedy

$$y^2\cos^2\varphi-2y(\beta-h\sin\varphi\cos\varphi)+\alpha^2+\beta^2-h^2\cos^2\varphi=0.$$

Z rovnice této plyne dále

(1) $$\beta=h\sin\varphi\cos\varphi,$$

(2) $$\alpha^2+\beta^2-h^2\cos^2\varphi=-c^2\cos^2\varphi,$$

pročež můžeme parabolu P vyjádřiti rovnicí

(3) $$(x\sin\varphi-y\cos\varphi)^2-2x(\alpha-h\cos^2\varphi)-c^2\cos^2\varphi=0.$$

Dosadíme-li rovnicemi (1) a (2) určené hodnoty

$$\cos^2\varphi=\frac{\alpha^2+\beta^2}{h^2-c^2},\quad \sin^2\varphi=\frac{\beta^2(h^2-c^2)}{h^2(\alpha^2+\beta^2)}$$

do rovnice

$$\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1,$$

vyloučíme tím z rovnic uvedených proměnlivý úhel φ, a tak po krátké redukci obdržíme rovnici hledaného geom. místa ohniska $F(\alpha, \beta)$

$$h^2(\alpha^2+\beta^2)^2-h^2(h^2-c^2)(\alpha^2+\beta^2)+\beta^2(h^2-c^2)^2=0,$$

nebo píšeme-li x místo α, y místo β a položíme-li

(4) $$h^2-c^2=a^2,$$

(5) $$h^2(x^2+y^2)^2-a^2h^2(x^2+y^2)+a^4y^2=0.$$

Rovnici tuto, ze které jest již patrno, že geom. místem ohniska jest křivka stupně čtvrtého k osám souřadnic souměrně položená, můžeme ještě upraviti spůsobem následujícím:

Položíme-li v rovnici uvedené $y = o$, budou dvěma vrcholům křivky na ose X příslušeti abscissy $x = + a$, $x = - a$, a podobně dvěma vrcholům křivky v ose Y náležejí pořadnice stanovené rovnicí

$$y^2 = b^2 = \frac{a^2(h^2 - a^2)}{h^2},$$

ze které

$$(6) \qquad h^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2}.$$

Vložíme-li hodnotu pro h^2 obdrženou do rovnice (5), obdržíme po krátkém zjednodušení

$$(7) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2.$$

Touž rovnici obdrželi bychom, kdyby hledati nám bylo průmětnici (úpatnici) ellipsy $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ vzhledem k polu, který jest ve středu této ellipsy. Přicházíme tudíž k výsledku: *Křivka obsahující paty kolmic spuštěných ze středu ellipsy na tečny jest geometrickým místem ohniska paraboly, jež body* A, B *prochází a jejíž přímka řídící otáčí se kolem bodu* C.

Jsou-li dány poloosy a, b ($a > b$) ellipsy a tedy i křivky, lze polohu bodů A, B, C určiti relacemi, které snadno obdržeti lze z rovnic (4) a (6), a sice

$$h = \frac{a^2}{e}, \quad c = \frac{bh}{a}, \quad \text{kdež } e = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Druhá z těchto relací nám praví, že daný trojúhelník ABC jest podoben trojúhelníku určenému dvěma vrcholy osy malé a třetím vrcholem osy velké ellipsy i křivky.

Z rovnice (7) odvozená polární rovnice křivky užitím transformačních vzorců $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$ jest

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega.$$

Považujeme-li pol O soustavy polárné za střed inverse kruhové a $\varrho\varrho' = ab$ za modul, bude náležeti křivce inversní rovnice polární *)

$$\varrho'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega},$$

která značí ellipsu o poloosách a, b. Dodělali jsme se tedy výsledku:

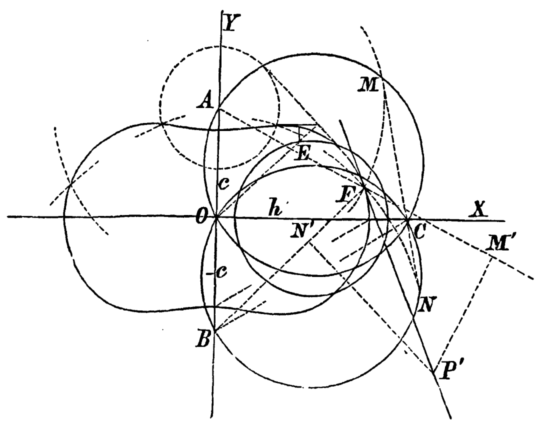
---

*) Viz *Al. Strnad* „O inversi kruhové. Archiv math. a fysiky, II. svazek, str. 128. r. 1877."

Geometrické místo ohniska paraboly jest inversní křivkou ellipsy vzhledem ku středu inverse O a modulu $\varrho\varrho' = ab$.

Je-li dán dotyčný bod F' tečny ellipsy, jež na OF kolmo stojí, jest známo, že průmětnice a kruh jdoucí body OFF' mají v bodu F společnou tečnu, a na tom zakládá se jednoduché *sestrojení* tečny průmětnice.

Nyní podáme jinou konstrukci místa geometrického dle methody Robervalovy,*) jež nevyžaduje sestrojení bodu dotyčného F' ellipsy.



Sestrojme kružnice (AOC), (BOC), a bodem C veďme řídící přímku paraboly P. Přímka tato nechť protíná kruh (AOC) v bodu M a kruh (BOC) v bodu N. Kružnice (A) ze středu A poloměrem AM sestrojená určuje v kružnici (B) sestrojené ze středu B poloměrem BN ohnisko F paraboly P. Zvolíme-li A, B za poly bipolárné soustavy souřadnic a položíme-li

$$AF = AM = \varrho_1, \ BF = BN = \varrho_2, \ AC = BC = m, \ \sphericalangle ACM = \varphi_1$$
$$\sphericalangle BCN = \varphi_2,$$

obdržíme z rovnic

$$\varrho_1 = m \sin \varphi_1, \quad \varrho_2 = m \sin \varphi_2$$
$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = \sin C$$

bipolární rovnici křivky

*) Srovnej: *C. B. Strouhal* „O souřadnicích bipolárných. Druhá zpráva Jednoty českých mathematiků, str. 3, r. 1870." — *Ferd. Kraft* „Analytische Mechanik, erster Band, str. 59, r. 1885."

$$\varrho_1 \sqrt{m^2 - \varrho_2^2} + \varrho_2 \sqrt{m^2 - \varrho_1^2} = m^2 \sin C = k^2,$$

kdež m a k značí hodnoty stálé a ϱ_1, ϱ_2 průvodce proměnné.

Derivujeme-li rovnici poslední dle ϱ_1 a ϱ_2, obdržíme

$$\frac{d\varrho_1}{d\varrho_2} = -\frac{\sqrt{m^2 - \varrho_1^2}}{\sqrt{m^2 - \varrho_2^2}} = -\frac{MC}{CN}.$$

Znaménka odmocnin *řídí se dle* znamének funkcí $\cos \varphi_1$, $\cos \varphi_2$.

Určíme-li tedy v průvodci BF bod N' tak, že FN' = CN, a učiníme-li v průvodci AF nebo v jeho prodloužení FM' = CM, dle toho jsou-li CM a CN směru stejného nebo protivného, budou kolmice vztýčené v bodech M' a N' ku příslušným průvodcům AF a BF protínati se v bodu P', který s bodem F určuje tečnu křivky v bodu F.

Asymptoty křivky lze obdržeti ze známé rovnice

$$\left. \frac{1}{x^{n-1}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \xi + \frac{\partial u_n}{\partial y} \eta + u_{n-1} \right) \right/_{\frac{y}{x}} = 0.\text{*)}$$

V našem případě jest v rovnici (7) $u_n = (x^2 + y^2)^2$, $u_{n-1} = 0$.

Z nejvyššího členu u_n jest patrno, že v každém pomyslném bodu kruhovém v nekonečnu jsou položeny dva body křivky, která za tou příčinou sluje bicirkulárnou křivkou. Rovnice $\frac{u_n}{x_n}$ zní

$$\left[1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right]^2 = 0$$

a má kořeny

$$\frac{y}{x} = \begin{cases} +i & \text{dvakrát} \\ -i & \text{dvakrát.} \end{cases}$$

Dále jest

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = 4(x^2 + y^2)\, x, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = 4(x^2 + y^2)\, y,$$

i náleží asymptotě křivky rovnice

$$\left. \frac{1}{x^3} [4x(x^2 + y^2)\xi + 4y(x^2 + y^2)\eta] \right/_{\frac{y}{x}} = 0,$$

*) Viz článek od Dr. *Em. Weyra* „Určování nekonečně vzdálených prvků útvarů geometrických. Časopis pro pěstování math. a fysiky, roč. I., str. 177, r. 1872.

a po vyloučení společného činitele $4\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$ obdržíme

$$\xi+\frac{y}{x}\eta=0.$$

Pro $\frac{y}{x}=+i$ (dvakrát) dostaneme dvě splývající asymptoty

$$\xi+i\eta=0,$$

a pro $\frac{y}{x}=-i$ (dvakrát) též dvě splývající asymptoty

$$\xi-i\eta=0.$$

Nyní jest patrno, že pomyslné body kruhové v nekonečnu jsou body vratu křivky, a z toho pak, že imaginární asymptoty protínají se v počátku O, soudíme, že bod ten jest ohniskem křivky. Z rovnice (7) mimo to vysvítá, že O též geometrickému místu náleží, a jelikož v jeho nejbližším okolí není žádných realních bodů křivky, jest bodem osamotnělým (isolovaným).

2. Rovnice průměru paraboly, který prochází počátkem O, a jehož krajního bodu E hledáme místo geometrické, jest

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\varphi. \tag{8}$$

Eliminováním proměnlivých parametrů α, β, φ z rovnic (1), (2), (3), (8) obdržíme rovnici geometrického místa bodu E. Z rovnice (8) plyne

$$\sin^2\varphi=\frac{y^2}{x^2+y^2},\qquad \cos^2\varphi=\frac{x^2}{x^2+y^2}. \tag{9}$$

Dále obdržíme z rovnic (3), (8), (9)

$$\alpha^2=\frac{x^2(2hx-c^2)^2}{4(x^2+y^2)^2},$$

a rovnicemi (1), (9) určená hodnota jest

$$\beta^2=\frac{h^2x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

Dosadíme-li hodnoty pro α^2 a β^2 obdržené do rovnice (2), doděláme se po krátké redukci rovnice

$$4(x^2+y^2)-4hx+c^2=0.$$

Geometrickým místem krajního bodu E průměru paraboly, který středem strany AB prochází, jest kružnice mající svůj střed uprostřed výšky OC trojúhelníka ABC a rozpolující každou vzdálenost na ose X mezi vrcholem křivky a bodem C.