Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O způsobu Tesánkově, jak rozkládati možná čísla celistvá v činitele jednotlivé

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 120--124

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121140

$$\lim \frac{u_n^x}{m^{x+1}} \sum_1^{m-1} (m-1)^x = \frac{u_n^x}{x+1}, \tag{5}$$

poněvadž všecky ostatní členy mají zde mez $= 0$.

Ze vzorce (4) obdržíme pak hodnotami součtů mezných dle (5):

$$i_{n+1} = A_n p_n (1-u_n)\left(1 + \frac{u_n}{2} + \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^3}{4} + \ldots\right)$$

čili

$$i_{n+1} = A_n p_n (1-u_n) \cdot \frac{1}{u_n}\left[u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + \frac{u_n^4}{4} + \ldots\right].$$

Řada $u_n + \frac{u_n^2}{2} + \frac{u_n^3}{3} + \frac{u_n^4}{4} + \ldots$ jest patrně řadou logarithmickou a rovná se*):

$$-l(1-u_n),$$

z čehož konečně:

$$i_{n+1} = -A_n p_n \frac{1-u_n}{u_n} l(1-u_n), \tag{6}$$

čili zavedením $1 - u_n = s_n$, také

$$i_{n+1} = -A_n p_n \frac{s_n \cdot l s_n}{1-s_n}. \tag{6'}$$

(Pokračování.)

O způsobu Tesánkově, jak rozkládati možná čísla celistvá v činitele jednotlivé.

Pro žáky středních škol napsal

Dr. F. J. Studnička.

§. 1.

Celistvá čísla jsou, jakož obecně známo, buď *sudá* nebo *lichá*, sudá obsahují činitele 2, lichá pak buď činitele liché nebo žádné — 1 se tu za činitele nepovažuje —, a slují tu čísla *kmenná*, v onom pak případě čísla *složená*, při čemž jedině 2 jakožto číslo sudé jest zároveň číslem kmenným a to nejmenším.

*) Tamže, str. 169.

Poněvadž při provádění rozmanitých počtů bývá prospěšno, ba mnohdy i nutno věděti, zdali číslo nějaké jest kmenným anebo složeným, a v tomto případě pak třeba znáti jeho činitele, jde především o to, jak možná co nejrychleji kterékoli číslo celistvé s této stránky vyšetřiti.

Že číslo nějaké a obsahuje jiné číslo b jakožto činitele, vyjadřuje se též slovy, že a jest *násobkem* čísla b, nebo že a jest číslem b *dělitelno*, anebo že *nulla* jest *zbytek*, dělíme-li číslo a číslem b, kteréžto vlastnost čísel a, b značí se symbolem

$$a = mb \quad \text{nebo} \quad Z\frac{a}{b} = 0.$$

Známe-li jakost libovolného čísla a, z níž plyne, že jest dělitelno nějakým číslem b, pravíme, že známe příslušné *pravidlo dělitelnosti*. Jestli na př. $b = 2$, nutno, aby číslo a bylo sudým, neboli aby na místě jednotek byla číslice, vyjadřující číslo sudé; jestli $b = 3$, nutno, aby součet číslicový byl dělitelný 3; jestli $b = 5$, nutno, aby na místě jednotek byla buď 0 nebo 5; atd.

Pro různé hodnoty dělitele b nutno tedy znáti rozličná příslušná pravidla dělitelnosti. A poněvadž různých těchto hodnot jest nekonečně mnoho, bylo by nutno, aby se tímto způsobem rozhodlo o dělitelnosti nějakého čísla, znáti též nekonečně mnoho příslušných pravidel, což nelze však od nikoho žádati a to tím méně, jelikož s rostoucí hodnotou čísla b se též zvyšuje složitost příslušného pravidla dělitelnosti. Obmezuje se tedy počtář jen na menší hodnoty čísla b, obyčejně na

$$b = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 \text{ a } 11,$$

a vyhledává činitele jiné, zejména kmenné, jako

$$b = 7, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

způsobem přímým, t. j. pokusným dělením.

Při tom není nutno, jakož známo, dále jíti nežli ku

$$b < \sqrt{a},$$

jelikož s činitelem větším spojen tu jest činitel menší, takže znajíce činitele tohoto, známe i onoho. Podlé toho nutno tedy neznajícímu zvláštních pravidel probrati všechna kmenná čísla od 7 až do $b < \sqrt{a}$ a přímým dělením zkusiti, zda-li jsou v čísla a co činitel obsažena čili nic, což vyžaduje tím delšího počítání, čím větší jest a. Jsouť však pravidla, podlé nichž možná přijíti mnohem rychleji k cíli, a k těm patří i *pravidlo Tesánkovo*,*) jež co velmi jednoduché a tedy pro střední školy přístupné budiž tuto vyloženo.

§. 2.

Tesánkovo jednoduché pravidlo, jež s dvěma složitějšími bylo uveřejněno ve sborníku „Abhandlungen der Privatgesellschaft zur Aufnahme der Mathematik, der vaterländischen Geschichte und der Naturgeschichte“ 1. Bd. Prag, 1775., týče se činitelů větších nežli 5, jelikož dělitelnost menšími čísly kmennými, jako 2, 3, 5, snadno se na první pohled poznává, a zakládá se v následující úvaze:

Každé číslo liché — o sudých není tu řeči, jelikož jsou dělitelna číslem 2 — možná vyjádřiti tvarem $2a + 1$. Jest-li dělitelno číslem $(2x + 1)$, musí představovati výraz

$$\frac{2a+1}{2x+1} \text{ a tedy i } \frac{2a+1}{2x+1} - 1 = \frac{2\,(a-x)}{2x+1}$$

číslo celistvé, z čehož plyne, poněvadž činitel 2 není dělitelný číslem $(2x + 1)$, že musí číslo $(a - x)$ dělitelným býti číslem $(2x + 1)$ anebo že

$$Z \frac{a-x}{2x+1} = 0.$$

Chceme-li tedy zkoušku začíti kmenným číslem

$$7 = 2x + 1,$$

obdržíme z této podmínky přímo

$$x = 3,$$

z čehož patrno, že nutno napřed vyšetřiti číslo

$$a - 3 = \frac{(2a+1) - 7}{2},$$

zda-li jest dělitelno 7. Nepočíná se tu tedy daným číslem

*) *Jan Tesánek,* slavný svého času mathematik český, který si dopisoval s nejčelnějšími učenci tehdejšími a byl vyznamenán *Lagrangem, Laplacem* a j., narodil se 9. prosince 1728 v Brandýse nad Labem a zemřel co direktor studií na universitě Pražské 22. června 1788. Král. č. společnost nauk postavila mu sama pomník mramorový, na němž vyznačen jest co

MAGNI NEUTONI COMMENTATOR.

$(2a + 1)$, nýbrž mnohem menším $(a - 3)$, a jde se na nejvýš ku kmennému číslu

$$b < \sqrt{2a + 1}.$$

Není-li $(a - 3)$ dělitelno číslem 7, učiní se

$$x = 4$$

a zkouší se, zda-li číslo $a - 4$ jest dělitelno číslem 9, jelikož

$$2x + 1 = 9.$$

Avšak 9 obsahuje činitele 3, o němž víme, že není obsaženo v čísle daném $(2a + 1)$, takže nutno dále jíti a položiti

$$x = 5$$

a zkusiti, zda-li číslo $a - 5$ jest dělitelno číslem 11, a t. d.

Jak patrno, *zmenšuje* se tu číslo $(a - 3)$ postupně o 1, dělitel se *zvětšuje* stejným krokem o 2, a pokaždé se zkouší, zda-li se tu kde objeví zbytek 0 čili nic; přijde-li se snižováním dělitele na číslo složené, přeskočí se. A tímto postupem pokračuje se tak dlouho, až se vyskytne buď nějaký činitel anebo se přijde ku poslednímu kmennému číslu děliteli

$$b < \sqrt{2a + 1}.$$

Nejlépe se pochopí tento postup v určitých případech, jimiž tu končíme s přáním, aby si každý provedl ještě několik jiných složitějších.

Má-li se vyšetřiti složení čísla 437, vypočte se napřed

$$a - 3 = \frac{437 - 7}{2} = 215,$$

načež se pozná, že největší dělitel hledaný tu může býti 19; počet sám vypadá takto:

$$Z\frac{215}{7} = 5, \quad Z\frac{213}{11} = 4, \quad Z\frac{212}{13} = 4,$$
$$Z\frac{210}{17} = 6, \quad Z\frac{209}{19} = 0,$$

takže 19 se jeví býti činitelem čísla 437; i jestiť $19 . 23 = 437$.

Chceme-li vyšetřiti, zda-li je číslo 1999 kmenným čili nic, ustanovme, jelikož není 2, 3 nebo 5 dělitelno,

$$a - 3 = \frac{1999 - 7}{2} = 996,$$

načež vědouce, že nutno zkoušeti nanejvýš do dělitele 43, obdržíme tento počet:

$$Z\frac{996}{7}=2,\quad Z\frac{994}{11}=4,\quad Z\frac{993}{13}=5,$$
$$Z\frac{991}{17}=5,\quad Z\frac{990}{19}=2,\quad Z\frac{988}{23}=22,$$
$$Z\frac{985}{29}=28,\quad Z\frac{984}{31}=23,\quad Z\frac{981}{37}=19,$$
$$Z\frac{980}{39}=5,\quad Z\frac{979}{41}=36,\quad Z\frac{978}{43}=32,$$

z čehož patrno, že číslo 1999 jest kmenným.

Že tu možná při zkoušení ještě rychleji někdy přijíti k cíli, poznává se z toho, že číslo $(a - x)$ obdržeti může na konci 0.

Podobný základ mají ostatní dvě pravidla Tesánkova, kde děliteli dán tvar $10a + b$ a $100a + 10b + c$. Vedouce rychleji k cíli, jsou zároveň složitější.

Poznámka k úlohám 20. a 21. v ročníku XIII. tohoto časopisu.

Napsal

Ed. Weyr.

Řešení podaná v předcházejícím čísle tohoto ročníku založena na tom, že $\sqrt{\alpha}$ a $\sqrt{\beta}$ vyjádřeny racionalně pomocí α, β a součtu $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ aneb rozdílu $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ atd. Možnost takového vyjádření lze bez počtu přímo viděti. Neboť učinivše $\sqrt{\alpha}=x$, $\sqrt{\beta}=y$ máme v první úloze

$$x+y=\gamma,\ x^2=\alpha,\ y^2=\beta.$$

Jsou-li α, β, γ dány (arci tak, že resultant těchto tří rovnic vymizí), vyhovuje všem třem rovnicím jediný system hodnot x, y, kteréž tedy lze *racionalně* vyjádřiti pomocí α, β, γ. Skutečně má x hodnoty $\pm\sqrt{\alpha}$, y pak $\pm\sqrt{\beta}$ a poněvadž čtyry hodnoty $\pm\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ jsou obecně veskrze různy, může jen jedna z nich býti rovna γ. Racionalné vyjádření by bylo jen tehdy nemožným, kdyby alespoň dva systemy x, y daly též součet γ. Jsou-li, jakož předpokládáme, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pak z oněch čtyř hodnot mohou patrně se rovnati jen $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ a $-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$; v tomto