Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Příspěvek k parabole a k místu geometrickému

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 113--116,117--119

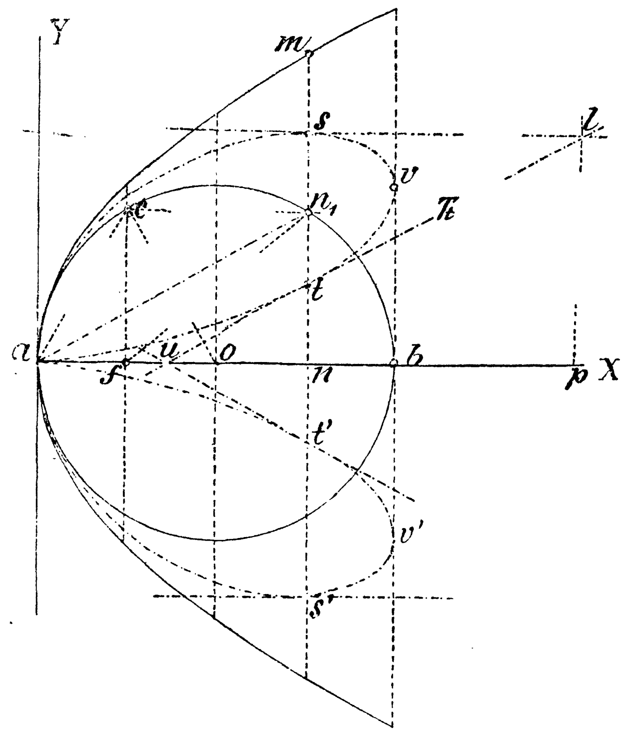
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121133

Příspěvek k parabole a k místu geometrickému.

Podává studujícím prof. **Václav Hübner** na Král. Vinohradech.

(Věnuje památce své zesnulé dcerušky Mařenky.)

Arab Abu l' Vafa Albuzdžani z Buzdžanu v malém městě perské krajiny horské Chorsanu (* 960, † 998) uvádí pravidlo pro sestrojení paraboly: Nad úsečkou $\overline{ab}$ osy paraboly (a vrchol)



Obr. 1.

opišme kružnici, v některém jejím bodě n vztyčme kolmici nn_1 a učiňme $\overline{nm} = \overline{an_1}$, i jest bod m bodem paraboly. Jsou-li souřadnice bodu m: $x = \overline{an}$, $y = \overline{nm}$, jest $\overline{nn_1} = \sqrt{y^2 - x^2}$ a $\overline{nn_1}^2 = \overline{an} \cdot \overline{nb} = x(\overline{ab} - x)$, tudíž $y^2 - x^2 = \overline{ab} \cdot x - x^2$ neboli $y^2 = \overline{ab} \cdot x$ (vrcholová rovnice paraboly).

Z rovnice této shledáváme, že $2p = \overline{ab}$, t. j. $p = \frac{\overline{ab}}{2}$ a ohnisko f jest vzdáleno od vrcholu o $\frac{\overline{ab}}{4}$. Tímto způsobem možno sestrojiti jen část paraboly, známe-li vrchol a a určitou úsečku $\overline{ab}$ na její ose, poněvadž kolmice, jichž vzdálenost od vrcholu jest větší než průměr kružnice, této neprotínají.

Jsou-li souřadnice bodu m (na parabole) x, y, souřadnice bodu n_1 (na kružnici) x, y_1, platí o nich rovnice $y^2 = 2px$, $y_1^2 = 2px - x^2$.

Bod s uprostřed úsečky $\overline{mn_1}$ má souřadnice: $x, y_s = \frac{y + y_1}{2} =$ $= \frac{\pm\sqrt{2px} \pm \sqrt{2px - x^2}}{2}$; upravíme-li tuto rovnici, obdržíme $2y_s \mp \sqrt{2px} = \pm\sqrt{2px - x^2}$ neboli $4y_s^2 \mp 4y_s\sqrt{2px} + 2px =$ $= 2px - x^2$ a konečně $(4y_s^2 + x^2)^2 - 32pxy_s^2 = 0$, rovnici geometrického místa bodů, půlících úsečky na pořadnicích mezi kružnicí o poloměru p a parabolou.

Rovnici geometrického místa lze psáti též ve tvaru

$$16y^4 + 8xy^2(x - 4p) + x^4 = 0, \tag{1}$$

nebo
$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x(4p - x) \pm 2x\sqrt{2p(2p - x)}}. \tag{2}$$

(Místo y_0 psáno jen y).

Půlíme-li dále úsečky na pořadnicích $y, -y_1$ a obráceně, obdržíme další body křivky. Aby y mělo hodnotu reálnou, musí $2p - x > 0$, t. j. $x < 2p$; pro $x = 2p$ jest $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2p \cdot 2p} = \pm p$. (Body v, v'.) Je-li $x = 0$, jest též $y = 0$. (Bod a.)

Směrnice tečny v libovolném bodě určena jest rovnicí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{8py^2 - 4xy^2 - x^3}{4y(4y^2 + x^2 - 4px)};$$

pro body $v(2p, p)$, $v'(2p, -p)$ jest

$$\operatorname{tg}\alpha = \mp\frac{8p^3 - 8p^3 - 8p^3}{4p(4p^2 + 4p^2 - 8p^2)} = \mp\frac{8p^3}{0} = \mp\infty,$$

t. j. $\alpha = 90^0$.

Aby tečna byla || s osou x, musí $\operatorname{tg}\alpha = 0$,

t. j. $8py^2 - 4xy^2 - x^3 = 0$ a $y = \pm \frac{x}{2}\sqrt{\frac{x}{2p-x}}$. Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice 1., obdržíme:

$$\frac{x^6}{(2p-x)^2} + 2\frac{x^4}{(2p-x)}(x-4p) + x^4 = 0$$

a odtud:

1). $x = 0$, $y = 0$. (Bod a), 2). $x = \frac{3p}{2}$, $y = \pm\frac{3p}{4}\sqrt{3}$. (Body s, s'.)

Z rovnice (2). plynou pro $x = \frac{3p}{2}$ tyto 4 hodnoty za y:

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3p}{2}\left(4p - \frac{3p}{2}\right) \pm 3p\sqrt{2p\left(2p - \frac{2p}{2}\right)}} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15p^2}{4} \pm 3p^2}$$

čili $$y_{12} = \pm\frac{3p}{4}\sqrt{3} \text{ (body } s, s'\text{) a}$$

$$y_{34} = \pm\frac{p}{4}\sqrt{3} \text{ (body } t, t'\text{)},$$

t. j. $\overline{ns} = 3\,\overline{nt}$.

Směrnice tečny v bodě t $\left(\frac{3p}{2}, \frac{p}{4}\sqrt{3}\right)$ jest $\operatorname{tg}\alpha =$

$= \frac{-3p^3}{-3p^3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a $\sphericalangle\alpha = 30^0$.

Rovnice tečny T_t jest: $\left(y - \frac{p}{4}\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{3p}{2}\right)$ a po náležité úpravě $12y - 4x\sqrt{3} + 3p\sqrt{3} = 0$; průsečík její u s osou x má souřadnice: $\frac{3p}{4}$, 0. Tečny v bodech s, t protínají se v bodě l, jehož $x = \overline{ap} = 3p$; kromě toho jest $\overline{np} =$ $\overline{ap} - \overline{an} = \frac{3p}{2} = \overline{an}$.

Směrnice tětivy $\overline{an_1}$ jest $A_{\overline{an_1}} = \frac{\overline{nn_1}}{\overline{an}} = \frac{\frac{p}{2}\sqrt{3}}{\frac{3p}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a směrnice tečny T_t jest $A_{Tt} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tudíž $\overline{an_1} \parallel T_t$: ježto $\overline{nt} = \overline{tn_1}$, jest též $\overline{au} = \overline{un}$ a $\triangle ann_1 \cong tsl$. Plocha $\triangle ann_1 = \frac{3}{2}\frac{p^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\triangle aoc \left(\overline{fc} = \frac{p}{2}\sqrt{3}\right)$, $\triangle afn_1 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\triangle aoc$; tudíž $\triangle nfn_1 = \triangle aoc$. Má-li tečna státi kolmo na ose x, musí jmenovatel zlomku $\frac{8py^2 - 4xy^2 - x^3}{4y(4y^2 + x^2 - 4px)}$ býti roveň nule, t. j. buď $y = 0$ a tudíž $x = 0$ (bod a), anebo $4y^2 + x^2 - 4px = 0$, neboli $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{x(4p - x)}$ a x z rovnice (1). . . ., $x = 2p$ (body c, c').

V bodě a lze tedy sestrojiti dvě tečny (X, Y), jest tedy dvojnásobným bodem křivky a zároveň bodem úvratu. Křivka jest vepsána do obdélníka o stranách: $\overline{ab} = 2p$, $\overline{ns} = \frac{3p}{4}\sqrt{3}$. Přimyslíme-li si ještě souměrnou část této křivky k ose Y, vznikne křivka, která se podobá tvarem svým čtyroku. Bod a byl by pak čtyrnásobným bodem křivky, v němž dva dvojnásobné body dotyčné se sjednocují, osy X, Y jsou dvojnásobnými tečnami křivky a dělí ji zároveň na čtyři části souměrné i shodné.

Sestrojení křivky z daného $2p = \overline{ab}$, jest z předešlých úvah zřejmo.

Rovnice polární čtyroku jest $\varrho = r \sin 2\varphi$ (r poloměr kružnice), ze kteréž lze snadno jednotlivé body křivky sestrojiti. Přejdeme-li do pravoúhlé soustavy souřadnic ($x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$), odvodíme rovnici $(x^2 + y^2)^3 - 4r^2x^2y^2 = 0$, která jest 6-tého stupně. Přímka $y = \pm x$ protíná křivku v bodech $x = y = 0$ (bod čtyrnásobný) a $x = y = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$ (vrcholy křivky). Jsou-li přímky $y = \pm x$ osami souřadnic, obdržíme pak rovnici křivky v této soustavě ve tvaru: $(x^2 + y^2)^3 - r^2(x^2 - y^2) = 0$.

Je-li $p = 0$, má rovnice (1) tvar

$$16y^4 + 8x^2y^2 + x^4 = 0, \quad \text{t. j.} \quad (4y^2 + x^2)^2 = 0$$

čili
$$4y^2 + x^2 = 0 \quad \text{a} \quad y = \pm \frac{1}{2} ix.$$

Křivka se rozpadá ve 4 přímky imaginárné jdoucí počátkem, z nichž dvě a dvě spolu splývají.

Píšeme-li rovnici 1. ve tvaru

$$\frac{16y^4}{x - 4p} + 8xy^2 + \frac{x^4}{x - 4p} = 0,$$

obdržíme pro $p = \infty$, $8xy^2 = 0$ čili $x = 0$, $y = 0$, křivka přechází v osy $\pm X$ a $\pm Y$.

Rovnice polární této křivky jest $r = \dfrac{32p \cos\varphi \sin^2\varphi}{(4 - 3\cos^2\varphi)^2}$,

kterou odvodíme z rovnice (1.), dosadíme-li za $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, při čemž bod a jest pólem. K bodu r na př. přísluší úhel φ, jenž určen rovnicí $\cos\varphi = \dfrac{2p}{r}$ a délka průvodiče $r = p\sqrt{5}$.

Úhel φ příslušící maximální hodnotě průvodiče vyšetříme z rovnice

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{32p \sin\varphi\,(3\cos^2\varphi - 1)}{(4 - 3\cos^2\varphi)^2} - \frac{32p\cos\varphi\,(1 - \cos^2\varphi) \,.\, 12\cos\varphi\sin\varphi}{(4 - 3\cos^2\varphi)^3} = 0$$

čili $(3\cos^2\varphi - 1)(4 - 3\cos^2\varphi) - 12\cos^2\varphi\,(1 - \cos^2\varphi) = 0$ a odtud $3\cos^4\varphi + 3\cos^2\varphi - 4 = 0$; řešením této rovnice dostaneme $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{-3 + \sqrt{57}}{6}}$ a úhel $\varphi \doteq 29^0\,27'$. Průvodič jest téměř $\|$ s Tt. Nejmenší hodnota průvodiče $(r = 0)$ přísluší k $\sin\varphi = 0$, $(\varphi = 0)$ a $\cos\varphi = 0$, $(\varphi = 90^0)$.

Dodati jest, že $\overline{as} = \sqrt{\dfrac{63}{16}p^2} = \dfrac{p}{4} \cdot 7{\cdot}93725 = 1{\cdot}98 \ldots p \doteq \overline{ab}$, $\overline{st} = \dfrac{p}{2}\sqrt{3}$, délka průvodiče patřícího k úhlu $\varphi = 60^0$ jest $r \doteq 1{\cdot}2p$.

Položíme-li počátek soustavy souřadnic do středu úsečky $\overline{ab} = 2p$, jest rovnice paraboly $y^2 = 2p(p + x)$, rovnice kruhu $y^2 = p^2 - x^2$ a rovnice geometrického místa $16y^4 - 8y^2(3p^2 + 2px - x^2) + 4p^3x + 6p^2x^2 + 4px^3 + x^4 + p^4 = 0$.

Je-li: 1). $x = 0$, jest $y = \pm \frac{p}{2}\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}}$; 2). $x = p$, jest $(y^2 - p^2)^2 = 0$ neboli $y = \pm p$ (body v, v'); 3). $x = -p$ jest $16y^4 = 0$ a $y = 0$ (vrchol paraboly a).

Připomenutí:

Jsou-li dány vrcholové rovnice dvou kuželoseček, na př.

$$\text{ellipsy} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 \quad \text{a}$$
$$\text{kruhu} \quad y^2 = 2px - x^2,$$

jest rovnice geometrického místa bodů půlících úsečky na pořadnicích:

$$16y^4 + 8xy^2\left(x + \frac{p}{a}x - 4p\right) + x^4\left(1 - \frac{p}{a}\right)^2 = 0;$$

při $a = \infty$ přejde rovnice tato ve tvar

$$16y^4 + 8xy^2(x - 4p) + x^4 = 0 \qquad \text{(rovn. 1.)}$$

a při $a = p$ (dva shodné kruhy), jest $y^4 + xy^2(x - 2p) = 0$ čili $y^2(y^2 + x^2 - 2px) = 0$ . . . geometrické místo jest: $y = 0$, $y^2 = 2px - x^2$ (osa X a daná kružnice).

Je-li dána ellipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ a

kružnice $x^2 + y^2 = a^2$,

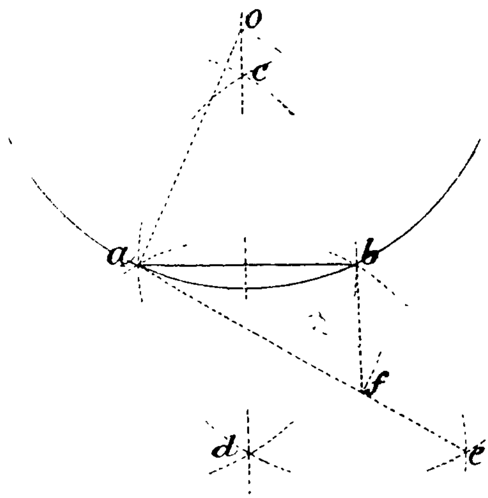
přechází geometrické místo ve dvě ellipsy, jichž rovnice jsou:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{a} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 1.$$

Dodatek:

Řečený Arab uvádí též pravidlo, kterak obdržíme přibližně stranu pravidelného 7-úhelníka, jestliže rozpůlíme stranu pravidelného trojúhelníka vepsaného do téhož kruhu. (Viz Časopis ročník 41., str. 245.) Je-li poloměr kruhu r, je strana pravidelného trojúhelníka vepsaného $s_3 = r\sqrt{3} = 1{\cdot}73205 \ldots r$ a strana pravidelného 7-úhelníka do téhož kruhu vepsaného $s_7 \doteq \doteq 2r \sin 25^0 43' = 0{\cdot}86784 \ldots r$. Srovnáním shledáme, že $\frac{s_3}{2} = 0{\cdot}866 \ldots r$; absolutní chyba jest $< \frac{1}{2} \frac{1}{10^2}$, t. j. $< 0{\cdot}005$.

Je-li dána strana pravidelného sedmiúhelníka $ab = s_7$, určí se střed a poloměr opsané kružnice:



Obr. 2.

Z krajních bodů a, b opišme oblouky poloměrem $\overline{ab}$, které se protnou v bodech c, d; tímž poloměrem opišme z d oblouk, který první oblouk protne v e; v bodě b vztyčme kolmici na $\overline{ab}$, která protne spojnici ae v f. I jest $\overline{ao} = \overline{af}$ poloměr a o střed opsané kružnice. Konstrukce tato jest přibližná, neboť dle předešlého jest $s_7 \doteq \frac{s_3}{2} \doteq \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Z obrazce patrno, že $\overline{ab} = s_7 = \sqrt{\overline{af}^2 - \overline{bf}^2}$ a ježto z Δ pravoúhlého abf ($\sphericalangle bae = 30^0$ plyne, že $\overline{bf} = \overline{af} \sin 30^0 = \frac{\overline{af}}{2}$, jest $s_7 = \sqrt{\overline{af}^2 - \frac{\overline{af}^2}{4}} = \frac{\overline{af}}{2}\sqrt{\ }$ a tudíž $\overline{af} = \overline{ao} \doteq r$.