Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Eduard Weyr

Poznámka k úlohám 20. a 21. ročníku XIII. tohoto časopisu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 124--129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121141

$$\sum\frac{996}{7}=2,\quad \sum\frac{994}{11}=4,\quad \sum\frac{993}{13}=5,$$
$$\sum\frac{991}{17}=5,\quad \sum\frac{990}{19}=2,\quad \sum\frac{988}{23}=22,$$
$$\sum\frac{985}{29}=28,\quad \sum\frac{984}{31}=23,\quad \sum\frac{981}{37}=19,$$
$$\sum\frac{980}{39}=5,\quad \sum\frac{979}{41}=36,\quad \sum\frac{978}{43}=32,$$

z čehož patrno, že číslo 1999 jest kmenným.

Že tu možná při zkoušení ještě rychleji někdy přijíti k cíli, poznává se z toho, že číslo $(a - x)$ obdržeti může na konci 0.

Podobný základ mají ostatní dvě pravidla Tesánkova, kde děliteli dán tvar $10a + b$ a $100a + 10b + c$. Vedouce rychleji k cíli, jsou zároveň složitější.

Poznámka k úlohám 20. a 21. v ročníku XIII. tohoto časopisu.

Napsal

Ed. Weyr.

Řešení podaná v předcházejícím čísle tohoto ročníku založena na tom, že $\sqrt{\alpha}$ a $\sqrt{\beta}$ vyjádřeny racionalně pomocí α, β a součtu $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ aneb rozdílu $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ atd. Možnost takového vyjádření lze bez počtu přímo viděti. Neboť učinivše $\sqrt{\alpha}=x$, $\sqrt{\beta}=y$ máme v první úloze

$$x+y=\gamma,\ x^2=\alpha,\ y^2=\beta.$$

Jsou-li α, β, γ dány (arci tak, že resultant těchto tří rovnic vymizí), vyhovuje všem třem rovnicím jediný system hodnot x, y, kteréž tedy lze *racionalně* vyjádřiti pomocí α, β, γ. Skutečně má x hodnoty $\pm\sqrt{\alpha}$, y pak $\pm\sqrt{\beta}$ a poněvadž čtyry hodnoty $\pm\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ jsou obecně veskrze různy, může jen jedna z nich býti rovna γ. Racionalné vyjádření by bylo jen tehdy nemožným, kdyby alespoň dva systemy x, y daly též součet γ. Jsou-li, jakož předpokládáme, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pak z oněch čtyř hodnot mohou patrně se rovnati jen $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ a $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$; v tomto případě tedy $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = -(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$ t. j. $= 0$ a $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta}$ a daná rovnice $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 0$ skutečně neopravňuje k výroku, že $\sqrt{\alpha}$ a $\sqrt{\beta}$ jsou racionalné, jsou-li α a β racionalné.

Vyjmeme-li tento případ ($\gamma = 0$), máme eliminací y ze svrchu napsaných rovnic

$$x^2 = \alpha, \quad (\gamma - x)^2 = \beta.$$

Odečtením plyne linearná rovnice pro x, z níž obdržíme x racionalně pomocí α, β, γ; y pak v téže formě z $y = \gamma - \alpha$.

Platnosť těchto výrazů

$$x = \frac{\gamma^2 + \alpha - \beta}{2\gamma}, \quad y = \frac{\gamma^2 + \beta - \alpha}{2\gamma}$$

visí arci na podmínce, že jmenovatel, tedy γ jest různé od nully.

Jakožto příklad vezměme v úvahu rovnici

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} = c,$$

a supponujme nejdříve c různé od nully.

Položivše $\sqrt[3]{a} = x$, $\sqrt{b} = y$, má, jsou-li a, b, c dány, x tři hodnoty, y dvě hodnoty, $x + y$ tedy šest obecně na vzájem různých hodnot. Vyhovuje tedy obecně jediný system x, y, rovnicím

$$(1) \qquad x^3 = a, \quad y^2 = b, \quad x + y = c$$

t. j. x a y lze racionalně vyjádřiti pomocí a, b, c. Proveďme počet. Eliminací y z (1) máme pro x rovnice

$$(c - x)^2 = b; \quad x^3 = a.$$

Násobivše první x, odečteme obě, i obdržíme

$$-2cx^2 + (c^2 - b)\,x + a = 0.$$

Z této a z rovnice též kvadratické $(c - x)^2 = b$ odstraňme člen x^2, i obdržíme linearnou rovnici pro x

$$(b + 3c^2)\,x = a + 2c\,(c^2 - b),$$

z níž v případě $b + 3c^2 \gtrless 0$ lze x vypočísti jakožto racionalnou funkci hodnot a, b, c; y pak plyne v témž tvaru z $y = c - x$.

Máme tedy

$$x = \frac{a + 2c\,(c^2 - b)}{b + 3c^2}, \quad y = \frac{c\,(3b + c^2) - a}{b + 3c^2}$$

t. j.

$$\sqrt[3]{a}=\frac{a+(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2-b]}{b+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2},$$

$$\sqrt[3]{b}=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})[3b+(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2]-a}{b+3(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})^2},$$

tedy $\sqrt[3]{a}$ a $\sqrt[3]{b}$ vyjádřeny racionalně pomocí a, b a součtu $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$.

V případě $b+3c^2=0$ tyto formule nejsou odvozeny; a skutečně lze ukázati, že v tomto případě kvadratické pro x odvozené rovnice, totiž

$$-2cx^2+(c^2-b)x+a=0,\quad x^2-2cx+c^2-b=0$$

mají dva společné kořeny, tak že je více nelze racionalně vyjádřiti v koefficientech. Abychom to ukázali, stačí ukázati, že rovnice jsou totožné t. j. že

$$(2)\qquad \frac{c^2-b}{-2c}=-2c;\quad \frac{a}{-2c}=c^2-b,$$

a že nemají dvojnásobný kořen.

První tato rovnice vyžaduje, aby $c^2-b=4c^2$ t. j. $b+3c^2=0$ a toť vyplněno. Vzhledem k druhé uvažme, že dle (1) patrně

$$c^3=a+3xy(x+y)+y^3$$

t. j. $$c^3=a+3cxy+by=a+y(3cx+b)$$

t. j. $$c^3=a+y[3c(c-y)+b]=a+y[3c^2+b-3cy],$$

tedy vzhledem ku supposici $3c^2+b=0$, máme

$$c^3=a-3bc,\quad \text{čímž } a=c^3+3bc.$$

Nyní

$$\frac{a}{2c}=\tfrac{1}{2}(c^2+3b).$$

Ale vzhledem ku supposici $3c^2+b=o$ jest $c^2+b=-2c^2$, čímž

$$\frac{a}{2c}=\tfrac{1}{2}(-2c^2+2b)\ \text{t. j.}\ \frac{a}{-2c}=c^2-b,$$

tedy i druhá výminka (2) vyplněna. — Druhá z napsaných kvadratických rovnic jest $(c-x)^2=b$ a ta by mohla míti dvojnásobný kořen jen při $b=0$; pak by ale vzhledem k $3c^2+b=0$ musilo $c=0$, proti supposici. Při $c\gtrless o$ a $3c^2+b=0$ nelze tedy x a y racionalně vyjádřiti pomocí a, b, c; ukážeme, že pak

x a y možno vyjádřiti pomocí c a pomocí irracionality $\sqrt{3}$. Skutečně máme při $3c^2+b=0$ dle (1) rovnici

$$3(x+y)^2+y^2=0 \text{ t. j. } 3\left(\frac{x}{y}+1\right)^2+1=0,$$

z čehož

$$\frac{x}{y}=\frac{\pm\sqrt{-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

Z této a z rovnice $x+y=c$ obdržíme

$$x=c(1\pm\sqrt{-3}),\quad y=\mp c\sqrt{-3}.$$

Máme tedy tento výrok: „Při $c \gtrless 0$ a $3c^2+b\gtrless o$ lze x, y racionalně vyjádřiti pomocí hodnot x^3, y^2, $x+y$; při $c\gtrless 0$, $3c^2+b=0$, lze x, y vyjádřiti racionalně pomocí c a $\sqrt{-3}$."

Jsou-li v rovnici $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=c$ hodnoty a, b, c kladné racionalné hodnoty, tu patrně nastává případ první, a tedy soudíme, že musí odmocnina $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt{b}$ býti racionalnou.

Přihlédněme k případu $c=0$. Pak máme z rovnic (1) ihned

$$x=\frac{a}{b},\quad y=-\frac{a}{b};$$

jsou-li tedy v tomto případě a, b racionalné, jsou též x a y t. j. $\sqrt[3]{a}$ a $\sqrt{b}$ racionalné.

Podejme příklad k onomu výminečnému případu.

Učinivše $a=-8$, $b=-3$, $x=\sqrt[3]{a}=1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$, $y=\sqrt{b}=\sqrt{3}\sqrt{-1}$, máme $x+y=1$. Ačkoli tedy

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt{-3}=1,$$

nelze tyto odmocniny vyjádřiti racionalně pomocí hodnot

$$-8, -3, 1;$$

příčina vězí v tom, že v tomto případě $b+3c^2=-3+3.1^2=0$. Stanovíme-li x rovnicí $x^3=-8$ a y rovnicí $y^2=-3$, má x hodnoty -2, $1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$, $1+\sqrt{3}\sqrt{-1}$, a y hodnoty $\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}$; má tedy součet $x+y$ těchto šest hodnot:

$$-2\pm\sqrt{3}\sqrt{-1},\ 1-\sqrt{3}\sqrt{-1}\pm\sqrt{3}\sqrt{-1},$$
$$1+\sqrt{3}\sqrt{-1}\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}.$$

Z těchto šesti rovnají se *dvě* jednici totiž

$$1-\sqrt{3}\sqrt{-1}+\sqrt{3}\sqrt{-1}=1+\sqrt{3}\sqrt{-1}-\sqrt{3}\sqrt{-1}=1.$$

Položivše tedy

$$x=\sqrt[3]{-8}=1+\sqrt{3}\sqrt{-1},\ y=\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\sqrt{-1},$$

vyhovíme taktéž rovnici $x+y=1$.

Abychom vytkli obecnější applikaci předcházejících úvah, napišme rovnici

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}=a.$$

Platí-li tato rovnice a jsou-li $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a kladná, racionalná čísla, pak musí nutně býti všecky napsané odmocniny racionalné. Neboť, položivše obecně $a_k = x_k{}^2$, máme $n+1$ rovnici

$$x_1^2=a_1,\ x_2^2=a_2,\ \ldots,\ x_n{}^2=a_n$$
$$x_1+x_2+\ldots+x_n=a.$$

Z těchto rovnic lze každou neznámou jakožto racionalnou funkci hodnot $a_1, a_2, \ldots a_n$, a nalézti. Neboť, dány-li tyto hodnoty, má součet kořenů prvních n rovnic jednu z hodnot $\pm\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}\pm\ldots\pm\sqrt{a_n}$; aby kořeny vyhověly i poslední rovnici, nutno vzhledem k učiněné supposici o $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a vzíti za x_k kladný kořen z a_k; vyhovuje tedy všem $n+1$ rovnicím jediný system neznámých, pročež lze tyto racionalně nalézti. Je-li na př. $n=3$, jde o to, vyjádřiti hodnoty $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ hovící rovnici

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=m$$

racionalně pomocí a, b, c, m; aneb, co jest totéž, jde o stanovení x, y, z ze čtyř rovnic

$$x^2=a,\ y^2=b,\ z^2=c,\ x+y+z=m.$$

Nalezneme známou cestou

$$x=\frac{m}{2}-\frac{(b+c-a)^2}{4m\lambda}+\frac{m^3}{4\lambda}-\frac{am^2-bc}{m\lambda},$$
$$y=\frac{m}{2}-\frac{(a+c-b)^2}{4m\mu}+\frac{m^3}{4\mu}-\frac{bm^2-ac}{m\mu},$$
$$z=\frac{m}{2}-\frac{(a+b-c)^2}{4n\nu}+\frac{m^3}{4\nu}-\frac{cm^2-ab}{m\nu},$$

kde k vůli stručnosti λ, μ, ν značí tyto hodnoty

$$\lambda = b + c - a - m^2,$$
$$\mu = a + c - b - m^2,$$
$$\nu = a + b - c - m^2.$$

Správnost těchto formulí můžeme tím kontrolovati, že místo a, b, c, m napíšeme resp. $x^2, y^2, z^2, x + y + z$; musejí pak býti identicky správné. Jeť patrné, že platnost jejich předpokládá, že žádná z hodnot m, λ, μ, ν nevymizí; jsou-li $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ kladné odmocniny z kladných čísel, jsou tyto výminky patrně vyplněny.

Poznámka o upotřebení principu energie na účinky elektrického proudu.

Sděluje

dr. A. Seydler.

Princip energie zní v nejstručnější formuli:

Součet energie ve světě jest stálý.

Upotřebením na jednotlivou soustavu hmot obdržíme následující proň výraz:

Energie při jakýchkoli dějích v soustavě hmotné spotřebovaná (práce vykonaná) musí se rovnati energii v jiných tvarech získané.

Mathematický vzorek pro tuto větu obdrželi bychom, kdybychom na jedné straně rovnice umístili všechny *záporné*, na druhé straně všechny *kladné* změny energie. Rozdíl kladných a záporných změn energie není však podstatný, ano se označení týchž změn průběhem celého děje měniti může. (Příklad: změna práce gravitací vykonané a kinetické energie při planetárním pohybu). Podstatnějším jeví se roztřídění v různé tvary energie. A tu rozeznáváme hlavně:

a) *energii kinetickou* neb *aktualnou* T čili energii viditelného pohybu;

b) *energii thermickou* U, která se od mnohých pokládá za energii neviditelného (molekularného) pohybu;

c) *α)* *buď práci vykonanou* různými silami (mechanickými, elektrickými, chemickými atd.) L;