„Valíme-li po přímce *ellipsu,* opisuje *ohnisko* její poledníkovou křivku *onduloidu.*“

„Valíme-li po téže přímce *hyperbolu,* opisuje *ohnisko* její poledníkovou křivku *nodoidu.*“

„Stane-li se ellipsa (neb hyperbola) *parabolou,* bude křivka opsaná *ohniskem, řetězovkou,* t. j. poledníkovou křivkou *katenoidu.*“

„Rovná-li se *jedna osa* ellipsy neb hyperboly *nule*, zamění se křivka *ohniskem* opsaná *v řadu polokruhů,* poledníkovou křivku *řady koulí.*“

„Stane-li se ellipsa *kruhem,* opíše *střed* jeho *přímku*, rovnoběžnou s osou, poledníkovou křivku válce.“

„Roste-li při téže hodnotě realné osy hyperboly *osa imaginarní do nekonečna,* blíží se křivka opsaná ohniskem *kruhu* v nekonečné vzdálenosti od osy ležícímu, poledníkové to křivce *válce* tvořícího mezní tvar nodoidů.“

Těmito větami jest teprv vnitřní souvislost jednotlivých rotačních tvarů rovnovážných v pravé světlo postavena. Všeobecným tvarům kuželoseček, ellipsám a hyperbolám přísluší všeobecné tvary rovnovážné, onduloidy a nodoidy; zvláštním tvarům kuželoseček, kruhu, parabole a přímce přísluší válec, katenoid a koule; co zvláštní případ koule jeví se konečně poslední rotační plocha rovnovážná, rovina co koule poloměru nekonečného. Zároveň vysvítá z práci obou mathematiků jakož i z všeobecné rovnice *Beer-ovy,* že těmito šesti plochami vyčerpány jsou veškeré možné rotační tvary rovnovážné, tak že pokus a theorie v tomto případě v nejkrásnějším souhlase se objevují.

O základních vlastnostech křivek podobných.

Podává

J. P. Šebesta.

Koncové body přímky kol jednoho jejího pevného bodu se otáčející popisují kruhové úměrné oblouky zakřivenosti, která obráceně úměrna jest poloměrům oblouků; výseče v témž čase proběhnuté jsou v poměru čtverečním uvedených poloměrů. Věty ty kruhů soustředných se týkající dají se všeobecně pronésti o dvou křivkách ať algebraických, ať transcendentních, jež jsou ve zvláštním vztahu tom, že přímka spojující združené body obou křivek A, a neustále pevným bodem — pólem — M prochází, a vzdálenosti bodů A, a od pólu M v stálém neproměnném poměru jsou

$$aM : AM = m : n, \tag{1}$$

při čemž m i n positivná čísla jsou, pokud bod daný A oddělen jest od pólu M bodem odvozeným a; jinak mají znaménka protivná.

Vyjádřena-li tedy křivka K funkcí nerozvinutou

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

a jsou-li souřadnice jejího bodu A (x, y) a souřadnice pólu M (a, b), dají se vyjádřiti souřadnice bodu združeného a (ξ, η) rovnicemi

$$\xi = a\,\frac{n-m}{n} + x\,\frac{m}{n}, \tag{3}$$

$$\eta = b\,\frac{n-m}{n} + y\,\frac{m}{n}, \tag{4}$$

z nichž vyvoditi se dají hodnoty pro x a y a dosazené do rovnice (2) podávají rovnici křivky k z křivky K na základě poměru podobnosti $\frac{m}{n}$ odvozené.

$$f\left(\frac{n}{m}\,\xi - \frac{n-m}{m}\,a, \frac{n}{m}\,\eta - \frac{n-m}{m}\,b\right) = 0. \tag{5}$$

Pro docílení jednoduššího tvaru nechť se pošine osa souřadnic o délku $\frac{n-m}{m}\,b$ a osa pořadnic o délku $\frac{n-m}{m}\,a$, takže pak rovnice křivky k na novou soustavu vztahovaná zní

$$f\left(\frac{n}{m}\,\xi', \frac{n}{m}\,\eta'\right) = 0. \tag{6}$$

Srovnáním rovnic (2) a (6) sleduje, že obě křivky jsou téhož řádu a stupně, a poněvadž souřadnice združených bodů stejnoměrně se mění, že se mohou líšiti jen polohou a rozměry, a takové křivky slovou podobnými; a geometrie polohy zabývajíc se jimi podává některé vztahy, jež i cestou analytickou dovoditi se dají.

Jsou-li body A, a a B, b združené a souřadnice jich v soustavě původní (x, y), (ξ, η), a (x_1, y_1), (ξ_1, η_1), jest směrnice sečny AB

$$tg\,\varphi = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{7}$$

a směrnice sečny ab

$$tg\,\varphi_1 = \frac{\eta - \eta_1}{\xi - \xi_1}\,. \tag{8}$$

Pro dosazení hodnot za souřadnice bodů združených a, b dle rovnic (3) a (4) mění se rovnice (8) v

$$tg\,\varphi_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} = tg\,\varphi \tag{9}$$

a tedy

$$\varphi_1 = \varphi\,, \tag{10}$$

která odůvodňuje pochod při sestrojování křivky podobné, dán-li pól a jeden bod odvozený pomocí sečen rovnoběžných. Že sečny v bodech združených jsou rovnoběžné, přísluší táž vlastnost i tečnám v bodech k sobě příslušných, k čemuž ještě jednou zvlášť při odvozování differencialních poměrů se poukáže. Uváží-li se však, že — jak právě nyní řečeno — platí

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx}\,, \tag{11}$$

vychází jednoduchá úměrnost všech délek při křivkách podobných se vyskytujících a čtverečná ploch združených, předpokládá-li se ovšem nutně, že křivka k odvozená se vztahuje na soustavu Ξ', H' bodem $\left(\frac{n-m}{m}\,a, \frac{n-m}{m}\,b,\right)$ určenou, o níž již před tím řeč byla, čímž ovšem na všeobecnosti se nic nemění.

Znamenají-li se pro krátkosť délky u křivky K velkými písmenami a u podobné k malými a připomene-li se proměny rovnic (3) a (4) v tyto:

$$\xi' = \frac{m}{n}\,x \tag{12}$$

$$\eta' = \frac{m}{n}\,y, \tag{13}$$

dle známých vět se rovná subnormála

$$sn = \eta'\,\frac{d\eta'}{d\xi'} = \frac{m}{n}\,y\,\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\,Sn, \tag{14}$$

subtangenta

$$st = \eta' \frac{d\xi'}{d\eta'} = \frac{m}{n} y \frac{dx}{dy} = \frac{m}{n} St, \tag{15}$$

délka normály

$$nr = \sqrt{\eta'^2 + sn^2} = \frac{m}{n} \sqrt{\eta^2 + Sn^2} = \frac{m}{n} Nr, \tag{16}$$

délka tangenty

$$tg = \sqrt{\eta' + st^2} = \frac{m}{n} \sqrt{y^2 + St^2} = \frac{m}{n} Tg, \tag{17}$$

délka oblouku

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta'}{d\xi'}\right)^2} d\xi' = \frac{m}{n} \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{m}{n} S, \tag{18}$$

z kteréž poslední rovnice i vychází, že jsou-li křivky uzavřené, i pro obvody platí

$$k = \frac{m}{n} K. \tag{19}$$

I jsou tedy uvedené délky tak úměrny jako délky aM, AM, a proto musí koncové body združených dvou délek vždy býti na přímce pólem M procházející, čímž se umožňuje snadné sestrojování tečen a normál; neboť jestli ku př. tečna v bodě A protíná osu X v bodě C, jest příslušná tečná v bodě a určena tímto bodem a bodem c — průsekem to přímky MC s osou Ξ'. Zbývá ještě o jedné důležité délce promluviti, totiž o poloměru křivosti; dříve však nutno vyvinouti differencialní poměry funkcí pod (2) a (6). Aby se dála differenciace rovnice (6) snadno a pohodlně, tu se differencuje ohledem ξ' napřed dle $\frac{n}{m}\xi' = x$ a násobí $\frac{dx}{d\xi'}$, a podobně ohledem η' napřed dle $\frac{n}{m}\eta' = y$ a násobí $\frac{dy}{d\eta'}$. Může se tedy psáti

$$\frac{df}{dx}\frac{n}{m} + \frac{df}{dy}\frac{n}{m}\frac{d\eta'}{d\xi'} = 0, \tag{20}$$

z čehož zkrácením

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{d\eta'}{d\xi'} = 0. \tag{21}$$

Tím potvrzena jest již dříve dle analogie pronešená věta o rovnosti prvních differencialních poměrů u křivek podobných.

Aby se zjednal druhý differencialní poměr, differencuje se způsobem před tím udaným rovnice (21). Co výsledek jeví se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{n}{m}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{d\eta'}{d\xi'}\frac{n}{m}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{d^2\eta'}{d\xi'^2}+$$
$$\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{n}{m}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{d\eta'}{d\xi'}\frac{n}{m}\right\}\frac{d\eta'}{d\xi'}=0 \qquad (22)$$

a po uvážení rovnice (21) a po spořádání zbývá

$$\frac{d^2\eta'}{d\xi'^2}=-\frac{n}{m}\,\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3}\,;$$

než uvedený právě zlomek značí, jak známo, $\frac{d^2y}{dx^2}$, tak že

$$\frac{d^2\eta'}{d\xi'^2}=\frac{n}{m}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (24)$$

a proto poloměr křivosti

$$r=\frac{m}{n}R. \qquad (25)$$

Poloměry křivosti jsou podrobeny témuž zákonu, kterému vůbec délky u křivek podobných; jelikož pak normály v bodech združených dle rovnice (11) jsou rovnoběžné, a srovnáním rovnice (25) s rovnicí (1) vychází

$$\frac{r}{R}=\frac{aM}{AM}=\frac{m}{n}, \qquad (26)$$

musí středy křivosti α, α' na základě podobnosti trojúhelníků ležeti na přímce $M\alpha$ a spolu platiti

$$\frac{\alpha' M}{\alpha M}=\frac{aM}{AM}=\frac{m}{n}. \qquad (27)$$

Tím na jisto postaveno, že i evoluty křivek podobných jsou křivky podobné a sice dle téhož poměru podobnosti.

Aby se vyjádřiti dal poměr ploch združených, znamenejtež se písmenami P, p; i jest

$$p=\int \eta'\,d\xi'=\left(\frac{m}{n}\right)^2\int y\,dx=\left(\frac{m}{n}\right)^2 P. \qquad (28)$$

Jsou proto plochy mezi obloukem ab a osou Ξ' a mezi obloukem AB a osou X v poměru čtverečném $\left(\frac{m}{n}\right)^2$. V témž poměru jsou i výseče *Mab* a *MAB*, o čemž se každý snadno přesvědčí, vyvodí-li si výrazy pro výseče ony.

K doplnění uvedených již vlastností křivek podobných stačí poukázati k souvislosti differencialních poměrů obou křivek takových. Uvedou-li se rovnice (11) a (24), dá se provedením skutečným ukázati, že i

$$\frac{d^3\eta'}{d\xi'^3} = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \frac{d^3y}{dx^3} \tag{29}$$

a všeobecně

$$\frac{d^r\eta'}{d\xi'^r} = \left(\frac{n}{m}\right)^{r-1} \frac{d^ry}{dx^r}. \tag{30}$$

Následkem toho u obou křivek každý differencialní pomèr současně přejde v nullu a nekonečnosť, čímž se vysvětluje, že všecky singularity z jedné křivky na druhou se přenáší a že body ty zvláštní jsou body združenými.

Ze základních vlastností křivek podobných dají se vyvoditi některé dosti zajímavé poučky planimetrické:

1. Poněvadž všecky paraboly, jsou-li jich osy rovnoběžny, jsou podobné, přímky spojující body dvou parabol, v kterých tečny jsou rovnoběžné, protínají se v jediném bodu.

2. Dvě paraboly semikubické, jsou-li tečny v jejich bodech úvratových rovnoběžné, jsou v téže souvislosti, totiž: přímky určené body, v nichž se dotýkají parabol tečny rovnoběžné, scházejí se v bodě jednom.

3. Tatáž vlastnosť dá se rozšířiti i na hyperboly dvě rovnoramenné, když asymptoty jsou rovnoběžné.

Tak by se dala vlastnosť ta přenésti i na křivky jiné, a vysvětliti se dá tím, že onen společný průsečík jest pólem podobnosti.