Pro tuto jest rovnice assymptoty

$$x = q,$$

rovnice příslušné kuželosečky pak:

$$x^2 + y^2 - qx = 0,$$

kteráž jest v tomto případě kružnicí.

III. Má-li rovnice (4) všechny kořeny realné splývající, je-li tedy

$$a + bu + cu^2 + u^3 = (u - \alpha)^3 = 0,$$

při čemž α jest kořen této rovnice, jest

$$x = \frac{A_1}{u - \alpha} + \frac{A_2}{(u - \alpha)^2} + \frac{A_3}{(u - \alpha)^3}.$$

Význam prvého a druhého členu pravé strany jest jasný, třetí člen jest hodnotou úsečky průseku přímky (2) s křivkou:

$$(y - \alpha x)^3 = A_3 x^2,$$

kteráž jest stupně třetího. V případě tomto jest konstrukce methodou v předchozím vysvětlenou nemožna, neboť vedle útvaru linearného a kvadratického nutno použiti k sestrojení i útvaru kubického, o jehož sestrojení se však právě jedná.

O rozkladu čísel v součet deseti a dvanácti čtverců.

Napsal

Dr. Karel Petr.

Jedna ze zajímavých úloh theorie čísel jest otázka, kolikrát lze dané číslo celé jakožto součet několika čtverců čísel celistvých vyjádřiti, t. j. jinými slovy, kolik řešení v číslech celých

$x_1, x_2, \ldots x_\nu$*) má rovnice

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2 = N,$$

kde ν a N jsou daná čísla celá. Tato úloha jest různě nesnadná dle toho, je-li ν — počet to čtverců, jichž součet má dáti N — číslo sudé anebo liché. V případě prvém lze úlohu úplně a s výsledky velmi jednoduchými řešiti pro ty případy, že počet čtverců $\nu = 2, 4, 6, 8$. Vysvětluje se to tím, že počet tříd forem kvadratických positivních při diskriminantu 1 jest rovný jedné, když počet proměnných není větší než 8; když počet proměnných jest větší než 8, může býti a jest asi tříd více (o diskriminantu 1).**)

Avšak i pro $\nu > 8$ lze úlohu svrchu vytčenou pro některé případy alespoň z části řešiti. Tak udává již Eisenstein větu pro rozklad čísel tvaru $4k + 3$ v deset čtverců***) a Liouville†) pak ustanovil jednoduše počet rozkladů jakéhokoliv čísla v deset čtverců. V jiném článku††) uvádí pak Liouville větu pro rozklad dvojnásobného čísla lichého ve dvanáct čtverců. Tyto věty nebyly, pokud mi známo, dokázány a bývají jako nedokázané uváděny. Chci v následujícím na to poukázati, že jest snadno je jakožto důsledky známých rozvojů pro funkce elliptické odvoditi, při čemž, když $n = 12$, dostaneme rozklad každého čísla sudého. (Že věty pro rozklad čísel ve 2, 4, 6, 8 čtverců z rozvojů elliptických funkcí plynou, jest obecně známo.)

Pro thetafunkce bude užito tohoto označení:

---

*) Při tom mohou býti, jak v následujícím předpokládáme, $x_1, x_2 \ldots$ čísla kladná i záporná a i hodnoty nullové pro ně jsou přípustné.

**) Srovnej Extraits de lettres de M. Ch. Hermite a M. Jacobi sur diff. objets de la théorie des nombres, Crelle's Journal, Bd. 40, str. 285; Eisenstein, Mathematische Abhandlungen, str. 195.

***) Eisenstein, Math. Abhandlungen, l. c.

†) Liouville, Nombre des représentations d'un entier quelconque sous la forme d'une somme de dix carrés, Journ. pour math. pure et appl., II série, 11. svaz., str. 1.

††) Liouville, Journal pour math. pure et appl., II sér., 5. svazek, str. 143.

$$\Theta(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi v - \dots$$
$$\Theta_1(v) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi v + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi v + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi v + \dots$$
$$\Theta_2(v) = 1 - 2q^1 \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v - 2q^9 \cos 6\pi v + \dots$$
$$\Theta_3(v) = 1 + 2q^1 \cos 2\pi v + 2q^4 \cos 4\pi v + 2q^9 \cos 6\pi v + \dots$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 nechť pak značí hodnoty příslušných thetafunkcí pro $v = 0$; Θ', Θ''' hodnoty první, třetí derivace první z těch funkcí pro $v = 0$, atd.

Funkce

$$T_\alpha(v) = \Theta_\beta \Theta_\gamma \frac{\Theta_\alpha(v)}{\Theta(v)},$$

jest funkce dvojperiodická *) (druhého druhu o periodách 1, τ); při tom znamenají α, β, γ tři různá čísla rovná až na pořádek číslům 1, 2, 3. Pro derivaci této funkce jest tento jednoduchý vzorec

$$T'_\alpha(v) = -\pi T_\beta(v)\, T_\gamma(v).$$

V následujícím jsou nám potřebny hodnoty funkce $T_\alpha(v)$ pro poloviny period; dostáváme snadno

$$T_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \Theta_3^2, \qquad T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \Theta_2^2,$$
$$T_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\Theta_3^2, \qquad T_2\left(\frac{\tau}{2}\right) = 0, \qquad T_3\left(\frac{\tau}{2}\right) = -i\Theta_1^2,$$
$$T_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = -i\Theta_2^2, \quad T_2\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = \Theta_1^2, \quad T_3\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = 0.$$

Rozklad čísel v deset čtverců. Čtvrtá derivace funkce $T_\alpha(v)$, jak snadno lze vypočíst pomocí svrchu uvedeného vzorce, jest

$$T_\alpha^{(IV)}(v) = \pi^4 T_\alpha(v)\left[T_\beta^4(v) + T_\gamma^4(v) + 14\, T_\beta^2(v) T_\gamma^2(v)\right]$$
$$+ 4\pi^4 T_\alpha^3(v)\left[T_\beta^2(v) + T_\gamma^2(v)\right].$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu za v poloviny period, zjednáme

*) V jiném označení jest, jak známo

$$T_\alpha(v) = \frac{2\omega_1}{\pi}\sqrt{\wp(u) - e_\alpha}\,; \quad u = 2\omega_1 v, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

si ihned tyto výsledky

$$T_2^{(IV)}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^4(\Theta_2^8\Theta_3^2 + 4\,\Theta_3^6\Theta_2^4),$$

$$T_1^{(IV)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = -2\,\pi^4(\Theta_1^8\Theta_3^2 + 4\,\Theta_1^4\Theta_3^6).$$

K těmto dvěma rovnicím stačí přibrati známou formuli*)

$$\frac{\Theta_3^{(IV)}}{\Theta_3} - 3\frac{\Theta_3''^2}{\Theta_3} = \pi^4\Theta_1^4\Theta_2^4$$

anebo jinak

$$\Theta_3^{(IV)}\Theta_3 - 3\,\Theta_3''^2 = \pi^4\Theta_1^2\Theta_2^4\Theta_3^2.$$

Snadnou kombinací těchto tří rovnic plyne vzhledem ku vztahu $\Theta_1^4 + \Theta_2^4 = \Theta_3^4$ tento výsledek

$$T_2^{IV}\left(\frac{1}{2}\right) + iT_1^{(IV)}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2(\Theta_3^{(IV)}\Theta_3 - 3\,\Theta_3''^2) = \pi^4 . 5\,\Theta_3^{10},$$

kterýmžto vztahem náš úkol jest řešen. Neboť

$$\Theta_3 = \Sigma q^{k^2}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

a tedy Θ_3^{10} jest dáno řadou postupující dle mocnin čísla q a koefficient n-té mocniny tohoto čísla nám udává, kolikrát toto číslo n lze rozložiti v 10 čtverců způsobem svrchu podrobněji vytčeným. Na levé straně pak jsou výrazy, jež lze snadno jakožto řady mocninné vyjádřit na základě rozvojů funkcí elliptických známých již z „Fundamenta nova" (str. 101 a násl.).

K vůli jednoduššímu výpočtu mějme ještě na mysli, že

$$T_2^{(IV)}\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\Theta_1\Theta_3\,\frac{\Theta_3(v)}{\Theta_1(v)}\right]_{v=0}^{(IV)}, \quad iT_1^{(IV)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \left[\Theta_2\Theta_3\,\frac{\Theta_3(v)}{\Theta_2(v)}\right]_{v=0}^{(IV)}.$$

Máme pak snadno

$$\frac{1}{\pi^4}\,T_2^{(IV)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5} + 4\sum_m \frac{(-1)^m\,(2m+1)^4 q^{2m+1}}{1 - q^{2m+1}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

*) Viz na př. Tannery-Molk. Fonctions elliptiques, t. II, str. 260.

$$\frac{i}{\pi^4} T_1^{(IV)}\left(\frac{\tau}{2}\right) = 4\sum_m \frac{(2m)^4 q^m}{1+q^{2m}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$\frac{1}{\pi^4}(\Theta_3^{(IV)}\Theta_3 - \Theta_3''^2) = \Sigma(x^4 - 3x^2y^2)q^{x^2+y^2}, \quad x, y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Z těchto výsledků plyne ihned: Počet rozkladů čísla $n = 2^\lambda N$ v deset čtverců jest,

1. jestliže $N \equiv 3 \pmod 4$,

$$P_{10}(n) = \frac{4}{5}(2^{4\lambda+4} - 1)\Sigma(d^4_{4k+3} - d^4_{4k+1}),$$

kde d jsou dělitelé čísla N a to d_{4k+3} dělitel shodný s 3 (mod 4) a d_{4k+1} dělitel $\equiv 1 \pmod 4$;

2. jestliže $N \equiv 1 \pmod 4$,

$$P_{10}(n) = \frac{4}{5}(2^{4\lambda+4} + 1)\,\Sigma(d^4_{4k+1} - d^4_{4k+3}) + \frac{16}{5}\Sigma(x^4 - 3x^2y^2),$$

kde prvé znaménko součtové vztahuje se na všecky dělitele čísla N, jichž označení již vyloženo, a druhé znaménko součtové se vztahuje na všecka celistvá (kladná, záporná, po případě i nulle rovná) x, y hovící rovnici

$$x^2 + y^2 = 2^\lambda N.$$

Rozklad čísel ve 12 čtverců. Tu vezmeme v úvahu funkci

$$p(2\omega_1 v) = e_\alpha + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 T_\alpha^2(v).$$

Její čtvrtá derivace jest

$$p^{(IV)}(2\omega_1 v) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \cdot 8[T_1^4(v)\,T_2^2(v) + T_1^4(v)\,T_3^2(v) + T_2^4(v)\,T_1^2(v)$$
$$+ T_2^4(v)T_3^2(v) + T_3^4(v)T_1^2(v) + T_3^4(v)T_2^2(v) + 9\,T_1^2(v)T_2^2(v)T_3^2(v)].$$

Do tohoto výrazu dosadíme

$$v = \frac{1}{2}, \qquad v = \frac{1}{2}\tau, \qquad v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2},$$

čímž dostaneme

$$p^{(IV)}(\omega_1) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 8\,(\Theta_3^8\,\Theta_2^4 + \Theta_2^8\,\Theta_3^4),$$
$$p^{(IV)}(\omega_2) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 8\,(-\Theta_1^8\,\Theta_3^4 - \Theta_3^8\,\Theta_1^4),$$
$$p^{(IV)}(\omega_3) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 8\,(\Theta_2^8\,\Theta_1^4 - \Theta_1^8\,\Theta_2^4).$$

Z těchto rovnic plyne ihned se zřetelem ku vztahu

$$\Theta_1^4 + \Theta_2^4 = \Theta_3^4,$$

$$2p^{(IV)}(\omega_1) - p^{(IV)}(\omega_2) - p^{(IV)}(\omega_3) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 .\, 16\,[\Theta_3^{12} + \Theta_2^{12}]$$

a z tohoto vztahu, jak patrno, lze odvoditi počet řešení rovnice

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{12}^2 = 2n,$$

kde n jest libovolné číslo celé. Výrazy na levé straně dostaneme snadno ve příhodném tvaru, dosadíme-li do známých rozvojů trigonometrických funkcí $p\,(u + \omega_1)$, $p\,(u + \omega_2)$, $p\,(u + \omega_3)$ za $u = 2\omega_1 v = 0$.

Tak dospějeme konečně ku rozvoji

$$\Theta_3^{12} + \Theta_2^{12} = 2 + 16\,\Sigma\frac{(2m)^5\,q^{2m}}{1 - q^{4m}} - 16\,\Sigma\frac{(-1)^m\,m^5\,q^{2m}}{1 - q^{2m}},$$
$$m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

ze kteréhožto rozvoje plyne: Počet rozkladů čísla $n = 2^{\lambda+1} N$ (N číslo liché) ve dvanáct čtverců jest

$$P_{12}(n) = 24\,\frac{10 \,.\, 2^{5\lambda+5} + 21}{31} \,.\, \Sigma d^5,$$

při čemž znaménko součtové se vztahuje na všecky dělitele d čísla N.