

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

August Seydler

Poznámka o upotřebení principu energie na účinky elektrického proudu

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 129--136

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121142>

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1885

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

$$\begin{aligned}\lambda &= b + c - a - m^2, \\ \mu &= a + c - b - m^2, \\ \nu &= a + b - c - m^2.\end{aligned}$$

Správnost těchto formulí můžeme tím kontrolovati, že místo a, b, c, m napíšeme resp. $x^2, y^2, z^2, x + y + z$; musejí pak býti identicky správné. Jeť patrné, že platnost jejich předpokládá, že žádná z hodnot m, λ, μ, ν nevymizí; jsou-li $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ kladné odmocniny z kladných čísel, jsou tyto výminky patrně vyplněny.

Poznámka o upotřebení principu energie na účinky elektrického proudu.

Sděluje

dr. A. Seydler.

Princip energie zní v nejstručnější formuli:

Součet energie ve světě jest stálý.

Upotřebením na jednotlivou soustavu hmot obdržíme následující proň výraz:

Energie při jakýchkoli dějích v soustavě hmotné spotřebovaná (práce vykonaná) musí se rovnati energi v jiných tvarech získané.

Mathematický vzorek pro tuto větu obdrželi bychom, kdybychom na jedné straně rovnice umístili všechny záporné, na druhé straně všechny kladné změny energie. Rozdíl kladných a záporných změn energie není však podstatný, ano se označení týchž změn průběhem celého děje měniti může. (Příklad: změna práce gravitací vykonané a kinetické energie při planetárním pohybu). Podstatnějším jeví se roztrídění v různé tvary energie. A tu rozeznáváme hlavně:

- a) *energi kinetickou* neb *aktualnou* T čili energii viditelného pohybu;
- b) *energi thermickou* U, která se od mnohých pokládá za energii neviditelného (molekulárního) pohybu;
- c) *a) buď práci vykonanou různými silami* (mechanickými, elektrickými, chemickými atd.) L;

β) buď práci ještě nepotřebovanou, zásobu možné práce, energii statickou neb potencialnou P.

Patrně jsou změny veličin L a P (ΔL a ΔP) stejně velké však opačného označení, a podle toho můžeme princip energie psát ve dvojím tvaru:

$$(1\alpha) \quad \Delta L = \Delta T + \Delta U,$$

$$(1\beta) \quad 0 = \Delta P + \Delta T + \Delta U.$$

Je-li soustava hmotná izolována, t. j. uzavřena uvnitř plochy pro teplo a účinek zevnějších sil neprůstupné, *) jest její obsah energie kinetické i termické v daném stavu (A) zcela určitý, rovněž i obsah v jiném daném stavu (B), a jsou tudíž obě změny ΔT i ΔU vždy těmitěž veličinami, nechat útvar převádíme jakýmikoli způsoby a cestami ze stavu (A) ve stav (B).

Princip energie tvrdí na základě rovnice (1) totéž o změnách ΔL a ΔP práce sil (vnitřních) a potencialné energie; tvrdí tudíž, že existuje úkon L, závislý pouze na okamžitém stavu daného útvaru a takový, že znamenají rozdíly jeho hodnot pro dva určité stavy útvaru práci, kterou vykonávají vnitřní síly při převedení jeho ze stavu prvního ve druhý.

Platí-li věta ta pro práci L *veškerých vnitřních sil*, nemusí proto ještě platiti pro práci *jednotlivých druhů těchto sil*, t. j. není tím dokázána existence příslušných úkonů $L_1, L_2, L_3 \dots$. Nanejvýš bylo by lze tvrditi: nalezeny-li podobné úkony pro všechny druhy vnitřních sil až na jediný, platí příslušný úkon též pro poslední druh.

V tomto smyslu odvozuje se zhusta existence potencialu pro síly elektrodynamické (ponderomotorické i elektromotorické) z principu energie. Proti tomuto způsobu odvození lze však různé námitky učiniti, jak podrobněji vyloženo v pojednání mém r. 1883 v Zasedacích zprávách kr. české Společnosti nauk uveřejněném.

V skutku vyskytují se v nejlepších o předmětu tom jednáních spisech některé nejasnosti ano i skutečná nedopatření, zejména u *Helmholtze*: Die Erhaltung der Kraft (1847), u *Wiedemanna*: Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus

*) Nezáleží zde na tom, že podobnou izolaci můžeme provést jen v pokusu myšlenkovém.

(2. vyd. 1874), u *Maxwella*: Treatise on Electricity and Magnetism (1. vyd. 1873; 2. vyd. 1881; něm. překlad od *Weinsteina* 1883). Bližšímu objasnění této otázky mělo posloužiti zmíněné pojednání, z něhož tuto podstatné části podávám.

Byť i nemohl princip energie sloužiti za *důkaz* existence elektrodynamického potencialu, uvádí nám přece na mysl možnost této existence — má zkrátka význam *heuristickej*. Chceme tudíž existenci této potencialu ano i určitý tvar jeho předpokládat a zkoumat, zda-li tím skutečnosti vyhovíme.

Mysleme si pro větší jednoduchost dva lineární proudy o intenzitách J_1 a J_2 , vzbuzené elektromotorickými silami E_1 a E_2 při odporech R_1 a R_2 . Jak známo působí na ně síly mechanické, elektromotorické a elektrodynamické, jichž práce označíme po pořádku L_1 , L_2 , L_3 : výsledkem tohoto působení jest změna živé síly T a termické energie (*množství tepla*) U .

Co se týče funkce P_3 neb $-L_3$, t. j. *elektrodynamického potencialu*, jehož existenci právě předpokládáme, položíme:

$$(2) \quad P_3 = -L_3 = \frac{1}{2} J_1^2 V_1 + J_1 J_2 V + \frac{1}{2} J_2^2 V_2,$$

kde jest V úkon závislý na vzájemné poloze obou proudů, V_1 a V_2 úkony závislé každý na tvaru vodiče příslušného proudu, tudíž pro neproměnné vodiče konstanty. Volba prostředního členu výrazu pro P_3 odůvodňuje se tím, že jest vzájemné působení proudů závislé na součinu intenzit proudových a mimo to dle vši pravděpodobnosti jen ještě na vzájemné poloze proudů; volba obou krajních členů učiněna se zřetelem k působení proudů na sama sebe. Jest tudíž *bud'*

$$(3a) \quad dL_3 = -\frac{1}{2} J_1^2 dV_1 - J_1 J_2 dV - \frac{1}{2} J_2^2 dV_2 \\ - (J_1 V_1 + J_2 V) dJ_1 - (J_1 V + J_2 V_2) dJ_2,$$

aneb

$$(3b) \quad dL_3 = \frac{1}{2} J_1^2 dV_1 + J_1 J_2 dV + \frac{1}{2} J_2^2 dV_2 \\ - J_1 d(J_1 V_1 + J_2 V) - J_2 d(J_1 V + J_2 V_2).$$

Elementární práce elektrohybných sil jest:

$$(4) \quad dL_2 = E_1 J_1 dt + E_2 J_2 dt,$$

elementární práce mechanických sil dL_1 . Kinetickou energii soustavou získanou rozdělíme ve dvě části: dT_1 budiž získáno

práci sil mechanických,*) dT_3 práci sil elektrodynamických (ponderomotorických). Síly elektromotorické nepůsobují žádné viditelné energie aktualně. Práci sil elektrodynamických ponderomotorických lze v závislosti její od proudových intenzit a vzájemné polohy vodičů takto určit. Položíme-li

$$(5) \quad \omega = \int \int \frac{\cos(s_1 s_2)}{r} ds_1 ds_2,$$

kde jsou ds_1 a ds_2 částice obou lineárných vodičů, r jejich vzdálenost a $(s_1 s_2)$ úhel směrů jejich, a kde se integruje vzhledem k celému uzavřenému obvodu obou kruhů proudových, a sestrojíme-li podobné dva výrazy ω_1 a ω_2 , vzhledem ku každému vodiči o sobě, můžeme psáti:

$$(6) \quad dT_3 = \frac{1}{2} J_1^2 d\omega_1 + J_1 J_2 d\omega + \frac{1}{2} J_2^2 d\omega_2.$$

Práce sil elektromotorických dL_2 a část práce dL_3 mění se (v nejjednodušším případě) v teplo, i jest dle Joule-ova zákona:

$$(7) \quad dU = J_1^2 R_1 dt + J_2^2 R_2 dt.$$

Vložíme-li všechny tyto výrazy do rovnice (1) a dělíme-li na dt , obdržíme dle toho, zda-li jsme [rovnice (3a) neb (3b)] upotřebili, buď

$$(8a) \quad \begin{aligned} & \frac{dL_1}{dt} - \frac{1}{2} J_1^2 \frac{dV_1}{dt} - J_1 J_2 \frac{dV}{dt} - \frac{1}{2} J_2^2 \frac{dV_2}{dt} \\ & + J_1 \left(E_1 - V_1 \frac{dJ_1}{dt} - V \frac{dJ_2}{dt} \right) \\ & + J_2 \left(E_2 - V \frac{dJ_1}{dt} - V_2 \frac{dJ_2}{dt} \right) \\ & = \frac{dT_1}{dt} + \frac{1}{2} J_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} + J_1 J_2 \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} \\ & + J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2, \end{aligned}$$

aneb:

*) Nesmíme zapomenouti, že každá z těchto veličin může býti též zápornou; záporné dT_1 na př. znamenalo by spotřebu živé síly k vykonání práce proti působení sil mechanických.

$$\begin{aligned}
 (8b) \quad & \frac{dL_1}{dt} + \frac{1}{2} J_1^2 \frac{dV_1}{dt} + J_1 J_2 \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{dV_2}{dt} \\
 & + J_1 \left[E_1 - \frac{d}{dt} (J_1 V_1 + J_2 V) \right] \\
 & + J_2 \left[E_2 - \frac{d}{dt} (J_1 V + J_2 V_2) \right] \\
 = & \frac{dJ_1}{dt} + \frac{1}{2} J_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} + J_1 J_2 \frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2} J_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} \\
 & + J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 .
 \end{aligned}$$

Nyní musíme, hledáme-li působení různých sil, zkoušeti, lze-li rovnici tu v jednom neb druhém tvaru rozložit, čili jinými slovy, úkony V_1 , V , V_2 určit tak, *aby žádný spor z určení toho nevzešel*.

Předně jest patrně:

$$(9) \quad \frac{dL_1}{dt} = \frac{dT_1}{dt} .$$

Volíme-li dále tvar (8a), můžeme ze tvaru výrazů v prvních řádkách po obou stranách rovníčka se vyskytujících souditi, že jest

$$(10a) \quad V_1 = -\omega_1, \quad V = -\omega, \quad V_2 = -\omega_2 .$$

Ze zbytku rovnice plyne však dále, má-li rovnice pro jakékoli hodnoty J_1 , J_2 podržeti platnost:

$$\begin{aligned}
 (11a) \quad & E_1 - V_1 \frac{dJ_1}{dt} - V \frac{dJ_2}{dt} = J_1 R_1, \\
 & E_2 - V \frac{dJ_1}{dt} - V_2 \frac{dJ_2}{dt} = J_2 R_2,
 \end{aligned}$$

kdež se nalézají dle Ohmova zákona na levé straně *elektromotorické síly*, t. j. mimo síly dané E_1 , E_2 ještě síly indukované. Tyto síly indukované byly by však dle uvedených výrazů pro stálé proudy ($J_1 = \text{Const.}$, $J_2 = \text{Const.}$) rovny nule, což se se skutečností nesrovnává, neboť síly takové vznikají i změnou polohy vodičů proudových.

Vyjdeme-li však od rovnice (8b), tu se nám ihned odporuje volba rovnic:

(10b) $V_1 = \omega_1$, $V = \omega$, $V_2 = \omega_2$,
načež ze zbytku rovnice odvodíme podobným jako dříve způsobem:

$$(11b) \quad \begin{aligned} E_1 - \frac{d}{dt} (J_1 V_1 + J_2 V) &= J_1 R_1 \\ E_2 - \frac{d}{dt} (J_1 V + J_2 V_2) &= J_2 R_2 . \end{aligned}$$

Výrazy pro indukované síly elektromotorické shodují se zde lépe se skutečností, která vznik takových sil při pouhé změně vzájemné polohy neb tvaru vodičů zná; podrobnější rozbor ukazuje, že také tvar úkonů V_1 , V , V_2 rovnicemi (10b) určený správné výrazy pro ony indukované síly poskytuje.

Existuje tedy v skutku elektrodynamický potencial, který má v případě dvou lineárných vodičů tvar:

$$(12) \quad -L_3 = P_3 = \frac{1}{2} J_1^2 \omega_1 + J_1 J_2 \omega + \frac{1}{2} J_2^2 \omega_2 ,$$

kde jsou úkony ω_1 , ω , ω_2 určeny úkony tvaru (5).

Podobným způsobem mohli bychom odvoditi elektrodynamický potencial soustavy proudů a magnetů. Přestáváje na tom, co dosud bylo vyloženo, připomínám pouze, že rozdíl mezi chybnou hypotesou (a) a správnou (b) leží pouze v označení úkonů V_1 ; viz rovnice (10a) a (10b). Tento nepatrný rozdíl ve spojení s nedůsledností, s jakou potencial vůbec v některých případech kladným, v jiných záporným znamením opatřuje, jest po soudu mém příčinou chyb, jež se v dotýcných úvahách namnoze vyskytují. K nejdůležitějšímu nedopatření, v Helmholtzově zmíněném spise na str. 67. se vyskytujícímu, chci zde ještě poukázati.

Na vytknutém místě soudí Helmholtz takto*):

„Pohybují-li se dva uzavřené proudové kruhy proti sobě, může se intenzita proudu v obou změnit. Je-li ω jejich vzájemný potencial pro jednotku proudu, musí býti jako v předešlých případech a z týchž důvodů:

$$(13) \quad E_1 J_1 + E_2 J_2 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + J_1 J_2 \frac{d\omega}{dt} .$$

Je-li nyní intenzita proudu v jednom vodiči R_2 mnohem nepatrnější nežli v druhém R_1 , tak že elektromotorická síla indukovaná působením R_2 v R_1 proti síle E_1 mizí a že tudíž klásti můžeme:

*) Ve vzorcích změnil jsem písmena Helmholtzem užívaná v písmena v tomto článku se vyskytující, by porovnání bylo snadnější.

$$(14a) \quad J_1 = \frac{E_1}{R_1}$$

obdržíme patrně z nové rovnice:

$$(14b) \quad J_2 = \frac{E_2 - J_1 \frac{d\omega}{dt}}{R_2}.$$

Porovnáme-li rovnici Helmholtzovu (13) s rovnicí (8b) neb i s (8a), vynechajíce zde vzájemně se rušící členy rovnice (9) a považujíce J_1 , J_2 , V_1 , V_2 , ω_1 , ω_2 za konstanty *) poznáváme ihned, že v oné rovnici (13) chybí na levé straně celá elektrodynamická práce čili záporně označená změna elektrodynamického potenciálu

$$(15) \quad \frac{dL_3}{dt} = -\frac{d}{dt} (J_1 J_2 V) = -J_1 \frac{d}{dt} (J_2 V) - J_2 \frac{d}{dt} (J_1 V) \\ + J_1 J_2 \frac{dV}{dt}.$$

Připojíme-li tento člen, položíme-li

$$V = \omega$$

a uvážíme-li, že jsou J_1 , J_2 v našem případě konstanty, obdržíme místo Helmholtzovy rovnice (13) rovnicí správnou

$$(16) \quad E_1 J_1 + E_2 J_2 = J_1^2 R_1 + J_2^2 R_2 + 2J_1 J_2 \frac{d\omega}{dt},$$

která rozpadá se ve dvě rovnice:

$$(17) \quad E_1 - J_2 \frac{d\omega}{dt} = J_1 R_1 \\ E_2 - J_1 \frac{d\omega}{dt} = J_2 R_2.$$

Z těchto rovnic shoduje se pouze poslední s rovnicí Helmholtzovou (14b); rovnice první líší se od (14a) výrazem pro indukovanou sílu elektromotorickou, které se Helmholtzovi nedostává, poněvadž jest v rovnici (13) člen

$$J_1 J_2 \frac{d\omega}{dt}$$

*) Jinými slovy, uvažujeme zde pouze vzájemné působení proudů na sebe, které se také v skutku *jedině* vyskytuje, nejsou-li intenzity proudů a tvary proudových kruhů veličiny proměnné. Netřeba připomínati, že se tím ukládá elektromotorickým silám E_1 , E_2 podmínka, plynoucí z rovnic (11b) neb pro E_2 z jednodušší rovnice(14).

jen jednou obsažen. Proto jest Helmholtz nucen uchýliti se k hypotese shora ležatým písmem naznačené.

Podobně má se věc při rozboru vzájemného působení magnetu a proudu.

Úvahu Helmholtzovu reprodukoval Maxwell doslovně (co citat) ve svém Treatise (č. 544) a Wiedemann podal ve spise dříve uvedeném (č. 1158. 1159.) výklad sice poněkud jiný, v němž však za vlivu oné úvahy totéž nedopatření se jeví,

Po uveřejnění dříve zmíněného pojednání v Zasedacích zprávách kr. č. Společnosti nauk (1883) bylo mi sděleno p. C. Neumannem v Lipsku, že týž již před více než desíti lety na nedopatření Helmholtzovy Theorie upozornil, zejména v pojednání v VI. svazku Math. Annalen: Über die theoretische Behandlung der sog. constanten Magnete. V pojednání tom jsou námitky Neumannovy zcela jiným způsobem formulovány a vedou také částečně k jinému výsledku. Ale zároveň poukázáno tam k jinému pojednání: Elektrodynamische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf das Princip der Energie v Berichte der k. sächs. Ges. der Wiss. (1871), kde vskutku zcela podobné námitky (str. 436, 437) se vyskytují.* Ačkoli tím prioritu oné úvahy více si přisuzovat nemohu, těší mne souhlas ve výsledku *zcela jinou cestou obdržéném* a nemám také úvahu svou za zbytečnou, uvážím-li, že omyl v ní odkrytý posud se ve spisech nejnovějšího data vyskytuje.

*) Neumann přichází k výsledku, že by místo rovnic (14a) a (14b) mělo státi:

$$J_1 R_1 = E_1 - \frac{1}{2} J_2 \frac{d\omega}{dt}$$

$$J_2 R_2 = E_2 - \frac{1}{2} J_1 \frac{d\omega}{dt},$$

„ein Resultat, welches im vollen Widerspruche mit der Erfahrung ist“.