František Koláček
Elementarní dedukce zákonů gravitačních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 1, 27--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121154

obdrží se z něho napřed

$$x = -\sqrt{p}\left[(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\frac{1}{5}} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{1}{5}}\right]$$

a po odstranění imaginarních členů pomocí poučky Moivreovy jest

$$x = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{5}\right),$$

kdež n libovolné celistvé číslo znamená. Jelikož ale veličina

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2n\pi}{5}\right)$$

jen pět od sebe rozdílných hodnot dává, jež se obdrží, klade-li se tam za n postupně 0, 1, 2, 3, 4, jsou kořeny rovnice

$$x^5 - 5px^3 + 5p^2x + q = 0$$

pro $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < p^5$ vesměs realné a sice

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{aligned}
x_1 &= -2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{5} \\
x_2 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + 72^0\right) \\
x_3 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} - 36^0\right) \\
x_4 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{6\pi}{5}\right) = +2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + 36^0\right) \\
x_5 &= -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = -2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{6} - 72^0\right).
\end{aligned}\right.$$

Elementarní dedukce zákonů gravitačních.

Napsal

Dr. **Fr. Koláček**, v Brně.

V následujících řádkách podán elementarní vývod těchto dvou vět:

1. Pohybuje-li se hmotný bod m v kuželosečce, a opisuje-li průvodič z ohniska k bodu m vedený, v rovných dobách plochy rovné, tož hmota m podléhá centralné, přítažlivé síle z ohniska vycházející, jíž ubývá se čtvercem vzdálenosti.

2. Působí-li přitažlivá síla z daného bodu na hmotu m, a ubývá-li jí se čtvercem vzdálenosti, opisuje m kuželosečku, jíž jmenovaný pevný bod jest ohniskem.

Třeba dříve odvoditi věty pomocné.

a) Přiblíží-li se hmota m centru na dráze, jež jí vytknuta jest podmínkami počátečnými a silou centralnou, nabude rovněž tolik síly živé, jako by nabyla, o totéž se centru přiblíživši po dráze přímočárné, řídí-li se velikost síly centrálné pouze vzdáleností od centra.

Dráha S se neustále křiví a síla centralní nepřetržitě se mění. Takový pohyb se vypíše se zevrubností nad míru velikou, nahradí-li se křivá dráha lomenou, při čemž přímočárné dílce dráhy lomené tak malými buďtež, že se v obvodu jednoho dílu centralní síla nemění. Velikost její budiž určena vzdáleností r_n jednoho z konců přímočárného dílce od středu gravitačního. V následujícím dílci dráhy lomené změní se směr pohybu a velikost síly malým skokem.*)

Volíme-li přímočárné dílce ty neskonale malými, napodobíme mathematicky skutečný pohyb až na veličiny, jež proti veličinám v počtu se naskytujícím zanedbati lze.

Centralní sílu P, kteráž silou přítažlivou jest, rozvedeme ve dvě složky, totiž $P \cos \lambda$ a $P \sin \lambda$. Prvá jde směrem pohybu a vykonává práci $P_n \cos \lambda_n \; s_n = P_n (s_n \cos \lambda_n) = P_n (r_{n-1} - r_n)$. Při tom znamená P_n sílu, λ_n úhel mezi směrem síly centralné a směrem pohybu v dílci $n$tém, jehož délka jest s_n. Zřejmo, že vykonaná práce jest tak veliká, jako kdyby byla celá síla centralní hmotu m o $(r_{n-1} - r_n)$ přiblížila středu. Živá síla, již nabylo m v $n$tém dílci, bude rovna vykonané práci, pročež

$$m \frac{v_n^2 - v_{n-1}^2}{2} = P_n (r_{n-1} - r_n);$$

v_{n-1} a v_n, jakož i r_{n-1} a r_n jsou hodnoty rychlostí a průvodičů při vstupu a výstupu z $n$tého dílce. Složka $P \sin \lambda$, kteráž na okamžitém směru pohybu kolmo stojí, mění směr pohybu. V případě zvláštním, kde síly se čtvercem vzdálenosti ubývá, jest $P_n = \frac{mk}{r_n^2}$ a vykonaná práce: $\frac{mk}{r_n^2} (r_{n-1} - r_n)$. Zde značí k kon-

*) Příslušný výkres si každý snadno sestrojí.

stantu gravitačních. Výraz:

$$\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_{n-1}}=\frac{r_{n-1}-r_n}{r_n(r_n+r_{n-1}-r_n)},$$

v kterémž $r_{n-1}-r_n$ naproti r_n zanedbáme, násoben součinem mk dává práci vykonanou ve formě $mk\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_{n-1}}\right)$.

Přibude tedy průběhem prvých n dílců přímočárných práce i živé síly tolik, kolik obnáší součet

$$km\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right)+mk\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)+\ldots+mk\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_{n-1}}\right)$$
$$=mk\left(\frac{1}{r_n}-\frac{1}{r_0}\right).$$

Vypustíme-li v posledním výrazu index n, obdržíme porovnáním práce a živé síly:

$$mk\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)=\frac{m}{2}(v^2-v_0{}^2),$$

kdež v_0 a v značí rychlosti, příslušné průvodičům r_0 a r.

b) Volíme-li hlavní osu kuželosečky osou polárnou a ohnisko středem, jest všeobecná rovnice kuželosečky

$$\varrho=\frac{a}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

kdež ε, a jsou konstanty, ϱ průvodič, φ úhel polární.

Přímka τ ustanovena jest kolmicí p z ohniska na ni spuštěnou a úhlem Φ, jejž tato s osou polární svírá. Rovnice přímky jest pak

$$p=\varrho\cos(\varphi-\Phi).$$

Z rovnic přímky a kuželosečky vymýtíme φ, dosadivše za $\cos(\varphi-\Phi)$ hodnotu $p:\varrho$.

Obdržímeť tu

$$a=\varrho\left[1+\varepsilon\frac{p}{\varrho}\cos\Phi-\varepsilon\sin\Phi\sqrt{1-\frac{p^2}{\varrho^2}}\right.$$

aneb další přeměnou

$$\frac{1}{\varrho^2}\left[(a-p\,\varepsilon\cos\Phi)^2+p^2\varepsilon^2\sin^2\Phi\right]-\frac{2}{\varrho}(a-p\varepsilon\cos\Phi)$$
$$+1-\varepsilon^2\sin^2\Phi=0.$$

Kořeny této rovnice $(\varrho_1\,\varrho_2)$ jsou průvodiči obou bodů, v nichž přímka kuželosečku protíná. Má-li přímka býti tečnou kuželosečky, musí tato rovnice míti dva stejné kořeny, což se stane, splněna-li podmínka

$$[(a - p\varepsilon \cos\Phi)^2 + p^2\varepsilon^2 \sin^2\Phi][1 - \varepsilon^2 \sin^2\Phi] = (a - p\varepsilon\cos\Phi)^2;$$

kořeny kvadratické rovnice jsou oba rovny $\frac{1}{r}$, kdež

$$\frac{1}{r} = (a - p\varepsilon\cos\Phi) : [(a - p\varepsilon\cos\Phi)^2 + p^2\varepsilon^2\sin^2\Phi).$$

Poslední dvě rovnice se snadno promění v tyto dvě

$$p^2 = a^2 - 2ap\varepsilon\cos\Phi + p^2\varepsilon^2, \quad \frac{1}{r} = \frac{a - p\varepsilon\cos\Phi}{a^2 - 2ap\varepsilon\cos\Phi + p^2\varepsilon^2},$$

z nichž vymýtěním $\cos\Phi$ vychází konečná rovnice

$$p^2\left(1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r}\right) = -a^2.$$

Uvážíme-li, že přímka T se stala tečnou a že r jest průvodič bodu ďotyčného, p kolmicí na tečnu, lze rovnici poslední považovati za rovnici kuželosečky.

Pomocí vět *a)* i *b)* dokážeme snadno na počátku uvedené věty mechanické.

1. Pohyb děje se v kuželosečce, jejíž rovnice jest

$$p^2\left(1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r}\right) = -a^2.$$

Průvodič opisuje v rovných dobách plochy rovné. Značí-li tudíž C rychlost plošnou, t. j. plochu, již průvodič za jednotku časovou proběhne, bude plocha za neskonale malou dobu τ proběhnutá rovna $C\tau$, jakož i $(v\tau)\frac{p}{2}$. Ostatně vychází

$$vp = 2C.$$

Dosadíme-li z poslední rovnice vyvozené $p = \frac{2C}{v}$ do rovnice kuželosečky, vyjde

$$1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r} = -a^2\frac{v^2}{4C^2}.$$

Přísluší-li poloměru r_0 rychlost v_0, bude podobně

$$1 - \varepsilon^2 - \frac{2a}{r_0} = -a^2\frac{v_0^2}{4C^2}.$$

Odečtením vychází

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2C^2} = 2a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Zřejmo, že se řídí velikost síly živé týmž zákonem, jako v případě, kdež centralní síla čtvercem vzdálenosti se zmenšovala. Porovnáním se vzorcem

$$\frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = km\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

vychází výraz pro hodnotu konstanty gravitační

$$k = \frac{4C^2}{a},$$

kdež k značí zrychlení, s kterým by jednotka hmotná ke předu gravitačnímu padala, kdyby vzdálenost její obnášela jednotku délkovou. Předpokládá-li se, že všechny oběžnice tétéž gravitaci podléhají, bude k, vážené z pohybu všech oběžnic, totožné. Značí-li pak T oběžnou dobu planety jedné, α, β poloosy ellipsy, již opisuje, bude

$$CT = \alpha\beta \,.\, \pi.$$

Veličina a se rovná, jak z geometrie ellipsy plyne, poměru $\frac{\beta^2}{\alpha}$, čímž se konečně obdrží

$$k = 4 \,.\, \alpha^3 \pi^2 : T^2$$

Pro druhou planetu přejde α, T v α_1 a T_1 čímž

$$k = 4\alpha_1{}^3 \pi^2 : T_1{}^2.$$

Porovnáním vychází odtud třetí věta Kepplerova

$$T^2 : T_1{}^2 = \alpha^3 : \alpha_1{}^3.$$

A naopak jest zkušeností dotvrzená platnost třetí věty Kepplerovy důvodem pro společnou příčinu všech pohybů planetárných.

2. Hmota m ať podléhá gravitaci dle zákona

$$P = \frac{km}{r^2}.$$

Jakou dráhu opisuje hmota m?

Dle předešlého jest známá relace o živých silách

$$m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = mk\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Spojí-li se tato s větou o rovných plochách opsaných v rovných dobách, s větou tedy, všem centralním pohybům společnou, tím že se na místo v dosadí $\frac{2C}{p}$, vyjde relace mezi kolmicí p na tangentu spuštěnou a mezi průvodičem dotýčného bodu r, jež zní

$$\frac{4C^2}{p^2} = v_0^2 + \frac{2k}{r} - \frac{2k}{r_0}.$$

Označujeť kuželosečku, jejíž parametry vycházejí pouhým porovnáním s rovnicí kůželosečky

$$p^2\left(1-\varepsilon^2-\frac{2a}{r}\right)=-a^2.$$

Jestiť

$$a=\frac{4C^2}{k},\quad \frac{1-\varepsilon^2}{a}=\frac{2k}{r_0}-v^2$$

Myslíme-li si ve veličinách v_0, r_0 rychlost a vzdálenost v okamžiku, ve kterém hmota m, tedy na př. planeta do pohybu se dostala, poznáme, že jen tyto o formě kuželosečky rozhodují. Vyžadujeť ellipsa, aby $\varepsilon^2<1$, kdežto k hyperbole a parabole $\varepsilon^2>1$ a $\varepsilon^2=1$ přináleží.

Pohyb hmoty m bude se tedy díti v *ellipse*, *parabole* nebo *hyperbole*, platí-li po sobě podmínky

$$\frac{2k}{r_0}-v_0^2 \gtreqless 0,$$

z čehož zároveň patrno, že podmínka pro parabolu jest přesně vymezena a tato dráha tedy ve skutečnosti skoro nemožna.

Příspěvek k upotřebení determinantů.

Podal

Dr. K. **Zahradník**, prof. v Záhřebě.

Podmínku, by ležely tři body a_k (x_k, y_k) $k=1, 2, 3$, na téže přímce, vyjadřuje, jak známo, determinant[1])

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Determinant tento můžeme přeměniti, i psáti:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_2 & y_3-y_2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_2-x_1, & y_2-y_1 \\ x_3-x_2, & y_3-y_2 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Označíme-li projekci délky $\overline{a_m a_n}$ na osu T krátce $P_t\,(a_m a_n)$ můžeme vzorec (3) psáti

---

[1]) Viz: *Studnička*: „Geometrické upotřebení některých pouček o determinantech. Časopis díl II. pg. 70.