August Seydler

O rovnovážných tvarech kapalin nepodrobených silám zevnějším

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 1, 10--19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121155

stran byla půda pro tento rozhodný krok připravována. I smíme tvrditi, že v druhé polovici sedmnáctého století visel počet infinitesimalní již ve vzduchu, takže by jiný byl jej zachytil, kdyby jmenovaní dva geniové tohoto věku jej byli neobjevili.

(Pokračování.)

O rovnovážných tvarech kapalin nepodrobených silám zevnějším.

Dle Plateau-a vzdělal

Dr. **August Seydler.**

Volný povrch kapaliny, uzavřené v široké nádobě, tvoří rovinu, která jen na kraji, u stěny nádoby, přechází v plochu zakřivenou; ostatní povrch závisí tvarem svým úplně od vnitřního tvaru nádoby.

Jinak ale umístíme-li na př. malé množství rtutě na desku skleněnou; rtuť se nerozplyne na celém povrchu desky, nýbrž nabude tvaru kulovitého, a to s přesností tím větší, čím menší jest množství rtutě. Z těchto a jiných všeobecně známých ukazů soudíme, že hledí každá kapalina nabýti určitého tvaru, na základě jakýchsi *vnitřních sil,* že však jí v tom překáží *tíže,* mimo kterou mohou působiti ovšem i jiné *zevnější síly* co překážky další. Plateau zamezil velmi jednoduchým způsobem vliv sil zevnějších, zejmena tíže. Smísil vodu s líhem v takovém poměru, že měrná váha smíšeniny rovnala se úplně měrné váze oleje olivového, jejž pomocí ruční stříkačky vpravil dovnitř oné smíšeniny. Olej zbavený své tíže nabyl tvaru úplně pravidelné koule, která co krůpěj obrovských rozměrů se vznášela uvnitř tekutiny lihové. Tento nesčíslněkrát opakovaný pokus jest všeobecně znám; méně známy jsou však ostatní četné, mnoholeté pokusy, jež *Plateau* a před ním i po něm jiní fysikové vykonali k proskoumání různých tvarů rovnovážných a jich vlastností. Velmi zajímavé výsledky těchto bádání uveřejnil *Plateau* r. 1873 v silném dvousvazkovém díle: Statique experimentale et théorique des liquides, soumis aux seules forces moléculaires; i zavděčíme se tuším čtenářům svým, podáme-li zde přehled těch výsledků, které zvláště zajímavostí vynikají.

Čelní mathematikové (mezi nimi *Laplace, Poisson* a *Gauss*) obírali se rozborem vnitřních sil kapalin. *Laplace* dospěl k následujícímu výsledku, jenž jest vychodištěm všeho dalšího bádání:

„Následkem vzájemné přítažlivosti částic kapaliny působí na povrch jejich v každém bodu určitý tlak. Tlak ten můžeme stanoviti následovně. Proložme oním bodem povrchu dvě k sobě kolmé roviny. Každá tato rovina protíná plochu povrchu v určité křivce, jejíž poloměr křivosti má určitou hodnotu, v rovině první třeba R_1, v druhé R_2. Pak jest tlak na povrch tekutiny v onom bodu působící vyjádřen výrazem

$$P + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

P a A znamenají určité konstanty, jejichž hodnota závisí na povaze kapaliny; poněvadž pak pro rovinu jest $R_1 = R_2 = \infty$, znamená P tlak na povrchu tekutiny, tvoří-li povrch ten rovinu. Výraz pro tlak znamená velkost jeho na jednotku plochy, kdyby na tuto působil vesměs týž tlak jako v daném bodu.“

Vzhledem k součtu $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ platí slavná poučka *Eulerova,* že nezávisí od polohy obou k sobě kolmých rovin; můžeme tedy voliti za tyto roviny oba *hlavní řezy,* t. j. ony roviny, jichž průřezy s plochou jsou křivky mající mezi všemi průřezy tímtéž bodem vedenými *největší* a *nejmenší poloměr křivosti.* Veličiny R_1 R_2 mohou nám tedy značiti právě tyto dva poloměry.*)

Nepůsobí-li na kapalinu žádné jiné síly vyjma tento tlak povrchový, vznikající vzájemným působením nejmenších částic, jest snadno vyvoditi podmínku rovnováhy kapaliny. Jest patrně nutné, aby tlak na povrch kapaliny byl předně všude kolmý

---

*) Uvedený výraz pro tlak možno odůvodniti úvahami velmi elementarnými; pro nedostatek místa jich neuvádím, nýbrž odkazuju na učební knihy fysiky, na př. Wüllner. Experimentalphysik, (II. vydání) I sv. str. 259 a následujících.

a za druhé všude stejně velký. První podmínce jest již o sobě vyhověno, a druhá podmínka vede k rovnici:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = C,$$

v níž C jest určitá stálá veličina.

Této rovnici musí vyhověti každá plocha, má-li tvořiti povrch kapaliny nepodrobené tíži a nalezající se v rovnováze. Jelikož jest rovnice ta differencialní rovnicí druhého stupně s částečnými differencialními poměry, bude nekonečně mnoho takových ploch možných. Musíme se zde obmeziti jen na vyšetření některých nejzajímavějších; zejmena položíme si otázku, které z nich jsou *rotační.*

V tomto případě jest jedním poloměrem křivosti (R_1) poloměr křivosti *(M)* křivky, jejímž otáčením rotační plocha vzniká; druhým poloměrem *(R_2)* jest pak délka normaly *(N)* této křivky, obsažená mezi křivkou a osou otáčecí a základní podmínka rovnováhy promění se v rovnici:*)

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C$$

---

*) Volíme-li osu rotační za osu souřadnic y, obdrží rovnice ta, vyjádřená obyčejným spůsobem, tvar

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = C. -$$

Násobíme-li rovnici tu veličinou xdx a integrujeme-li, obdržíme

$$\frac{x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{Cx^2}{2} + C'. -$$

Tuto rovnici převedl *Beer* na tvar následující

$$dy = \frac{x^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_1{}^2 - x^2)(x^2 - \alpha^2{}_2)}}\, dx,$$

kde místo C, C' zavedeny nové konstanty α_1 α_2; integrace této vede k výrazu

$$y = \alpha_2\left[E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\varphi . k)\right] \pm \alpha_1\left[F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F(\varphi, k)\right]$$

v kterém znamenají F a E elliptické integraly prvního a druhého druhu; modul k určen rovnicí

Jedno rozřešení této rovnice poskytuje pokus bezprostředně; jest to *koule*, pro kterou skutečně $M = N$ konstantou jest. Změníme-li tvar olejové koule v líhové tekutině jakýmkoli spůsobem, nabude celá hmota po několika oscillacích opět tvaru pravidelné koule, aneb se rozpadne ve více částí, z nichž každá se stane koulí. Z toho dlužno souditi, že koule jest jediným tvarem rovnovážným pro konečné množství hmoty úplně volné.

Ostatní plochy vyhovující oné základní rovnici šíří se do nekonečna, i není tudíž lze je bezprostředně vytvořit. Z rotačních ploch vyskytují se co řešení této rovnice ihned dvě plochy do nekonečná jdoucí: *rovina* a *kruhový válec;* pro první jest $M = N = \infty$, $C = 0$, pro druhou $M = \infty$, $N = r$, $C = \frac{1}{r}$ kdež jest r stálý poloměr válce. Obě plochy jdou do nekonečna. Mysleme si nyní válec kruhový vytvořený z kapaliny zbavené tíže, a jdoucí do nekonečna; mysleme si dva kolmé na osu řezy proměněny v pevnou látku, tak že mezi těmato pevnýma deskama se nachází konečná část válce, vliv molekularných sil obou desek sahá jen do velmi malé vzdálenosti, a může tudíž jen na tuto malou vzdálenost změniti tvar válce; ostatní část zůstane pod vlivem týchž sil jako prvé a zůstane tudíž v rovnováze. Tímto spůsobem podaří se nám, vytvořiti ne sice celý (nekonečný) válec kapalný, ovšem ale konečnou část jeho; a podobného prostředku budeme moci upotřebiti na každou jinou plochu rovnovážnou. Pomocí vhodně volených pevných soustav (desek, válců, křivek z drátu sestrojených) vytvoříme vždy část hledané plochy.

Pomůcky experimentalní, jichž *Plateau* upotřebil k vyšetření rotačních ploch rovnovážných, jsou tudíž velmi jednoduché:

$$k = \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2}},$$

amplituda φ rovnicí

$$\varphi = arc\,sin \sqrt{\frac{\alpha_2^2 - x^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}}$$

Další diskusse této rovnice vede k týmž výsledkům, jako Plateau-ova methoda geometricko-experimentalní; zde budiž pouze ještě připomenuto, že rovnice uvedená naznačuje dva hlavní druhy křivek dle toho, volíme-li v pravo znamenko jednou kladné, jednou záporné.

nádoba opatřená rovnými skleněnými stěnami, nálevka a ruční stříkačka, několik z drátu neb z plechu zhotovených kruhů a desek, tekutina lihová a olej olivový. Vizme nyní kterak dospěl k rozřešení dané sobě otázky.

Nejprv ukázal jednoduchými úvahami geometrickými, že poledníková křivka*) rotační plochy rovnovážné buď osu rotační vůbec neprotíná neb ji protíná *jen* v úhlu pravém. V druhém případě ukázal dále, že pak tato křivka může býti jen kružnicí (přímka kolmá k ose jest jen zvláštním případem). Mají tedy, mimo kouli a rovinu, veškeré ostatní rovnovážné plochy rotační tu vlastnost, že jejich poledníkové křivky se nalezají úplně po jedné straně osy, jdouce buď do nekonečna, neb ne; v posledním případě vznikají *plochy prstenovité.* Z ploch, které v prvním případě vznikají, jest plochou nejjednodušší *válec;* pozdržme se chvíli u něho.

Obr. 1. znázorňuje nám spůsob, jakým *Plateau* válec takový vytvořil. Místo desek upotřebil dvou kruhů z drátu zhotovených, z nichž jeden opatřen jest drátěnými nožičkami, jimiž se postaví na dno nádoby naplněné rozředěným líhem; druhý upevněn jest pomocí držátka kolmo nad prvním. Mezi oba kruhy vpraví se dostatečné množství oleje, načež se kruh druhý pomocí svého držátka vzdaluje od prvního tak dlouho, až se mezi nimi utvoří zcela pravidelný válec. Plochy, jimiž jest válec nahoře a dole omezen, nejsou však roviny, nýbrž kulové úseky, jichž poloměr jest dvakráte větší než poloměr základní kružnice válce. To následuje bezprostředně ze základní podmínky, neboť výraz

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$$

jest pro válec $= \frac{1}{r}$, pro kouli $= \frac{2}{\varrho}$; jsouli oba výrazy stejné, musí býti $\varrho = 2r$ (ϱ poloměr koule, r poloměr válce).

Budiž ještě podotknuto, že nesmí býti výška válce větší než obvod základní kružnice, má-li válec podržeti svůj tvar; opačném případě jest totiž válec vždy ještě tvarem rovnovážným, ale rovnováha její není stálá, jest *vratká*, tak že nejmenší defor-

*) To jest křivka, jejímž otáčením vzniká plocha rotační.

mace, která vlivem proudění v lihové tekutině neb z podobných tomu příčin vždy povstati může, stále pokračuje a tvar válce mění, až týž ve dvě neb více částí se rozpadne. Onen poměr délky válce k průměru, rovnající se číslu π, stanovil *Plateau* jednak empiricky na základě četných pokusů, jednak theoreticky, a ukázal zároveň, že takové případy vratkých rovnovážných tvarů se velmi zhusta vyskytují, o čemž při jiné příležitosti obšírněji pojednáme; nyní obraťme se opět k vlastnímu předmětu těchto úvah.

Jestliže v případě naznačeném v obr. 1. přidáváme pozorně oleje k obsahu válce, aneb jestliže při nezměněném množství hořejší kruh o něco spustíme, nemůže válec dále zůstati tvarem povrchu oleje, nýbrž povrch ten nabude tvaru znázorněného v obr. 2. Tvar ten bude zajisté částí křivé plochy vznikající otáčením křivky, která se skládá z nekonečně mnoha stejných částí; průřez větší části této plochy ukazuje obr. 3. v zmenšených rozměrech (*ab* jsou v obr. 2. a 3. příslušné části). Že tomu jest skutečně tak, ukazuje *Plateau* jednoduchými úvahami geometrickými, jimiž jest vyloučena možnost, že by tvar křivky poledníkové mohl býti v tom případě jiný nežli onen tvar vlnitý; a právě pro týž tvar nazývá *Plateau* onu plochu rovnovážnou *onduloidem.*

Rovnost výrazu $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ jest docílena při onduloidě tím, že pro minimum vzdálenosti křivky poledníkové od osy (mezi body *c*, *d* obr. 3.) jest výraz $\frac{1}{N}$ sice velmi velký, za to však výraz $\frac{1}{M}$ záporný (t. j. plocha na zevnějšek ve směru křivky poledníkové vydutá, a jen ve směru rovnoběžníku vypuklá), kdežto pro maximum vzdálenosti (mezi body *a*, *b* obr. 3.) jsou oba výrazy $\frac{1}{N}, \frac{1}{M}$ menší však kladné (plocha v obou směrech vypuklá).

Onduloidů jest (jako na př. ellipsoidů) nekonečné množství; čím menší jsou rozdíly mezi maximem a minimem vzdálenosti křivky poledníkové od osy, tím více se plocha blíží tvarem svým válci (obr. 4.), čím větší naopak ony rozdíly, tím více se onduloid blíží řadě stejně velkých koulí (obr. 5.) Jest tedy válec určitým druhem onduloidu, koule pak částí jiného druhu onduloidu. Má však tvar onduloidu ještě třetí limitu, o které nabudeme názoru následujícím spůsobem.

Místo co bychom v případě válce (obr. 1.) oleje přidávali, ubírejme ho opatrně pomocí ruční stříkačky; v prostřed stane se pak válec užším a promění se v onu část onduloidu, jejímž středem jest minimum vzdálenosti od osy (*cd* obr. 3.). Pokud jest dolejší a hořejší konec útvaru omezen úsekem kulovým, jest skutečně, jak z jednoduchých geometrických úvah plyne, vznikající tvar rovnovážný určitým onduloidem. Můžeme toho však při opatrném provedení pokusu docíliti, že se ubere právě tolik oleje, mnoholi je zapotřebí, by plocha na obou koncích zakončena byla rovinou (obr. 6.) V případě tom jest na obou koncích útvaru $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = 0$, musí tedy plocha rovnovážná vyhovovati téže rovnici, t. j. musí býti $M = -N$, t. j. poloměr křivosti křivky poledníkové musí se rovnati délce normaly, míti však směr opačný. Touto vlastností vyniká však jak známo *řetězovka,* křivka, kterou tvoří úplně ohebné stejnoměrně hutné, tíži podrobené vlákno, a která vyhovuje rovnici:

$$x = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right)$$

Plocha rovnovážná musí v tomto případě (obr. 6.) býti část plochy vytvořené otáčením řetězovky kolem osy, kterouž plochu *Plateau* nazval *katenoidem.* Bezprostředně před docílením této plochy byla patrně plochou rovnovážnou část onduloidu, jehož největší vzdálenost od osy jest velmi velká, jakož i délka jedné vlny. Můžeme tedy říci, že jest katenoid onduloidem, jehož vlna nekonečně jest dlouhá a maximum vzdálenosti též nekonečné; zde máme tedy třetí limitu onduloidu.

Řetězovky jsou mezi sebou vesměs podobné, tudíž i katenoidy, jichž tvar se tedy nemůže měniti jako tvar onduloidů. Aby se pokus zdařil, nesmí poměr vzdálenosti obou kruhů a jich průměru býti větší než $^2/_3$, při větší vzdálenosti se útvar olejový rozpadne ve dvě části dříve než nabyl podoby katenoidu.

Je-li vzdálenost obou kruhů ještě menší, obnáší-li na př. jen třetinu průměru, můžeme v odstraňování oleje z útvaru našeho pokračovati ještě dále, takže obě základnice budou opět úseky kulovými, jichž dutina však obrácena na zevnějšek (obr. 7. průřez). Při postupném odstraňování tekutiny mohlo by se však přihoditi, že by oba úseky vrcholemi svými se dotkly: pak proměnil by se útvar náhle v blánu kapalnou, spojenou s oběma kruhy pomocí zbyvajícího oleje. Aby se tomu předešlo a oblina útvaru pohodlně se při změnách svých prozkoumati mohla, jest rádno upotřebiti kruhových desek umístěných podobně jako ony dříve upotřebené dráty kruhové.

Vzhledem k nově vzniklé ploše jest nyní nejdůležitější poznámka ta, že jest součet $\frac{1}{M} + \frac{1}{N}$ pro tuto plochu záporný, poněvadž základní plochy vyduté jsou, že tedy naše plocha nemůže nyní býti jakýmsi druhem onduloidu, neboť u tohoto jest onen součet vždy kladným, a rovná se jen v mezních případech katenoidu a roviny nule. Několik úvah geometrických vedou podobně jako v dřívějších případech k tomu výsledku, že oblina našeho útvaru jest částí plochy, která vzniká otáčením se nové křivky kolem osy; tato křivka skládá se z nekonečně mnoha částí protínajících se v úzlech na spůsob vyobrazený v č. 8., pročež Plateau novou plochu nazval *nodoidem.* Část vznikající při našem pokusu přísluší části křivky *ab.* Můžeme však též vytvořiti plochu vznikající otočením části *cd.* K tomu cíli vytvoříme mezi oběma deskama nejprv třeba válec, načež hořejší desku pohyblivou pomalu dolů pošinujeme. Při tom zaměňuje se útvar náš na různé onduloidy, až při určité vzdálenosti se stane kulovým pásem; toť nejkrajnější mez onduloidů, tak že při dalším spouštění hořejší desky útvar vždy více a více vypuklý přestává býti onduloidem, i lze dokázati, že se stává nodoidem, vlastně řadou měnících se nodoidů. Zakřivení této plochy jest ovšem kladné, dlužno však uvážiti, že se kapalina nalezá nyní na opačné straně plochy, následkem čehož se mění též označení křivosti.

Co se mezních tvarů nodoidů týče, vyskytuje se nejprv bezprostředně *katenoid,* který stojí na rozhraní mezi onduloidy a nodoidy. Jest-liže se zakřivení řetězovky co poledníkové křivky ve vrcholu jejím o něco málo zmenší, vznikne křívka vlnitá, která vzdálivši se dostatečně od osy opět se k ní blíží, a otočením jejím onduloid; jest-liže se zakřivení to o něco málo zvětší, ohnou se tím obě větve řetězovky tak, že (ovšem ve vzdálenosti velmi velké) se protnou, vzniká tedy otočením nodoid.

Druhý mezní tvar vychází na jevo při druhém spůsobu vytvoření nodoidů, kde opět na rozhraní mezi onduloidy a nodoidy se vyskytuje *koule*, či vlastně nekonečná řada stejně velkých v bodech osy se dotýkajících koulí. Jak z obr. 9. patrno, blíží se tvar poledníkové křivky skutečně řadě polokruhů dotýkajících se a majících střed na ose.

Myslíme-li si, že nejmenší vzdálenost nedoidu od osy stále roste a délka jednoho uzlu při tom se nemění, shledáme, že tvar jednoho listu (*abc*, obr. 8.) vždy více se blíže kruhu v nekonečné vzdálenosti mění se v kruh dokonalý. Z toho následuje, že třetí mezní tvar nodoidů jest plocha prstenovitá, vytvořená otočením kružnice nekonečně vzdálené, čili *válec kruhový* položený v nekonečné vzdálenosti od osy směrem kolmým na tuto. Mají tedy onduloidy a nodoidy všechny tři tvary mezní společné, s tím toliko rozdílem, že válec kruhový co jeden z těchto tvarů vzniká v každém případu jiným spůsobem.

Na základě úvah téhož rázu fysikalně-geometrického dokazuje konečně *Plateau*, že uvedenými tvary vyčerpán jest počet všech možných rotačních ploch rovnovážných. Tvary prstenovité, jichž možnost na začátku této úvahy se ještě připustila, jsou tudíž nyní vyloučeny. Výsledky, k nimž *Plateau* dospěl, jsou úplně potvrzeny analytickými prácemi těch kterých mathematiků o plochách vyhovujících podmínce $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} = C.$

Odkazujíce vzhledem k tomu, jakož i vzhledem k četným pokynům praktickým, jichž nutno znáti tomu, kdo chce s poněkud větší přesností pokusy Plateau-ovy opakovat, k původnímu spisu, v němž veškerá literatura předmětu našeho se týkající jest snešena, končíme uvedením nanejvýš zajímavé věty, kterou *Delaunay* *) objevil a *Lamarle* **) zvláštními methodami geometrickými dokázal.

---

*) *Delaunay*, Sur la surface de révolution, dont la courbure moyenne est constante (Lionville, Journ. de Math. t. VI.)

**) *Lamarle* Théorie géométrique des rayons et centres de courbure (Bull. de l'Acad. de Belgique 1857.)

„Valíme-li po přímce *ellipsu,* opisuje *ohnisko* její poledníkovou křivku *onduloidu.*"

„Valíme-li po téže přímce *hyperbolu,* opisuje *ohnisko* její poledníkovou křivku *nodoidu.*"

„Stane-li se ellipsa (neb hyperbola) *parabolou,* bude křivka opsaná *ohniskem, řetězovkou,* t. j. poledníkovou křivkou *katenoidu.*"

„Rovná-li se *jedna osa* ellipsy neb hyperboly *nule*, zamění se křivka *ohniskem* opsaná *v řadu polokruhů,* poledníkovou křivku *řady koulí.*"

„Stane-li se ellipsa *kruhem,* opíše *střed* jeho *přímku*, rovnoběžnou s osou, poledníkovou křivku válce."

„Roste-li při téže hodnotě realné osy hyperboly *osa imaginarní do nekonečna,* blíží se křivka opsaná ohniskem *kruhu* v nekonečné vzdálenosti od osy ležícímu, poledníkové to křivce *válce* tvořícího mezní tvar nodoidů."

Těmito větami jest teprv vnitřní souvislost jednotlivých rotačních tvarů rovnovážných v pravé světlo postavena. Všeobecným tvarům kuželoseček, ellipsám a hyperbolám přísluší všeobecné tvary rovnovážné, onduloidy a nodoidy; zvláštním tvarům kuželoseček, kruhu, parabole a přímce přísluší válec, katenoid a koule; co zvláštní případ koule jeví se konečně poslední rotační plocha rovnovážná, rovina co koule poloměru nekonečného. Zároveň vysvítá z práci obou mathematiků jakož i z všeobecné rovnice *Beer-ovy,* že těmito šesti plochami vyčerpány jsou veškeré možné rotační tvary rovnovážné, tak že pokus a theorie v tomto případě v nejkrásnějším souhlase se objevují.

O základních vlastnostech křivek podobných.

Podává

J. P. Šebesta.

Koncové body přímky kol jednoho jejího pevného bodu se otáčející popisují kruhové úměrné oblouky zakřivenosti, která