Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 4, 182--188

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121168

p_1, p_2 v jediné přímce. Četné další věty tohoto druhu obsahují zobecnění mnohých vlastností transformací kvadratických, jak *Hirstem* (Quarterly Journal, 1881) stanoveny byly.

Dvě nesoumístné soustavy, sdružené spůsobem Cremonovým, zavdávají podnět ku vzniku různých ploch, jimiž zabývali se *Jung* a *Visali* (Atti della reale Accademia dei Lincei, Rendiconti 1885., p. 762, 1886., p. 80). Jsou-li dvě rovinné soustavy Σ a Σ' sdruženy ve stupni n-tém, tvoří spojnice bodů sdružených kongruenci stupně $n + 2$ a třídy n. Buď dán mimo to svazek prostorový s, který je k soustavě Σ v reciproké souvislosti stupně m; t. j. každému bodu soustavy Σ náleží určitá rovina svazku s a naopak, přímé řadě v soustavě Σ přísluší ve svazku s roviny obalující plochu kuželovou třídy m atd. Přímky oné kongruence a příslušné roviny svazku s jsou jednoznačně k sobě přidruženy; každá přímka taková má s příslušnou rovinou společný bod a geometrickým místem všech těchto bodů jest určitá plocha ψ. Plocha tato jest stupně $(m + 1)(n + 1) + 1$, má v bodě s bod $(n + 2)$-násobný a obsahuje křivku dvojnou stupně

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(mn + m + n)(mn + m + n - 1) - \tfrac{1}{2}m(m - 3) + 1.$$

Základní body soustavy Σ a základní přímky svazku s jsou též násobnými body a přímkami plochy ψ, kteráž mimo to má $(m + 1)(n + 1)$ přímek jednoduchých; jsou to ony přímky v kongruenci (Σ, Σ'), kterými procházejí příslušné roviny svazku s. Z vytvoření plochy ψ jest patrno, že lze každému bodu jejímu přiřaditi jediný určitý bod roviny Σ; lze tedy onu plochu transformovati bod za bodem v rovinu Σ aneb v každou jinou, k této kollineárnou.

Úlohy.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Zvolíme-li počátek pravoúhlé soustavy souřadnic v bodu, v němž se koule svislé stěny dotkla, osu X ke stěně kolmo a osu Y svislou, bude rovnice parabolické dráhy

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2c^2 \cos^2 \alpha}.$$

Poněvadž souřadnice (D, —V) rovnici té vyhovují a $\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{D}$, obdržíme rychlost

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^2 + V^2}{V} g}.$$

kdežto z výrazů pro výšku a délku vrhu

$$v = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad d = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$$

nalezneme

$$v = \frac{1}{8} V, \quad d = \frac{1}{2} D.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Frant. Nušl* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Karel Herzán* a *Frant. Štiller* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Josef Vančura* z VIII. tř. v Č. Budějovicích, *L. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi a *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Frant. Nušl*, stud. VIII. tř. v Jindř. Hradci.)

Rychlost koule přibyvší na dolení okraj střechy bude $c = \sqrt{2ag}$, vodorovná její složka

$$b_1 = b\sqrt{\frac{2ag}{a^2 + b^2}}, \text{ svislá } c_2 = a\sqrt{\frac{2ag}{a^2 + b^2}}.$$

Je-li počátek pravoúhlé soustavy souřadnic na dolením okraji střechy, osa X v šířce a Y ve výšce domu, bude pro dobu t

$$x = c_1 t = bt\sqrt{\frac{2ag}{a^2 + b^2}}, \quad -y = c_2 t + \frac{gt^2}{2} = at\sqrt{\frac{2ag}{a^2 + b^2}} + \frac{gt^2}{2}.$$

Vyloučením t z obou rovnic obdržíme

$$y = -\frac{a}{b} x - \frac{a^2 + b^2}{4ab^2} x^2,$$

což jest rovnice paraboly.

Převeďme ji na dobu

$$\left(x + \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}\right)^2 = -\frac{4ab^2}{a^2 + b^2}\left(y - \frac{a^3}{a^2 + b^2}\right)$$

a nabudeme souřadnic vrcholu $m = -\frac{2a^2b}{a^2+b^2}$, $n = \frac{a^3}{a^2+b^2}$,

i poloparametru $p = \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$.

Spustíme-li v pravoúhlém $\triangle$ ABO, jehož odvěsnami jsou AB $= a$, BO $= b$ výšku BC na přeponu, a v povstalém $\triangle$ BCA opět výšku CD na přeponu, plyne z úměry

$$\text{DC} : \text{BC} = \text{AB} : \text{AO}, \text{ že DC} = \frac{a^2b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}m,$$

dále z úměry AD : DC $=$ AB : BO, že AD $= \frac{a^3}{a^2+b^2} = n$,

a konečně z úměry BD : DC $=$ BO : AB, že

$$\text{BD} = \frac{ab^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2}p,$$

čímž nalezeny jsou ke konstrukci potřebné rozměry.

Správné řešení zaslali pp.: *Karel Petr* a *L. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi, *Innocenc Smýkal* ze VI. tř. g. v Litomyšli a *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal p. *Jan Petříček*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Postupným dělením ustanovíme, že čítatel i jmenovatel zlomku daného mají společnou míru $2x - 5$; rovná se tedy zlomek daný

$$z = \frac{(2x-5)(x^2+x-6)}{(2x-5)(4x^2-11x-3)}.$$

Odtud již patrno, že $z = 0$ při

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

t. j. při $x_1 = 2$ aneb $x_2 = -3$.

Aby bylo $z = \infty$, musí býti jmenovatel

$$4x^2 - 11x - 3 = 0, \quad \text{z čehož } x_3 = 3, \; x_4 = -\frac{1}{4}.$$

Je-li konečně $2x - 5 = 0$, nabývá zlomek hodnoty neurčité $\frac{0}{0}$; pravou hodnotu najdeme, kladouce do zlomku zkráceného

$$z = \frac{x^2 + x - 6}{4x^2 - 11x - 3}$$

za x hodnotu $x_5 = 2\frac{1}{2}$. Obdržíme tak $z = -\frac{1}{2}$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Janoušek*, *Lud. Novotný* a *Karel Petr* z VIII. tř. v Chrudimi, *Arnošt Vítek* a *Josef Kutík* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami, *K. A. Klír* ze VII. tř. vyšší real. šk. v Praze, *Frant. Štiller* a *Karel Herzán* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Alois Skalák* z V. tř. a *Bohumil Novák* ze VII. tř. g. v Táboře a *Frant. Žaloudek*, stud. v Praze.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal pan *K. A. Klír*, stud. VII. tř. vyšší real. šk. v Praze.)

V lichoběžníku daném $abcd$ označme půdice $\overline{ab} = a$, $\overline{dc} = b$ a výšku v. Hledaná příčka $\overline{ef} = h$, měj od $\overline{ab}$ vzdálenost x, od $\overline{dc}$ vzdálenost y, tak že

$$x + y = v.$$

Dle tohoto označení jest

$$y : v = (h - b) : (a - b);$$

dle podmínky vyslovené v úloze má býti h harmonickým průměrem délek a, b a musí tudíž vyhověti úměře

$$(a - h) : (h - b) = a : b.$$

Bude proto $\quad y : v = b : (a + b)$,

podobně $\quad x : v = a : (a + b)$,

pročež $\quad x : y = a : b$.

Z toho jde toto sestrojení: stanovme úhlopříčny $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ lichoběžníka daného; jich průsečíkem o jde hledaná příčka $\overline{ef}$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Bohumil V. Dědek* ze VII. tř. české vyšší real. šk. v Praze, *Jan Petříček* a *Josef Kutík* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Karel Petr, Lud. Novotný* a *Karel Janoušek* z VIII. tř. v Chrudimi, *Karel Herzán* a *Frant. Štiller* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Jan Minks* z VIII. tř. v Kroměříži a *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 9.

(Zaslal pan *Siegfried Freund*, stud. VIII. tř. v Novém Bydžově.)

Je-li poloměr koule r a středový úhel kulové výseče α, jest plocha obliny kuželové na této výseči

$$P_1 = \pi r^2 \sin \alpha$$

a plocha vrchlíka $\quad P_2 = 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha)$.

Aby bylo $P_1 = P_2$, obdržíme k určení úhlu α podmínku

$$2(1 - \cos\alpha) = \sin\alpha,$$

kterou lze též psáti

$$\sqrt{1-\cos\alpha}\,[2\sqrt{1-\cos\alpha} - \sqrt{1+\cos\alpha}\,] = 0.$$

Odtud jde buď samozřejmý výsledek $1 - \cos\alpha = 0$ aneb

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1}{2},$$

k čemuž z tabulek najdeme hodnotu

$$\alpha = 53^0 7' 48''.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami, *Karel Janoušek*, *Lud. Novotný* a *Karel Petr* z VIII. tř. v Chrudimi, *Frant. Tomášek* z VIII. tř. g. a *Josef Kutík* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *K. A. Klír*, *Václav Kadlec* a *Boh. V. Dědek* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Josef Stryhal* ze VII. tř. g. v Novém Bydžově, *Jan Minks* z VIII. tř. v Kroměříži, *Karel Herzán* a *Frant. Štiller* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Řešení úlohy 10.

(Zaslal p. *Josef Hříbal*, stud. VIII. tř. r. g. na Malé Straně v Praze.)

Značí-li x výšku hory nad hladinou jezera a y vzdálenost její od věže, jest patrně

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x-v}{y}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{x+v}{y}.$$

Vyloučením y z obou těchto vzorců najdeme

$$x = v\,\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$

čili — ve tvaru vhodnějším k počítání logarithmickému —

$$x = v\,\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Znajíce x vyhledáme pak y dle rovnice

$$y = (x - v)\cot\alpha.$$

Hodnoty dané v úloze vedou k výsledku

$$x = 1175\,m, \quad y = 11\tfrac{3}{4}\,km.$$

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Jan Krejčí* z VIII. tř. v Nov. Bydžově, *Karel Herzán* a *Frant. Štiller* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Jan Minks* z VIII. tř. v Kroměříži, *Frant. Tomášek* z VIII. tř., *Jan Petříček* a *Arnošt Vítek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové, *Boh. V. Dědek* a *Václav Kadlec* ze VII. tř. české real. šk. v Praze, *Lud. Novotný*, *Karel Petr* a *Karel Janoušek* z VIII. tř. v Chrudimi, *Karel Volný* a *Otakar Trnka* ze VI. tř. r. v Pardubicích a *Frant. Šoreys* ze VI. tř. g. v Příbrami.

Řešení úlohy 11.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Buď AB průměr daného kruhu, a v bodu A sestrojená tečna nechť obsahuje body A, P, M.

Ježto

$$\sphericalangle OAP = AOP = \alpha, \quad \sphericalangle POM = OMP = \beta,$$

obdržíme z trojúhelníku AOM

$$2\alpha + 2\beta = 180^0,$$

tedy $$\sphericalangle AOM = 90^0.$$

Poněvadž jest též $\sphericalangle AOB = 90^0$, leží body M, O, B v jedné přímce. Sestrojme nyní kruh s daným shodný a dotýkající se ho v bodu O. Budiž $OS \perp OP$ průměrem tohoto nového kruhu; přímka OM seče jej v bodu U a tečnu bodu S protíná v bodu V. Ze shodných trojúhelníků AOM a SUV plyne

$$OM = UV,$$

čímž dokázáno, že geometrickým místem bodu M jest cissoida.

Správné řešení zaslali pp.: *Lud. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi a *K. V. Klír* ze VII. tř. vyšší real. šk. v Praze.

Řešení úlohy 12.

Nejprv lze snadno dokázati, že tečna sestrojená v O ke kruhu danému půlí délky AM a BN. Jestiť totiž $AP = OP$, a poněvadž $\sphericalangle MOP = OAB = OMP$, také $MP = OP$, pročež

$$AP = PM.$$

Dle předešlé úlohy jest měřickým místem bodu M cissoida, a táž křivka jest geometrickým místem bodu N. Bod O jest bodem úvratu této cissoidy. Známo však, že cissoida jest geometrickým místem pat kolmic spuštěných s vrcholu paraboly k její tečnám. Vztyčíme-li tedy kolmice $MR \perp OM$, $NR \perp ON$, jsou tyto tečnami paraboly, jejímž vrcholem bod O. Ježto pak dvě kolmé tečny paraboly protínají se na přímce řídící, jest měřickým místem bodu R přímka, a ježto $OQ = \frac{1}{2} OR$, jest také geometrickým místem bodu Q přímka a sice rovnoběžná s tečnou v bodu O.

Správné řešení úlohy této podali pp.: *K. A. Klír* ze VII. tř. vyšší real. šk. v Praze, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* z VIII. tř. v Chrudimi a *Frant. Šorejs* ze VI. tř. g. v Příbrami.

Úloha 22.

Budiž odůvodněna stejnina

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \equiv (a+b+c-abc)^2 + (ab+ac+bc-1)^2.$$

Dr. *Std.*

Úloha 23.

Vyloučiti úhel α z rovnic

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = a\sqrt{\sin 2\alpha}$$

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = -\frac{a \cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}}.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 24.

Sestrojiti příčku, která dělí trojúhelník ve dvě části stejného obvodu i stejného obsahu. Vyšetřiti, kterými podmínkami jest řešení úlohy této omezeno.

Týž.

Úloha 25.

Dán jest kužel kruhový kolmý a v základně jeho tětiva, k níž přísluší středový úhel 2α.

Tětivou touto prochází rovina protínající výšku kužele v určitém bodě a oblinu v oblouku parabolickém. Ustanoviti plochu vzniklého tak řezu a obsah obou dílů, v něž rovina sečná kužel dělí. V kterém poměru jsou tyto díly při $\alpha = 60^\circ$?

Týž.

Úloha 26.

Které jest geometrické místo těžiště v trojúhelníku rovnoramenném, jehož témě jest stálé a druhé dva vrcholy leží na dvou daných, vzájemně kolmých přímkách?

Týž.
