Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jindřich Svoboda

Několik poznámek ku článku Dra V. V. Heinricha: Příspěvek k theorii Darvinových oscillujících satellitů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 37--42

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121131`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1919

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

45. o Vitruvia při popisu nivelačního přístroje. Jmenuje libelu ustavenou olovnicí, dioptry ustavené vodou ve žlábku a chorobates, který stejně jako Vitruvius považuje za nejpřesnější. Proto jej také popisuje. Nejdůležitější jest však popis celého postupu, při němž muž nějaký drží svisle lať s posuvným prkénkem, opatřeným bílým papírem. Výška této značky nad zemí se měří. Chce-li pak zjistiti základnu hory, tedy horizontální vzdálenost dvou míst nestejné výšky, učiní tak latí 12 loket dlouhou, na jejímž jednom konci jest připevněna svislá tyč, na druhém zavěšen olovnice. Vodorovná poloha lati stanoví se krokvicí uprostřed. Že jest odtud k nivelaci profilovou latí jen krok, jest na snadě. Tento postup byl jistě již dávno znám, ale popis jeho nalezl jsem teprve později. (Dokončení.)

Několik poznámek ku článku Dra V. V. Heinricha: Příspěvek k theorii Darvinových oscillujících satellitů.[1]

Před krátkým časem uveřejnil Dr. Heinrich v „Astronomische Nachrichten“ a v Král. Učené Spol. Náuk pojednání „Über die singulären Punkte gewisser Ungleichheiten im asteroidischen Problem.“[2] Jest to práce založená na výsledcích, ku kterým dospěl v článku „Příspěvek k theorii Darvinových oscillujících satellitů“ uveřejněném před několika léty.[1] Pročítaje tento článek shledal jsem, že výpočty Heinrichovy jsou nesprávné, takže nové pojednání, založeno jsouc na chybných výsledcích, postrádá smyslu.

„Příspěvek k theorii Darvinových oscillujících satellitů“ dělí se na tři části. První část obsahuje známou theorii oscillujících satellitů za předpokladu, že rušivá planeta obíhá kolem Slunce v kruhu. V druhé části[3]) pokusil se autor o theorii pohybů tělíska, vezme-li se v úvahu *excentricita dráhy rušivé planety*. Vedl si podobným způsobem, jaký při řešení analogi-

---

[1]) Čas. pro pěst. mathem. a fys., LXII., str. 175. a 407.

[2]) Astr. Nachr. Bd. 206. p. 77. a násl.

[3]) Str. 410.

ckého případu naznačil Tisserand[4]), a dospěl k těmto rovnicím pro pohyb tělíska: [5])

$$\ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M\xi - Q\eta + \left\{ \begin{matrix} \text{členy druhého a} \\ \text{vyšších stupňů} \end{matrix} \right\} =$$
$$= K - \varkappa M - \lambda Q - 3e\mu \cos nt - 3e^2\mu \cos 2nt \ldots$$
$$\ddot{\eta} + 2n\dot{\xi} - Q\xi - N\eta + \left\{ \begin{matrix} \text{členy druhého a} \\ \text{vyšších stupňů} \end{matrix} \right\} =$$
$$= L - \varkappa Q - \lambda N - 3e^2\mu \sin 2nt$$
$$\ddot{\zeta} = \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)\zeta \qquad + \left\{ \begin{matrix} \text{členy druhého a} \\ \text{vyšších stupňů} \end{matrix} \right\}.$$

Koefficienty K, L, M, N, Q, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}$ jsou funkcemi souřadnic jednak posice uvažovaného bodu, jednak souřadnic rušivé planety ξ_1, η_1, které jsou dány vzorci (10) na str. 413. Jedná se tedy o differenciální rovnice s *periodickými* koefficienty. Můžeme součinitele K, L, M, N, Q, $\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)$ rozvinouti dle ξ_1, η_1 a psáti s ohledem na (10) v tomto tvaru:

$$K = K_0 + K_{11} \cos nt + K_{12} \sin nt + K_{21} \cos 2nt + K_{22} \sin 2nt + \ldots$$

K_0, K_{11}, K_{12} a t. d. jsou potenční řady v e. První člen v K_0 jest řádu e^0, první člen v K_{n1} řádu e^n.

Z postupu řešení lze souditi, že Dr. Heinrich provádí integraci rovnice s *konstantními* koefficienty. Nechává na levé straně rovnice jen tu část koefficientů, která neobsahuje periodických funkcí času a kterou k vůli zřetelnosti označuji indexem 0,[6]) takže by měly rovnice tento tvar:

$$\ddot{\xi} - 2n\dot{\eta} - M_0\xi - Q_0\eta = K_0 - \varkappa M_0 - \lambda Q_0 - \varkappa (M - M_0) -$$
$$- \lambda (Q - Q_0) + (M - M_0)\xi + (Q - Q_0)\eta + K - K_0 -$$
$$- 3e\mu \cos nt \ldots$$

---

[4]) Traité de mécanique céleste, IV. [r. 1896], str. 275.: Du cas où l'orbite du point $\mathfrak{M}$ n'est pas supposée circulaire.

[5]) Str. 414.

[6]) Tím způsobem měl Dr. Heinrich označiti též koefficienty M, N, Q v rovnicích (12), (14) a ve vzorcích na str. 416. a 417., neboť mají jiný význam než koefficienty M, N, Q v rovnicích (11). Na str. 415. značí ξ, η jednak souřadnice Jupiterovy vzhledem k Slunci, jednak souřadnice tělíska vzhledem k uvažovanému bodu. Takovou nepřesností v označování stávají se čtenáři i jednoduché výkony početní nesrozumitelnými.

Členy, obsahující druhé a vyšší mocniny proměnných, Dr. Heinrich *mlčky* vynechává. Jak naloží s členy $(M - M_0)\xi$, $(Q - Q_0)\eta$ atd. na pravé straně rovnice, o tom se šíře nezmiňuje. Z poznámky pod čarou na str. 415. lze si domysliti, že při výpočtu kmitů *vynucených* dosazuje do nich postupně přibližné výsledky, které obdržel při výpočtu předešlém. Takovým způsobem snažil se odstraniti obtíže, které se vyskytovaly při pokusu o integraci těchto pro uvažovaný problém málo vhodných rovnic. [7]) Avšak tento postup jest nesprávný. Vynucené kmity, jak z povahy rovnic plyne, jsou dány řadami Fourierovými, v nichž koefficienty jednotlivých členů jsou mocninovými řadami v e. Je-li $e < 1$, jest největší člen koefficientů při $\cos knt$ a $\sin knt$ řádu e^k. Poněvádž na levé straně pohybových rovnic jsou zanedbány již členy obsahující druhé a vyšší mocniny proměnných, zanedbávají se tím zároveň již druhé a vyšší mocniny excentricity, takže výsledky, které plynou ze vzorců (15) str. 417. pro koefficienty při $\cos knt$ a $\sin knt$ jsou od $k = 2$ počínaje úplně chybné. O tom lze se přesvědčiti pouhým dosazením výsledků (16) do původních pohybových rovnic.

Také, co se týče kmitů volných, jest výsledek, ku kterému dochází Dr. Heinrich v obecném případě, nesprávný, neboť i tyto jsou v obecném případě dány řadami Fourierovými. [8]) Co uvádí Dr. Heinrich za řešení v obecném případě, jest jen hrubá approximace, kterou obdrží zanedbáním členů $(M - M_0)\xi$, $(Q - Q_0)\eta$ atd. Že vynechání těchto členů při řešení znamená *zanedbání vlivu excentricity dráhy rušivé planety* na tyto kmity, Dr. Heinrich neuvádí. Jak nesprávný jest tento postup při výpočtu kmitů volných, jest patrno nejlépe na rovnici pro ζ. Zanedbají-li se druhé a vyšší mocniny proměnných, má tato rovnice tvar

$$\ddot{\zeta} - \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)\zeta = 0.$$

---

[7]) Viz Čas. pro pěst. mathem. a fys., roč. XLVII., str. 268.

[8]) Viz Tisserand: Traité de méc. cel., IV., str. 276.
Charlier: Die Mech. des Him., I, str. 36. a 40.
Lindemann: Math. An., XXII., str. 117.
Lindstedt: Astr. Nachr., Bd. 105., str. 98. (r. 1883).
Bruns: Astr. Nachr., Bd. 106., str. 193. a Bd. 107., str. 129.
Callandreau: Astr. Nachr., Bd. 107., str. 33.
Stieltjes: Astr. Nachr., Bd. 109., str. 145. a str. 261.

$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)$ jest periodickou funkcí času, takže jest omylem, píše li Dr. Heinrich, že je řešení v obecném případě

$$\zeta = R \cos\left[t\sqrt{-\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right)} + S\right].$$

To jest jen approximace předpokládající, že $\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right) = \text{konst.}$ Na str. 418. píše Dr. Heinrich: „Zároveň poznamenáváme, že berou-li se v úvahu *vyšší* potence excentricity než druhého stupně, jsou pak funkce M, Q, N, K_0, L_0, h_1, h_2, které intervenují v rovnicích (5), (15), (16) o termy zmíněného řádu (μe^2) od oněch pro kmity volné (6) (rozuměj kmity za předpokladu, že rušící planeta obíhá v kruhu) odchylnými, tvar řešení zůstane identický". (Funkcemi M, Q, N míní Dr. Heinrich konstantní koefficienty levé strany, které jsem označil M_0, Q_0, N_0.) Jest jasno, že tímto způsobem se chybný výsledek neopraví, neboť vynecháním periodických členů se zanedbávají v koefficientech členy řádu μe. Jest jisto, že nesprávná jest i podmínka resonance, kterou Dr. Heinrich z těchto chybných výsledků odvodil a kterou položil za základ své nové práce. Koefficienty A_K, B_K, C_K, D_K Fourierových řad, kterými jsou dány kmity volné, vypočítává Dr. Heinrich z rovnic, které můžeme psáti ve tvaru (na př. pro A_K):

$$RA_K + e^l SA_K = e^k T,$$

kdež R, S, T jsou řádu e^0 a $l < k$. Za předpokladu $e < 1$ lze sice psáti

$$A_K \doteq \frac{e^k T - e^l SA_K}{R},$$

když se na pravou stranu dosadí za A_K první approximace $\frac{e^k T}{R}$; ale nelze tvrdit, jak činí Dr. Heinrich, že pro $R = 0$ jest $A_K = \infty$ (resonance), neboť v tom případě jest

$$A_K = e^{k-l} \frac{T}{S}.$$

Zdá se, že si Dr. Heinrich není vůbec vědom, kdy lze při řešení rovnice zanedbati malé členy a kdy nelze. Tak v nové práci nahoře citované [9]) při řešení rovnice (2), kterou můžeme psáti ve tvaru

$$a\varrho_2^6 - b\mu\varrho_2^3 + c\mu^2 = 0,$$

zanedbává za předpokladu, že μ jest malé, třetí člen a dospívá k výsledku

$$\varrho_2^3 = \mu \frac{b}{a},$$

kdežto správné řešení zní

$$\varrho_2^3 = \mu \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ve třetí části své práce [10]) zkouší odvozené vzorce prakticky v konkrétních případech, totiž v okolí libračních center. Nejprve dokazuje pomocí obrázku a výpočtu jistou větu, jak sám praví „jinou cestou odvozenou již Lagrangem." [11]) Lagrange totiž dokázal, že jsou-li *splněny určité podmínky,* [12]) vede řešení problému tří těles k pohybu v kuželosečkách. Důkaz Heinrichův týká se případu, kdy obě tělesa tvoří se Sluncem ustavičně rovnostranný trojúhelník, takže pohybují se kolem Slunce ve shodných kuželosečkách o 60° otočených. Místo věty Lagrangeovy dokazuje geometrickou větu, že „geometrické místo bodu, který tvoří se Sluncem a Jupiterem (obíhajícím kol Slunce v ellipse) ustavičně rovnostranný trojúhelník, jest ellipsa shodná s ellipsou Jupiterovou jen o 60° přitočená." Důkaz provádí analyticky a věnuje mu skoro celostránkový obrázek. Lze skutečně těžko pochopiti, jak může důkaz této samozřejmé věty pokládati za důkaz věty Lagrangeovy!

Z chybných obecných řešení, která dávají výsledky jen přibližné, platící u kmitů vynucených jen pro první stupeň excentricity, nemohl obdržeti vzorce, které by se shodovaly s exaktním řešením Lagrangeovým. Odvodil proto vzorce pro vynucené kmity tím, že transformoval přesná Lagrangeova řešení do

[9]) Astr. Nachr., Bd. 206., str. 77.

[10]) Str. 420. a násl.

[11]) Str. 420.

[12]) Viz Tisserand: Traité de mécanique céleste, I., str. 147. a násl. Charlier: Die Mechanik des Himmels, II. 1., str. 89. a násl.

rovnoměrně rotujícího systému souřadného.[13]) K těmto vzorcům pak přičiňuje výsledky odvozené pro kmity volné a dospívá k větě: „Předpokladem excentricity dráhy rušivé planety mizí smysl pevného libračního centra (L) a zbývá jediné (existující) centrum pohyblivé, *volné oscillace satellitů v jeho okolí jsou tytéž jako v okolí centra pevného*". Tím ovšem nedošel k novému výsledku. První polovice věty plyne z řešení Lagrangeových a druhá polovice z řešení Darwinových, neboť výsledky pro kmity volné obdržel Dr. Heinrich zanedbáním veličin řádu ξe, t. j. *zanedbáním vlivu excentricity dráhy Jupiterovy.*

K první části pojednání, kde podává autor známou theorii oscillujících satellitů za předpokladu, že rušivá planeta obíhá kolem Slunce v kruhu, pokládám za nutné poznamenati toto: V pramenech autorem citovaných jest uvažován pohyb tělíska v rovině dráhy planety rušivé kolem Slunce. Poněvadž Dr. Heinrich v úvodu praví:[14]) „V následujícím chceme udati rozšíření theorie předpokládající, že planeta rušivá obíhá kol centrálního tělesa v ellipse. Zároveň *upustíme od supposice Darwinovy pohybů v rovině, vezmouce v úvahu sklon. dráhy tělíska,*" zdálo by se, že autor v tomto směru řešení problému rozšířil. Také Dr. Hostinský v referátě o Heinrichově práci (Věda česká, I, č. 7., str. 229.) píše v tom smyslu: „V prvé části upouští autor od Darwinova předpokladu, že P (tělísko) se pohybuje v rovině xy, v níž jsou S (Slunce) a J (planeta rušící) a *nalézá*, že projekce bodu P na osu Oz vykonává pohyb harmonický." Pojednání, v nichž se béře v úvahu sklon dráhy tělíska, jest však celá řada. Na př. Gyldén: Sur un cas particulier du problème des trois corps. (Bulletin Astronomique, I., r. 1884, p. 361), *Tisserand*: Traité de méc. cel., IV., (r. 1896): Recherches de M. M. Charlier et Luc Picart, str. 268. a násl., *Moulton*: A meteoric theory of the Gegenschein. (The Astronomical Journal, XXI., r. 1901, No. 483, str. 17. a násl.). Též v *učebnici Moultonově*: An introduction to celestial mechanics (r. 1902), str. 205. a 210. Dr. *Jindřich Svoboda.*

---

[13]) Str. 422. a 423. (18) a (19).

[14]) Str. 176.