Václav Simandl

O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 16--26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121124

7. *Potenční rovina ϱ dvou imaginárných koulí* $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$, jichž středy jsou s_1, s_2, ideálnými pak obrazy reálné koule $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ o středech s_1, s_2 a poloměrech r_1, r_2, jest geometrické místo bodu u, jehož potence k daným koulím jsou si rovny: $\overline{uc}_1^2 = \overline{us}_1^2 + r_1^2 = \overline{uc}_2^2 = \overline{us}_2^2 + r_2^2$, když body c_1, c_2 jsou na plochách kulových $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ a $\overline{s_1 c_1} \perp \overline{s_1 u}$, $\overline{s_2 c_2} \perp \overline{s_2 u}$. Rovinu ϱ sestrojíme takto: proložme přímkou $\overline{s_1 s_2}$ rovinu σ, která protne plochy $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$ v imaginárných kružnicích K_1^i, K_2^i a plochy $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$ v reálných kružnicích K_I, K_{II}. V rovině σ sestrojme přímku potenční H podle odst. 2. a proložme přímkou H rovinu $\varrho \perp \overline{s_1 s_2}$.

Třem imaginárným koulím příslušejí tři roviny potenční: ϱ_1 koulím $\varkappa_2^i$, $\varkappa_3^i$; ϱ_2 koulím $\varkappa_1^i$, $\varkappa_3^i$; ϱ_3 koulím $\varkappa_1^i$, $\varkappa_2^i$. Roviny ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 protínají se v společné přímce H, která stojí kolmo na rovině $(s_1 s_2 s_3)$ a slove *potenční přímkou* daných tří koulí.

Čtyřem imaginárným koulím přísluší šest rovin potenčních, jež protínají se (po třech) ve čtyřech přímkách potenčních; tyto pak procházejí týmž bodem ω, jehož potence k daným koulím jsou si rovny. Bod ω slove *potenčním bodem* čtyř koulí a je středem společné jich *koule orthogonálné*, jejíž poloměry $\overline{\omega c_1} = \overline{\omega c_2} = \overline{\omega c_3} = \overline{\omega c_4}$, jsou-li body c_1, c_2, c_3, c_4 na plochách $\varkappa_I$, $\varkappa_{II}$, $\varkappa_{III}$, $\varkappa_{IV}$ a $\overline{s_1 c_1} \perp \overline{s_1 \omega}$, $\overline{s_2 c_2} \perp \overline{s_2 \omega}$, $\overline{s_3 c_3} \perp \overline{s_3 \omega}$, $\overline{s_4 c_4} \perp \overline{s_4 \omega}$. Jsou-li některé z daných koulí reálné nebo nullové, užijeme konstrukce odst. 5. event. 6.

O zvláštních v sobě duálních quadratických přímkových kongruencích.

Napsal Dr. **Václav Simandl**, docent české techniky v Brně.

Buď dán libovolný hyperboloid H^2, a buďtež J_1 a J_2 obyčejnými involucemi v přímkách jeho první, resp. druhé přímkové řady. Buďtež pak přímkové dvojiny a_1, b_1 involuce první J_1 přiřazeny určitou projektivností $\mathfrak{P}$ přímkovým dvojinám a_2, b_2 involuce druhé J_2. Dospíváme pak tímto způsobem ku ∞^1 sborceným přímkovým čtyřstranům a_1, b_1, a_2, b_2, na H^2, a ∞^1 dvojin diagonál d_1, d_2 těchto čtyřstranů vyplňuje nám, jak jsme jinde ukázali,*) určitou přímkovou plochu 4. stupně rodu 1. t. ř. „zobecněný cylindroid" P^4. Uvažujeme-li pak souhru všech ∞^1 lineárních kongruencí o dvojinách řídících přímek d_1, d_2, tu dospíváme ku quadratickému komplexu, kterým jsme se jinde zabývali**), a který jsme označili jakožto „zobecněný A^2 komplex".

Každá z involucí J_1, J_2 definuje nám vždy celou řadu ∞^1 involucí, a dvojinou samodružných přímek některé z involucí těchto řad jest vždy některá přímková dvojina involucí J_1 nebo J_2. Dospíváme pak ku dvěma skupinám ∞^1 involucí. Libovolné involuce těchto skupin označíme si $J(a_1b_1)$ resp. $J(a_2b_2)$, dle toho je-li jejich samodružnou dvojinou některá z ∞^1 dvojin a_1, b_1 nebo dvojin a_2, b_2. Libovolnou dvojinu involuce $J(a_1b_1$ označme si a_{1i}, b_{1i}, a libovolnou dvojinu involuce $J(a_2b_2)$ označme si a_{2k}, b_{2k}, kde indexy i, k probíhají všecka čísla přirozené řady číselné. Naší projektivností $\mathfrak{P}$ jest přiřazena kterékoli involuci $J(a_1b_1)$ první skupiny určitá involuce $J(a_2b_2)$ druhé skupiny. Dvě takto přiřazené involuce definují nám zároveň ∞^2 přímkových čtyřstranů:

$$a_{1i},\ b_{1i},\ a_{2k},\ b_{2k},$$

od ∞^1 dvojin involucí $J(a_1b_1)$, $J(a_2b_2)$ projektivností $\mathfrak{P}$ si přiřazených dospíváme pak ku ∞^3 takovým čtyřstranům a, jak v následujícím ukážeme, vyplňuje ∞^3 dvojin diagonálných stran těchto čtyřstranů projektivním involucím J_1 a J_2 příslušný zobecněný A^2 komplex Γ^2. Uvidíme tedy, že jako ku ploše P^4 jsme dospěli od diagonál ∞^1 čtyřstranů a_1, b_1, a_2, b_2, že způ-

*) „O zobecněném cylindroidu". Rozpravy České Akademie. II. třída roč. XXIII číslo 12. viz pag. 7 a 8. O ploše té později jsme ukázali, že jest totožná s přímkovou plochou P^4 vytvořenou dvěma projektivními involucemi na dvou mimoběžných přímkách v prostoru. Viz práci: „Příspěvek ku přímkovým plochám 4. stupně stanoveným dvěma projektivními involucemi na dvou mimoběžných přímkách". Rozpravy České Akademie II. třída roč. XXIV č. 22.

**) „Příspěvek ku theorii lineárních systémů lineárních komplexů". Rozpravy České Akademie II. třída roč. XXIII číslo 15. viz pag. 16. O svrchu zmíněném quadratickém komplexu jsme později ukázali, že jest totožný s harmonickým komplexem kategorie [(11)1111]. Viz práci: „O P^4 plochách v souvislosti s prostorovými křivkami 4. stupně 1. druhu, plochami 2. stupně a harmonickými quadratickými komplexy". Rozpravy České Akademie ročník XXIV. č. 29.

sobem analogickým dospějeme od ∞^3 čtyřstranů a_{1i}, b_{1i}, a_{2k}, b_{2k} ku komplexu Γ^2.

Avšak projektivně přiřazené involuce J_1 a J_2 definují nám též ∞^2 přímkových čtyřstranů a sice dvě skupiny. Čtyřstrany těchto skupin lze si označiti:

$$a_1,\ b_1,\ a_{2i},\ b_{2i};\quad a_2,\ b_2,\ a_{1k},\ b_{1k}.$$

Z označení tohoto jest patrno, že každá dvojina jedné involuce z involucí J_1, J_2 vede ku ∞^1 čtyřstranům, jejichž jednou dvojinou protějších stran jest tato dvojina a druhou dvojinou protějších stran kterákoliv dvojina, která harmonicky odděluje dvojinu druhé involuce, jež odpovídá projektivností $\mathfrak{P}$ zmíněné dvojině v involuci první.

Budeme pak v práci této zabývati se geometrickými místy ∞^2 dvojin diagonál ∞^2 čtyřstranů a_1, b_1, a_{2i}, b_{2i} resp. a_2, b_2, a_{1k}, b_{1k}, a dospějeme tak od těchto dvou skupin vždy ∞^2 čtyřstranů ku dvěma přímkovým kongruencím. O těchto kongruencích, z nichž každá jest patrně vzhledem ku ploše H^2 polárně invariantní, a jest tedy sama v sobě duální, shledáme, že jsou quadratickými a konfokálními. Zejména pak budeme se zabývati konfigurací 16 singulárních svazků paprskových těchto kongruencí.

Kdežto kongruencí (2, 2) neboli v sobě duálních quadratických kongruencí existuje obecně jak známo ∞^{18}, ukážeme, že kongruencí (2, 2) námi uvažovaných existuje ∞^{16}, kterážto specialisace bude se jeviti zejména tím, že fokální plocha našich kongruencí nebude obecná *Kummerova* plocha, nýbrž její speciální případ t. ř. *Cayley-ho tetraedroid*, t. j. *Kummerova* plocha, jejichž 16 dvojných bodů lze uspořádati tak ve čtyři skupiny, že body každé skupiny leží ve stěně určitého tetraedru. Při zcela obecném tetraedroidu existuje takový tetraedr jeden, my však dospějeme ku speciálnějšímu tetraedroidu, kterému bude příslušet 44 tetraedrů zmíněné vlastnosti.

I. Důkaz jedné věty pomocné.

Dokážeme nyní jednu větu, na kterou se budeme častěji v této práci odvolávati. Věta ta zní:

Máme-li na zborceném hyperboloidu takové dva přímkové čtyřstrany, že v každé přímkové řadě hyperboloidu se dvě a *dvě přímkové strany těchto čtyřstranů harmonicky oddělují, tu diagonály těchto dvou čtyřstranů se protínají tvoříce tak prostorový přímkový čtyřstran.*

Buďtež a_1, b_1; a_2, b_2 dvě dvojiny protějších stran jednoho, a u_1, v_1; u_2, v_2 dvě dvojiny protějších stran druhého čtyřstranu na daném hyperboloidu H^2. Buďtež pak přímkové dvojiny d_1, d_2 a t_1, t_2 diagonálnými stranami těchto prostorových čtyřstranů. Máme pak tedy dvě harmonické čtveřiny mimoběžných přímek a_1, b_1, u_1, v_1 a a_2, b_2, u_2, v_2. Proložme si nyní přímkami a_1, b_1, a_2, b_2 jakožto čtyřmi komplexovými přímkami svazek lineárních komplexů S_1 a podobně přímkami u_1, v_1, u_2, v_2 proložme si svazek lineárních komplexů T_1. Z komplexového svazku S_1 uvažujme pak dva lineární komplexy Γ a Γ', z nichž prvý komplex obsahuje všecky přímky prvé, druhý všecky přímky druhé přímkové řady hyperboloidu H^2. Jest pak patrno, že přímky u_2, v_2, ježto dělí harmonicky přímky a_2, b_2, jsou dvojinou konjugovaných polár lineárního komplexu Γ, a podobně přímky u_1, v_1, dělící harmonicky přímky a_1, b_1, jsou dvojinou konjugovaných polár komplexu Γ'. Poněvadž tedy dvě přímky u_2, v_2 kteréhokoliv lineárního komplexu z komplexů svazku T_1 jsou konjugovanými polárami komplexu Γ, tu vidíme, že tento komplex jest v involuci ku všem komplexům svazku T_1. Víme však, že jsou-li dva lineární komplexy ku danému lineárnímu komplxu v involuci, že jsou pak všecky lin. komplexy svazku stanoveného těmito dvěma komplexy ku danému komplexu v involuci. Komplexy Γ a Γ' jsou však komplexy svazku S_1. Jsou tedy všecky komplexy svazku S_1 ku všem komplexům svazku T_1 v involuci. Z toho však vyplývá, že řídicí přímky základních lineárních kongruencí těchto svazků se musí navzájem protínati. Řídícími přímkami těchto kongruencí jsou však dvojiny přímek d_1, d_2 a t_1, t_2. Tvoří tedy tyto přímky sborcený přímkový čtyřstran, jak bylo dokázati.

Dokážeme však, že uvedená věta platí též obráceně. Věta ta obrácená potom zní:

Máme li dvě dvojiny konjugovaných polár plochy 2. stupně H^2, které se navzájem protínají, tu vytínají nám na ploše H^2 dva přímkové čtyřstrany té vlastnosti, že dvě a dvě strany jejich se oddělují harmonicky.

Předpokládáme zde tedy, že všecky komplexy svazku S_1 o základní lineární kongruenci $[d_1, d_2]$ jsou v involuci ku všem komplexům svazku T_1 o základní kongruenci $[t_1, t_2]$ a buďtež a_1, b_1, a_2, b_2 a u_1, v_1, u_2, v_2 čtyřstrany, jež řídicí přímky těchto kongruencí na H^2 vytínají. Uvažujme pak ve svazku S_1 dva komplexy Γ a Γ', z nichž každý obsahuje jednu přímkovou řadu plochy H^2 a v řadě druhé indukuje pak involuci svých konjugovaných polár. Tak komplex Γ' obsahujž přímky druhé řady a_2, b_2, u_2, v_2, v prvé řadě pak toliko přímky a_1, b_1. Proložme si rovněž přímkami druhé přímkové řady hyperboloidu H^2 jeden lineární komplex Λ svazku T_1. Ježto komplexy Γ' a Λ náležejí témuž lineárnímu systému S_3 stanovenému základní hyperboloidovou přímkovou řadou a_2, b_2, u_2, v_2 a, jelikož jsou oba tyto komplexy v involuci, tu musí v řídicí řadě základní řady vytínati přímkové dvojiny, které se oddělují harmonicky. Dvojinami těmi jsou patrně dvojiny a_1, b_1 a u_1, v_1. Tím jest tedy harmoničnost 4 přímek a_1, b_1, u_1, v_1 dokázána, a zcela analogicky dokázala by se též harmoničnost přímek a_2, b_2, u_2, v_2.

Naši pomocnou větu mohli bychom dokázati též následujícím způsobem.

Společným pronikem lineárních komplexů Γ a Γ' jest lineární kongruence o řídicích přímkách d_1, d_2. To vyplývá z toho, že přímky tyto jsou diagonálami čtyřstranu a_1, b_1, a_2, b_2, který oběma těmto komplexům náleží. Ježto, jak jsme se v prvém důkaze byli zmínili, jsou u_1, v_1 dvojinou konj. polár komplexu Γ' a u_2, v_2 dvojinou konj. polár komplexu Γ, tu jsou diagonální strany t_1, t_2 přímkami obou těchto komplexů. Náležejí tudíž přímky t_1, t_2 kongruenci komplexů Γ a Γ', a musí tudíž řídicí přímky d_1, d_2 této kongruence s těmito přímkami tvořiti sborcený čtyřstran, jak bylo dokázati.

2. Poznámka ku projektivně zobecněnému A^2 komplexu.

Uvažujme nyní geometrické místo ∞^3 dvojin diagonál d_{1i}, d_{2k} ∞^3 čtyřstranů:

$$a_{1i},\ b_{1i},\ a_{2k},\ b_{2k}$$

v úvodu této práce zmíněných a definovaných dvěma projektivností $\mathfrak{P}$ přiřazenými involucemi J_1 a J_2. Dvojina přímek d_1, d_2

jsouc dvojinou diagonál čtyřstranu, jehož dvěma dvojinami protějších stran jsou projektivností $\mathfrak{P}$ si přiřazené dvojiny přímek a_1, b_1; a_2, b_2 involucí J_1, J_2, tvoří jednu z ∞^1 dvojin druhé význačné involuce na zobecněném cylindroidu P^4 (viz. str. 6 až 8 citovaného zde pojednání: „O zobecněném cylindroidu".). Projektivně zobecněný A^2 komplex lze považovati však za geometrické místo ∞^1 lineárních kongruencí o dvojinách řídících přímek d_1, d_2 (viz str. 16. citovaného zde pojednání: „Příspěvek ku theorii lineárních systémů lineárních komplexů".). Abychom dokázali, že tento projektivně zobecněný A^2 komplex jest totožný s komplexem Γ^2 všech ∞^3 dvojin diagonál d_{1i}, d_{2k}, tu jest nutno ukázati, že těchto ∞^3 dvojin diagonál jest obsaženo v ∞^1 lineárních kongruencích $[d_1, d_2]$. Čili, že každá dvojina přímek d_{1i}, d_{2k} protíná vždy dvě přímky d_1, d_2 tak, že s nimi tvoří prostorový čtyřstran. To jest však dle pomocné věty vyslovené v předešlém odstavci patrno, ježto poloha čtyřstranů a_1, b_1, a_2, b_2 a a_{1i}, b_{1i}, a_{2k}, b_{2k} jest taková, že existují dvě čtveřiny harmonických přímek v hyperboloidické poloze, totiž čtveřiny:

$$a_{1i},\ b_{1i},\ a_1,\ b_1\,;\quad a_{2k},\ b_{2k},\ a_2,\ b_2.$$

A že každou dvojinu konjugovaných polár d_{1i}, d_{2k} hyperboloidu H^2, která jest obsažena v lineární kongruenci o řídicích přímkách d_1, d_2, lze považovati za dvojinu diagonál některého čtyřstranu a_{1i}, b_{1i}, a_{2k}, b_{2k} jest patrno zase z opaku pomocné věty vysloveného též v předešlém odstavci této práce. Můžeme tedy vysloviti větu:

Dvě projektivní involuce v přímkách obou přímkových řad téhož hyperboloidu H^2 stanoví způsobem shora uvedeným ∞^3 sborcených čtyřstranů. Diagonály těchto čtyřstranů vyplňují quadratický komplex Γ^2, který, když H^2 považujeme za plochu absolutní, můžeme považovati za projektivně zobecněný A^2 komplex.

Tento quadratický komplex Γ^2 lze v obecném případě považovati za obecný harmonický quadratický komplex kategorie [(11)1111], jak jsme ukázali v citované zde již práci: „*O P^4* plochách v souvislosti .... atd." Ze speciálních případů tohoto komplexu, neboli Γ^2 komplexu bude pro naše další úvahy míti zvláštní význam ten speciální případ projektivností $\mathfrak{P}$ involucí

J_1 a J_2, kdy touto projektivností dvojinám samodružných přímek u_1, v_1 involuce J_1 odpovídají dvojiny u_2 resp. v_2 involuce J_2. V tomto případě přechází Γ^2 komplex v komplex tetraedrální (viz 7. odstavec cit. zde pojednání: „*O* P^4 plochách v souvislosti . . .“).

Dle úvah v 7. odst. citované zde práce jsou dvěma vrcholy toho tetraedru průsečíky přímek u_1, u_2 a v_1, v_2. Další dva vrcholy leží na průsečnici rovin stanovených vždy dvěma těmito přímkami a nalezneme je pomocí každé dvojiny diagonál d_1, d_2 kteréhokoliv z ∞^1 sborcených čtyřstranů a_1, b_1, a_2, b_2, kde zase a_1, b_1; a_2, b_2 jest jedna z ∞^1 dvojic dvojin involucí J_1 a J_2 projektivně si přiřazených svrchu uvedenou speciální projektivností $\mathfrak{P}$. Takto nalezenými dvěma vrcholy procházejí všecky ∞^1 dvojiny diagonál d_1, d_2 čtyřstranů a_1, b_1, a_2, b_2. Zobecněný cylindroid P^4 degeneruje patrně v tomto případě ve čtyři roviny základního tetraedru.

3. O quadratických harmonických komplexech kategorie [(11)1111] procházejících kongruencemi C_1^2 a C_2^2.

Jak jsme se již v úvodě zmínili definují nám dvě libovolnou projektivností $\mathfrak{P}$ přiřazené involuce J_1 a J_2 v přímkách obou přímkových řad hyperboloidu H^2 dvě v sobě duální kongruence diagonál vždy ∞^2 sborcených čtyřstranů na H^2 ležících, které jsme si označili:

$$a_1, b_1, a_{2i}, b_{2i}; \quad a_2, b_2, a_{1k}, b_{1k}.$$

Jsou zde zase a_1, b_1; a_2, b_2 dvě projektivností $\mathfrak{P}$ si odpovídající dvojiny involucí J_1 a J_2 a a_{1i}, b_{1i}; a_{2k}, b_{2k} jsou libovolnými dvojinami involucí o samodružných přímkách a_1, b_1 resp. a_2, b_2, involucí: $J(a_1, b_1)$, $J(a_2, b_2)$. Samodružnými přímkami involucí J_1, J_2 buďtež přímky u_1, v_1; u_2, v_2 tak, že tyto involuce můžeme označovati též: $J(u_1, v_1)$, $J(u_2, v_2)$.

Kongruence diagonál dvou skupin uvedených ∞^2 čtyřstranů označme si:

$$C_1^2, \; C_2^2$$

a dokážeme o těchto kongruencích, že jsou kongruencemi (2, 2) tím, že ukážeme, že lze je považovati za úplný pronik vždy určitého lineárního komplexu a pak komplexu quadratického.

Jak ukázal *Caporali**) prochází každou kongruencí (2, 2) ∞^6 komplexů quadratických, z nichž 40 jest tetraedrálních. Zde budeme se zabývati jen systémem ∞^2 komplexů z těchto ∞^6. Systém našich ∞^2 komplexů bude obsahovati vesměs zobecněné A^2 komplexy neboli harmonické komplexy kategorie [(11)1111] Zvláštní důležitosti pak budou vždy 4 tetraedrální komplexy obsažené v našem systému ∞^2 komplexů.

Jest patrno ihned, že kongruence C_1^2 obsahuje druhou, a kongruence C_2^2 první přímkovou řadu hyperboloidu H^2.

Uvažujme kongruenci C_1^2. Tato kongruence jest patrně obsažena v lineárním komplexu Γ_1 stanoveném, dle známého *Chasles-ova* vytvoření, involucí J_1 v první přímkové řadě hyperboloidu H^2. Budeme dále hledati ∞^2 Γ^2 komplexů procházejících kongruencí C_1^2. K tomu konci vytkněme si libovolnou dvojinu přímek m_1, n_1 obsažených v první přímkové řadě hyperboloidu H^2. Sestrojme si pak samodružné přímky a'_1, b'_1 involuce stanovené vždy dvěma přímkovými dvojinami m_1, n_1 a a_1, b_1. Ježto dvojin a_1, b_1 jakožto dvojin involuce J_1 jest ∞^1, dostáváme tímto způsobem též ∞^1 dvojin a'_1, b'_1. Dvojiny tyto tvoří patrně involuci o přímkách m_1, n_1 jakožto přímkách samodružných. Involuci tu si označíme $J(m_1, n_1)$.

Projektivností $\mathfrak{P}$ jest každé dvojině a_2, b_2 involuce $J(u_2, v_2)$ přiřazena určitá dvojina a_1, b_1 involuce $J(u_1, v_1)$, dvojině a_1, b_1 jest však zase, jak jsme právě ukázali, vzhledem ku přímkám m_1, n_1 přiřazena dvojina a_1', b_1' involuce J (m_1, n_1). Jsou tedy též dvojiny a_1, b_1 a a_1', b_1' involucí J (u_2, v_2) a J (m_1, n_1) k sobě přiřazeny určitou projektivností $\mathfrak{P}'$ odvislou od projektivnosti $\mathfrak{P}$ a polohy přímek m_1, n_1. Quadratický Γ^2 komplex stanovený projektivností $\mathfrak{P}'$ přiřazenými involucemi J (u_2, v_2) a J (m_1, n_1) obsahuje patrně ∞^3 čtyřstranů a_{1i}', b_{1i}', a_{2i}, b_{2i}, kde a_{1i}', b_{1i}' znamená všecky ∞^1 dvojiny involuce J (a_1', b_1'), ku kterýmžto dvojinám přísluší též jedna dvojina a_1, b_1 involuce J (u_1, v_1). Jest tedy vidno, že tento Γ^2 komplex obsahuje též kongruenci C_1^2, kterou lze pokládati za souhrn diagonál ∞^2 čtyřstranů a_1, b_1, a_{2i}, b_{2i}. Od všech ∞^2 dvojin přímek m_1, n_1

*) Viz *R. Sturm*: Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. III. díl. p. 154.

v první přímkové řadě hyperboloidu H^2 obsažených dospíváme pak ku systému ∞^2 Γ^2 komplexů procházejících kongruencí C_1^2.

Zcela analogické úvahy platí samozřejmě též o kongruenci C_2^2, která jest zase obsažena v lineárním komplexu Γ_2 stanoveném involucí J (u_2, v_2), a kterou též prochází ∞^2 Γ^2 komplexů stanovených zase ∞^2 dvojinami přímek m_2, n_2 v druhé přímkové řadě hyperboloidu H^2.

Vidíme tedy, že naše kongruenee C_1^2 a C_2^2 jsou kongruencemi 2. řádu a 2. třídy.

Systémy ∞^2 Γ^2 komplexů procházejících kongruencemi C_1^2 a C_2^2 označme si $(\Gamma^2)_1$ a $(\Gamma^2)_2$, a hledejme nyní v těchto systémech tetraedrální komplexy. Uvažujme na př. systém $(\Gamma^2)_1$. V tomto systému uvažujme pak 4 Γ^2 komplexy, ku kterým dospějeme od následujících 4 dvojin přímek, jež klademe jako speciální případ dvojin m_1, n_1:

$$u_1', v_1'; \quad u_1', v_1''; \quad u_1'', v_1''; \quad u_1'', v_1';$$

kde tyto přímky mají ten význam, že přímkové dvojiny

$$u_1', u_1''; \quad v_1', v_1''$$

jsou dvojinami involuce J (u_1, v_1), které naší projektivností $\mathfrak{P}$ jsou přiřazeny splývajícím dvojinám samodružných přímek u_2; v_2 involuce J (u_2, v_2).

Tyto čtyři význačné komplexy systému $(\Gamma^2)_1$ jsou však hledanými tetraedrálními komplexy, jak nyní ukážeme. Uvažujeme-li z nich na př. první, tu vidíme, že týž vznikne tou projektivností přiřazenými involucemi J (u_2, v_2) a J (u_1', v_1'), kterou každé dvojině a_2, b_2 involuce J (u_2, v_2) jest přiřazena ta dvojina a_1', b_1' involuce J' (u_1', v_1'), která harmonicky dělí přímkovou dvojinu a_1, b_1, jež projektivností $\mathfrak{P}$ involucí $J(u_1, v_1)$ a J (u_2, v_2) odpovídá dvojině a_2, b_2. Dle toho jest však patrno, že v této projektivnosti dvou involucí J (u_2, v_2) a J (u_1', v_1'), která stanoví první z našich 4 význačných komplexů systému $(\Gamma^2)_1$, odpovídají dvojinám samodružných přímek u_2, v_2 involuce první dvojiny samodružných přímek u_1', v_1' involuce druhé, a že tedy onen význačný komplex jest dle úvah 2. odstavce tohoto pojednání komplexem tetraedrálním.

Dospíváme tak celkem ku čtyřem tetraedrálním komplexům v systému $(\Gamma^2)_1$, který si postupně označíme:

$$T^2\,(u_1', v_1'),\ T^2\,(u_1', v_1''),\ T^2\,(u_1'', v_1''),\ T^2\,(u_1'', v_1').$$

Zcela analogicky v systému $(\Gamma^2)_2$ bychom dospěli ku čtyřem tetraedrálním komplexům:

$$T^2\,(u_2', v_2'),\ T^2\,(u_2', v_2''),\ T^2\,(u_2'', v_2''),\ T^2\,(u_2'', v_2'),$$

kde u_2', u_2''; v_2', v_2'' jsou zase přímkovými dvojinami involuce $J\,(u_2, v_2)$, které naší projektivností $\mathfrak{P}$ jsou přiřazeny samodružným přímkám u_1, v_1 involuce $J\,(u_1, v_1)$.

Můžeme pak vysloviti větu:

Kongruencí C_1^2 resp. C_2^2 prochází vždy ∞^2 harmonických Γ^2 komplexů, mezi nimiž jsou vždy 4 tetraedrální komplexy.

4. Důkaz konfokálnosti kongruencí C_1^2 a C_2^2.

Kongruence (2, 2) obsahují, jak známo*), 10 systémů hyperboloidových přímkových řad. K jednomu systému z těchto deseti vede nás při našich kongruencích C_1^2 a C_2^2 takřka přímo jejich definice jako dvojin diagonál ∞^2 sborcených čtyřstranů.

Uvažujme na př. kongruenci C_1^2. Dvojina přímek a_1, b_1 involuce J_1 na H^2 vede ku ∞^1 čtyřstranům a_1, b_1, a_{2i}, b_{2i}. Lze snadno nahlédnouti, že ∞^1 dvojin diagonál d_{1i}, d_{2i} těchto čtyřstranů náleží téže přímkové řadě určitého hyperboloidu. Jelikož této řadě náležejí patrně též přímky a_2, b_2, můžeme si ji označiti

$$\{a_2,\ b_2,\ d_{1i},\ d_{2i}\}.$$

Přímkové dvojiny d_{1i}, d_{2i} jsouce dvojinami konjugovaných polár plochy H^2 tvoří patrně involuci, a samodružnými přímkami této involuce jsou přímky a_2, b_2. Od ∞^1 přímkových dvojin a_1, b_1 involuce J_1 dospíváme pak ku ∞^1 přímkovým řadám $\{a_2, b_2, d_{1i}, d_{2i}\}$, které tvoří patrně hledaný systém Σ_1. jeden ze zmíněných 10 systémů.

Zcela analogicky kongruenci C_2^2 náleží systém Σ_2 ∞^1 přímkových řad

$$\{a_1,\ b_1,\ d_{1k},\ d_{2k}\},$$

ku kterému dospíváme zase od ∞^1 skupin vždy ∞^1 čtyřstranů a_2, b_2, a_{1k}, b_{1k}.

*) Viz zde již citovanou *Sturmovu*: Liniengeometrie. II. díl, p. 136.

V systémech Σ_1 a Σ_2 odpovídá každé hyperboloidové přímkové řadě systému jednoho určitá hyperboloidová přímková řada systému druhého, totiž odpovídají si ty dvě řady, které příslušejí přímkovým dvojinám a_1, b_1 a a_2, b_2 přiřazeným si projektivností $\mathfrak{P}$ involucí J_1 a J_2.

Ukážeme nyní, že dvě takové řady $\{a_2, b_2, d_{1i}, d_{2i}\}$ a $\{a_1, b_1, d_{1k}, d_{2k}\}$ jsou dvěma přímkovými řadami téhož hyperboloidu. To jest patrno z toho, že kterákoli z ∞^1 dvojin přímkových d_{1i}, d_{2i} na řadě první protíná kteroukoli z ∞^1 dvojin d_{1k}, d_{2k} na řadě druhé tak, že tyto dvě dvojiny tvoří prostorový čtyřstran. To však velmi jednoduše lze nahlédnouti dle pomocné věty na počátku této práce vyslovené. Jsou totiž přímkové dvojiny:

$$d_{1i},\ d_{2i};\quad d_{1k},\ d_{2k}$$

dvojinami diagonál dvou přímkových čtyřstranů:

$$a_1,\ b_1,\ a_{2i},\ b_{2i};\quad a_2,\ b_2,\ a_{1k},\ b_{1k},$$

při kterých vždy dvě dvojiny protějších stran se harmonicky oddělují. Totiž vždy dvě dvojiny:

$$a_1,\ b_1;\quad a_{1i},\ b_{1i};$$
$$a_2,\ b_2;\quad a_{2k},\ b_{2k};$$

Lze tedy uspořádati všecky hyperboloidové přímkové řady systémů Σ_1 a Σ_2 vždy po dvou tak, že tyto leží na témže hyperboloidu, neboli že jedny jsou řídícími řadami druhých. Známo jest však*), že nastává-li tato vlastnost u dvou kongruencí (2, 2), že tyto kongruence jsou konfokálními. Ježto tento případ nastává u našich kongruencí (2, 2) můžeme vysloviti větu:

Kongruence C_1^2 a C_2^2 jsou konfokálními.

(Pokračování.)

---

*) *R. Sturm*: Liniengeometrie, II. díl, pag. 86.