Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

# Úlohy Appoloniovy rozšířené na koule

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 48 (1919), No. 1-2, 101--112

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121114

(2) rovnicí (3):

$$\frac{(y_1-u)^2}{(y_2-u)^2}=\frac{x_1}{x_2}. \tag{4}$$

Avšak podle obr. 4. jest

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}, \tag{5}$$

tedy

$$\frac{(y_1-u)^2}{(y_2-u)^2}=\frac{y_1}{y_2}, \tag{6}$$

z čehož [1])

$$y_1^2y_2-2uy_1y_2+u^2y_2=y_1y_2^2-2uy_1y_2+u^2y_1,$$

čili

$$u^2(y_2-y_1)=y_1y_2(y_2-y_1),$$

posléze

$$u=\pm\sqrt{y_1y_2}. \tag{7}$$

Z toho jde toto řešení úlohy: spusťme $\overline{a\alpha}\perp Y$ (obr. 4.), $b\beta\perp Y$, a sestrojme $u=\sqrt{\overline{o\alpha}\,.\,\overline{o\beta}}$ tím, že body $\alpha$, $\beta$ proložíme libovolnou kružnici a vedeme k ní bodem $o$ tečnu $\overline{o\gamma}=u$; $\overline{ov}=\overline{o\gamma}$ dá vrchol paraboly $v$, $vO\perp Y$ její osu. Dále učiňme $\overline{vt}=\overline{mv}$; spojnice $\overline{at}$, tečna v bodě $a$, protne $Y$ v bodě $n$, $\overline{nf}\perp\overline{at}$ dá ohnisko paraboly $f$. Přeneseme-li $\overline{o\gamma}$ na $Y$ od $o$ dolů do $v'$ ($\overline{ov'}=-u$), bude $v'$ vrchol druhé paraboly úloze hovící. — Synthetické odvození této konstrukce podává autorův spis „Základové geometrie polohy v rovině a prostoru“, svazek II., odst. 105. $\gamma$), obr. 169.

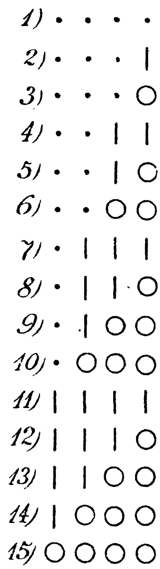
# Úlohy Apolloniovy rozšířené na koule.

Podal Dr. **Vinc. Jarolímek.**

Plocha kulová jest určena čtyřmi podmínkami. Má-li plocha kulová procházeti danými body (značka .), dotýkati se daných rovin (značka | ) a koulí (značka ○), možno sestaviti z těchto prvků po čtyrech celkem 15 úloh (obr. 1.), tolik, kolik je kombinací ze tří prvků čtvrté třídy s opakováním. Zní tedy na př. úloha 8. takto: Sestrojiti plochu kulovou, která procházejíc da-

[1]) Anebo oddvojmocníme rovnici (6) a řešíme vzniklou rovnici lineární podle $u$.

ným bodem, dotýká se daných dvou rovin a dané koule[1]) zároveň. Chceme tuto podati řešení všech patnácti úloh.[2])



Obr. 1.

1. *Dány čtyři body a, b, c, d.* Jinak řečeno jest danému čtyřstěnu kouli opsati. Aby úloha byla možná, nesmí dané čtyři body ležeti v jedné rovině, aniž tři z nich v jedné přímce. Spojme body $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$. V středu každé této tětivy postavme rovinu kolmo. Průsečík těchto tří rovin dá střed koule $s$, poloměr $= \overline{sa}$. (Odůvodnění konstrukce, kdykoli je snadné, pozůstavíme vždy čtenáři.)

2. *Tři body a, b, c, tečná rovina $\tau$.* Řešení zakládá se na větě: Seče-li přímka procházející libovolným bodem $v$ kouli v bodech $a$, $b$, má součin úseků $\overline{va} . \overline{vb}$ na všech paprscích svazku $v$ hodnotu stálou, rovnaje se čtverci tečny $\overline{vt}$ vedené bodem $v$ ke kouli: $\overline{vt}^2 = \overline{va} . \overline{vb}$. To vychází přímo ze známé věty planimetrické vzhledem ke kružnici, ve které rovina $(avt)$ seče plochu kulovou. Hodnota $\overline{vt}^2$ slove *mocností* koule vzhledem k bodu $v$; je kladná nebo záporná podle toho, je-li bod $a$ vně nebo vnitř koule, a rovná se nulle, je-li $v$ na povrchu koule. Z toho také jde, že všecky tečny vedené bodem $v$ ke kouli mají stejnou délku $\overline{vt}$, vyplňujíce kužel rotační.

Úlohu 2. řešíme tudíž takto: Stanovíme průsečíky $p$, $q$ spojnic $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ na rovině $\tau$, sestrojíme úsečky $\overline{pm}$, $\overline{qn}$ podle rovnic $\overline{pm}^2 = \overline{pa} . \overline{pb}$, $\overline{qn}^2 = \overline{qa} . \overline{qc}$, opíšeme v rovině $\tau$ ze středu $p$ kružnici $K$ poloměrem $= \overline{pm}$, ze středu $q$ kružnici $L$ poloměrem $= \overline{qn}$, a stanovíme společné průsečíky $s_1$, $\sigma_1$ kružnic $K$, $L$; patrně jsou to dotyčné body dvou koulí úloze hovících na rovině $\tau$. Středy pak $s$, $\sigma$ obdržíme, postavíme-li v bodech

---

[1]) Pro krátkost budeme dále „plochu kulovou" jmenovati prostě „koulí."

[2]) Studující VI. a VII. třídy reální mohou příslušné konstrukce vykonati skutečně užitím deskriptivní geometrie, kladouce pro zjednodušení práce jednu danou rovinu do průmětny na př. prvé.

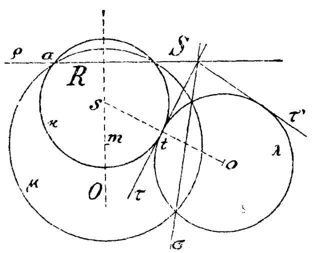
$s_1$, $\sigma_1$ kolmice na rovinu $\tau$, a protneme-li je rovinou, která kolmo půlí tětivu $\overline{ab}$. Koule je nemožná, neprotínají-lí se kružnice $K$, $L$ (neleží-li všecky všecky dané body $a$, $b$, $c$ na *téže* straně roviny $\tau$).

*Řešení 2.* Proložme body $a$, $b$, $c$ kružnici $K$ v rovině $\varrho \equiv (abc)$, v středu kružnice $o$ postavme přímku $O \perp \varrho$, která obsahovati bude střed koule $s$. Přímkou $O$ položme rovinu $\sigma \perp \tau$, stanovme průsečnice rovin $\overline{\sigma\tau} \equiv O_1$ a rovin $\overline{\sigma\varrho} \equiv S$. Přímka $S$ protne kružnici $K$ v bodech $d$, $e$, rovina pak $\sigma$ přímku $O_1$ v bodě $p$; $pO_1$ bude tečnou ke kouli. Sestrojme úsečku $\overline{pu}$ podle rovnice $\overline{pu}^2 = \overline{pd} \cdot \overline{pe}$, na $O_1$ vnesme $\overline{pt} = \overline{pu}$, postavme v bodě $t$ kolmici na rovinu $\tau$; průsečík její s přímkou $O$ dá střed žádané koule $s$, poloměr $= \overline{st}$. Druhý bod $t'$ na $O_1$, jehož $\overline{t'p} = \overline{pu}$, dá kouli druhou. Připadne-li bod $p$ mezi body $d$, $e$, jest mocnost $\overline{pu}^2$ negativní, úloha tedy nemožná.

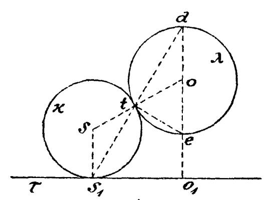
3. *Tři body $a$, $b$, $c$, koule tečná $\lambda$.* Buďtež $\mu$, $\lambda$ dvě libovolné koule, $m$, $o$ jejich středy. Rovina $\varrho$ položená přímkou střednou $\overline{mo}$ seče $\mu$, $\lambda$ v hlavních kružnicích $M$, $L$; geom· místo bodů stejných mocností vzhledem k $M$, $L$ je přímka $H \perp \overline{mo}$, t. ř. chordála kružnic, která spojuje průsečíky obou kružnic, jsou-li reálné. Rovina $\sigma \perp \varrho$ proložená přímkou $H$ sluje *chordálnou rovinou* koulí $\mu$, $\lambda$, jejíž všecky body mají vzhledem k $\mu$, $\lambda$ mocnosti stejné; tato rovina $\sigma$ obsahuje kružnici, ve které plochy $\mu$, $\lambda$ se pronikají, je-li reálná. Dotýkají-li se koule $\mu$, $\lambda$ v bodě $t$, je tečná rovina v bodě $t$ chordálnou rovinou koulí. *Třem* plochám kulovým $\mu$, $\lambda$, $\varkappa$ příslušejí tři roviny chordálné, které se pronikají *v jedné přímce* $S \perp \varrho$, protože rovina $\varrho$ položená středy koulí seče tyto ve třech kružnicích, jichž chordály (jak z planimetrie povědomo) procházejí týmž bodem. Přímka $S$ je geom. místem bodů stejných mocností vzhledem k $\mu$, $\lambda$, $\varkappa$; každým bodem $p$ přímky $S$ vedené tečny ke koulím $\mu$, $\lambda$, $\varkappa$ mají touž délku $r$, takže ze středu $p$ opsati lze poloměrem $r$ kouli, která seče všecky tři koule $\mu$, $\lambda$, $\varkappa$ v úhlech pravých — *koule orthogonálná.* Je-li tedy sestrojiti chordálnou rovinu $\sigma$ dvou koulí $\mu$, $\lambda$, které se neprotínají, protněme koule třetí koulí $\varphi$ o libovolném středu i poloměru, ale tak, aby protala plochy $\mu$, $\lambda$ v kružnicích reálných, jichž roviny se protnou

v přímce $S$. Přímkou $S$ proložme posléze rovinu $\sigma$ kolmo ke spojnici středů koulí $\mu$, $\lambda$.[1])

Přistupme k řešení úlohy 3. Proložme body $a$, $b$, $c$ kružnici $R$ v rovině $(abc) \equiv \varrho$ (obr. 2., kdež si myslíme rovinu $\varrho$ kolmo k nákresně), a v středu jejím postavme kolmici $O \perp \varrho$; na $O$ bude střed $s$ žádané koule $\varkappa$. Kružnicí $R$ jest nyní proložiti plochu kulovou $\varkappa$ tak, aby se dotýkala dané koule $\lambda$; bod dotyku (zatím neznámý) budiž $t$. Proložíme-li kružnicí $R$ libovolnou kouli $\mu$, budou chordálné roviny koulí $\mu$, $\lambda$, $\varkappa$ protínati se v společné přímce $S$. Vytkněme tedy na přímce $O$ kdekoli




Obr. 2.



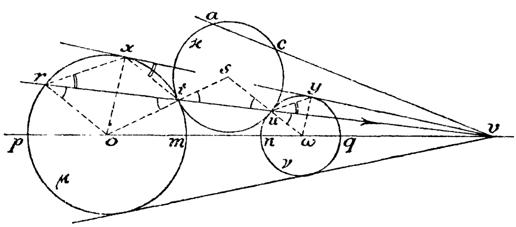

Obr. 3.

bod $m$, ale tak, aby koule $\mu$ opsaná ze středu $m$ poloměrem $\overline{ma}$ *protínala* danou kouli $\lambda$; rovina proniku $\sigma$ je chordálnou rovinou koulí $\mu$, $\lambda$; chordálnou rovinou koulí $\mu$, $\varkappa$ je rovina $\varrho$, ježto se protínají v kružnici $R$. Průsečnicí rovin $\varrho\sigma \equiv S$ musí procházeti i třetí rovina chordálná $\tau$ koulí $\lambda$, $\varkappa$, a tyto mají se dotýkati; položme tedy přímkou $S$ tečnou rovinu $\tau$ k dané kouli $\lambda$ (o středu $o$), stanovme dotyčný bod $t$ $(\overline{ot} \perp \tau)$. Průsečík přímek $O$, $\overline{ot}$ dá střed $s$, $\overline{sa}$ poloměr žádané koule $\varkappa$. Druhá tečná rovina $\tau'$ položená přímkou $S$ ke kouli $\lambda$ dá výsledek druhý.

[1]) *Čtyřem koulím* náleží celkem šest rovin chordálných, které po třech se protínají ve čtyřech přímkách, tyto pak procházejí vesměs jedním bodem $o$, jehož mocnosti ke všem koulím jsou si rovny; tečny vedené bodem $o$ ke koulím mají stejnou délku $\overline{ot}$. Poloměrem $\overline{ot}$ opsaná koule ze středu $o$ slove *orthogonálnou koulí* $\varkappa$ daných čtyř koulí; ona protíná tyto koule vesměs v úhlech pravých, t. j. je-li $m$ společný bod koule $\varkappa$ a jedné koule dané, stojí tečné roviny, položené bodem $m$ k oběma těmto koulím, na sobě kolmo.

4. *Dva body a, b, dvě tečné roviny* $\tau$, $\sigma$. Rozpolme úhel rovin $\tau$, $\sigma$ rovinou $\varrho$, která obsahovati bude střed $s$ žádané koule $\varkappa$. Stanovme bod $c$, souměrný k $a$ podle roviny $\varrho$, jímž $\varkappa$ tolikéž musí procházeti. Body $a$, $b$, $c$ a rovinou $\tau$ jest úloha převedena na úl. 3.

5. *Dva body a, b, tečná rovina* $\tau$, *tečná koule* $\lambda$. Budiž $o$ střed koule $\lambda$, $s$ střed koule žádané $\varkappa$. Mysleme si, že koule $\varkappa$ je sestrojena (obr. 3., kdež rovinu $\tau$ si myslíme kolmou k nákresně), bod dotyku $s_1$ na $\tau$, bod dotyku obou koulí $t$ na $\overline{so}$ a zároveň na $\overline{ds_1}$, když $\overline{do} \perp \tau$. Ježto $\triangle ds_1o_1 \sim \triangle dte$, bude $\overline{de} : \overline{dt} = \overline{ds_1} : \overline{do_1}$, čili $\overline{ds_1} \cdot \overline{dt} = \overline{do_1} \cdot \overline{de}$. Avšak $\overline{ds_1} \cdot \overline{dt}$ je mocnost koule $\varkappa$ pro bod $d$, tedy součin úseků na *každé* sečně vedené bodem $d$ ke kouli $\varkappa = \overline{do_1} \cdot \overline{de} =$ konst. Spojíme-li tedy




Obr. 4.

daný bod $a$ s bodem $d$, a je-li $c$ druhý průsečík sečny $\overline{ad}$ s koulí $\varkappa$, bude $\overline{da} \cdot \overline{dc} = \overline{do_1} \cdot \overline{de}$. Podle toho řešíme úlohu 5. takto: středem $o$ dané koule $\lambda$ veďme kolmici $\overline{oo_1} \perp \tau$, stanovme její průsečíky $d$, $e$ s koulí $\lambda$, spojme body $ad$, a sestrojme na $\overline{ad}$ bod $c$ tak, aby $\overline{da} \cdot \overline{dc} = \overline{do_1} \cdot \overline{de}$, tož tím, že body $a$, $o_1$, $e$ proložíme rovinu, v ní týmiž body vedeme kružnici a stanovíme její průsečík $c$ s přímkou $\overline{ad}$. Bod $c$ leží na kouli $\varkappa$, která tudíž je určena třemi body $a$, $b$, $c$ a tečnou rovinou $\tau$, čímž úloha je převedena na úl. 3. Tato konstrukce dá výsledky dva, ale celkem budou čtyři, ježto koule $\varkappa$, $\lambda$ mohou se dotýkati také vnitř; další bod $c'$ nových dvou koulí dostaneme na přímce $\overline{ae}$ a na kružnici $ao_1d$.

6. *Dva body a, b, dvě tečné koule* $\mu$, $\nu$. Mysleme si, že žádaná koule $\varkappa$ dotýká se koulí $\mu$, $\nu$ (obr. 4.) v bodech $t$, $u$, jež leží na přímkách středných $\overline{os}$, $\overline{\omega s}$. Budiž $v$ vnější bod podob-

nosti (č. střed homologie) koulí $\mu$, $\nu$, totiž ve vrcholu vnějšího kužele koulím opsaného. Bod $v$ leží na přímce středné $\overline{o\omega}$, která seče $\mu$, $\nu$ ve vnitřních bodech $m$, $n$. Spojnice $\overline{ut}$ seče kouli $\mu$ v dalším bodě $r$; spojme $\overline{or}$. Z rovnosti úhlů jedním obloučkem v obr. 4. označených jde $\overline{or} \parallel \overline{\omega u}$, jsou tedy body $r$, $u$ homologické, t. j. spojnice $\overline{rtu}$ musí procházeti bodem $v$. Budiž $\overline{vyx}$ jedna vnější společná tečna koulí, $\overline{ox} \perp \overline{vx}$, $\overline{\omega y} \perp \overline{vy}$. Z rovnosti úhlů dvojím obloučkem označených jde $\triangle vxt \sim \triangle vuy$, z čehož $\overline{vt} : \overline{vx} = \overline{vy} : \overline{vu}$, čili $\overline{vt} \,.\, \overline{vu} = \overline{vx} \,.\, \overline{vy} =$ konst., a poněvadž to platí o libovolné sečně jdoucí bodem $v$, jest také

$$\overline{vm} \,.\, \overline{vn} = \overline{vx} \,.\, \overline{vy} = \overline{vt} \,.\, \overline{vu} = \text{konst.}$$

ježto pak $\overline{vt} \,.\, \overline{vu}$ je mocnost koule $\varkappa$ pro bod $v$, bude také na každé sečně $\overline{vca}$ koule $\varkappa$

$$\overline{va} \,.\, \overline{vc} = \overline{vu} \,.\, \overline{vt} = \overline{vm} \,.\, \overline{vn},$$

t. j. body $a$, $c$, $m$, $n$ leží na téže kružnici.

Majíce tedy úlohu 6. řešiti, stanovme vnitřní průsečíky $m$, $n$ spojnice $\overline{o\omega}$ s danými koulemi $\mu$, $\nu$, proložme body $a$, $m$, $n$ (nebo také $a$, $p$, $q$) kružnici v rovině $(amn)$, stanovme její průsečík $c$ s přímkou $\overline{av}$, a sestrojme kouli $\varkappa$, která procházejíc body $a$, $b$, $c$ dotýká se koule $\mu$ podle úlohy 3. Výsledky jsou dva; další dva dá vnitřní bod podobnosti koulí $\mu$, $\nu$ pomocí kružnice $apn$.

7. *Bod $a$, tři tečné roviny $\tau$, $\sigma$, $\varphi$.* Budiž průsečík rovin $(\tau\sigma\varphi) \equiv v$. Koule $\varkappa$ bude vnitř trojhranu $\tau\sigma\varphi$, v němž leží bod $a$. Rozpolme dva stěnové úhly trojhranu, na př. $\sphericalangle\, \tau\sigma$ rovinou $\xi$, $\sphericalangle\, \tau\varphi$ rovinou $\eta$; na průsečnici rovin $\xi\eta \equiv S$ bude střed $s$ koule $\varkappa$. Na $S$ vytkněme bod $o$, spusťme $\overline{ou} \perp \tau$; pomocná koule $\lambda$ opsaná ze středu $o$ poloměrem $\overline{ou}$ dotýká se rovin $\tau$, $\sigma$, $\varphi$. Bodem podobnosti koulí $\varkappa$, $\lambda$ je bod $v$. Spojnice $\overline{va}$ seče kouli $\lambda$ v bodech $m$, $n$; přímka $\overline{as} \parallel \overline{mo}$ (poloměry homologické) protne $S$ v středu $s$ žádané koule $\varkappa$, $\overline{sa}$ její poloměr. Přímka $\overline{as'} \parallel \overline{no}$ dá střed koule druhé.

*Řešení 2.* Sestrojme přímku $S$ jako prve a vepišme do trojhranu $\tau\sigma\varphi$ rotační kužel, jehož osa je $S$; koule $\varkappa$ bude do kužele vepsána. Rovina $(aS)$ protne kužel ve dvou přímkách $A$, $B$. V rovině $(aS)$ lze proložiti bodem $a$ dvě kružnice $K$, $K'$, jež dotýkají se přímek $A$, $B$. To jsou hlavní kružnice obou kulových ploch, jež úloze vyhovují.

8. *Bod* $a$, *dvě tečné roviny* $\tau$, $\sigma$, *tečná koule* $\lambda$. Rozpolme úhel rovin $\tau$, $\sigma$, který obsahuje bod $a$, rovinou $\xi$. Stanovme bod $b$, souměrný k bodu $a$ podle roviny $\xi$; bod $b$ bude také na kouli $\varkappa$. Tato je nyní určena dvěma body $a$, $b$, tečnou rovinou $\tau$ a tečnou koulí $\lambda$, čímž úloha převedena na úl. 5. Výsledky jsou čtyři jako tam; aby úloha byla možná, nesmí koule $\lambda$ býti oddělena cele od bodu $a$ ani rovinou $\tau$, ani rovinou $\sigma$.

9. *Bod* $a$, *tečná rovina* $\tau$, *dvě tečné koule* $\mu$, $\nu$. Z bodu $a$, tečných koulí $\mu$, $\nu$ sestrojíme ještě jeden bod $c$ žádané koule $\varkappa$ podle úlohy 6., načež kouli $\varkappa$ obdržíme z bodův $a$, $c$, tečné roviny $\tau$ a tečné koule $\mu$ podle úlohy 5. Výsledků jest osm; aby však úloha byla možná, musí dané koule (aspoň částečně) i daný bod ležeti na téže straně roviny $\tau$.

10. *Bod* $a$, *tři tečné koule* $\mu$, $\nu$, $\pi$. Jako v úloze 9. sestrojíme bod $c$ z prvkův $a$, $\mu$, $\nu$, obdobně další bod $d$ z prvkův $a$, $\mu$, $\pi$. Body $a$, $c$, $d$ proložíme kouli $\varkappa$ dotýkající se koule $\mu$ podle úlohy 3. Ježto koulím $\mu$, $\nu$ příslušejí dva body podobnosti, vnější $v$ a vnitřní $w$, koulím pak $\mu$, $\pi$ rovněž dva $v'$, $w'$, a každá ze čtyř kombinací $vw$, $v'w$, $vw'$, $v'w'$ dá výsledky dva, bude obecně *osm* koulí hovících úloze 10.

11. *Čtyři tečné roviny* omezují čtyřstěn, do něhož koule $\varkappa$ bude vepsána; střed její $s$ je v průsečíku rovin $\xi$, $\eta$, $\zeta$, jež půlí tři stěnové úhly čtyřstěnu $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, které přiléhají k jedné jeho stěně. Rozpůlíme-li také vnější úhly čtyřstěnu $\pi$-$\alpha$, $\pi$-$\beta$, $\pi$-$\gamma$ rovinami $\xi' \perp \xi$, $\eta' \perp \eta$, $\zeta' \perp \zeta$, dají průsečíky rovin $\xi\eta\zeta$, $\xi\eta\zeta'$, $\xi\eta'\zeta$, $\xi'\eta\zeta$, $\xi\eta'\zeta'$, $\xi'\eta\zeta'$, $\xi'\eta'\zeta$, $\xi'\eta'\zeta'$ středy celkem osmi koulí úloze vyhovujících.

12. *Tři tečné roviny* $\tau$, $\sigma$, $\varphi$, *tečná koule* $\mu$. Je-li $s$ střed žádané koule $\varkappa$, jež dotýká se koule $\mu$ vně, $o$ střed a $r$ poloměr koule $\mu$, $t$ bod dotyku obou koulí, bude pomocná koule $\lambda$ o středu $s$ a poloměru $\overline{so}$ dotýkati se rovin $\tau' \parallel \tau$, $\sigma' \parallel \sigma$, $\varphi' \parallel \varphi$ jichž vzdálenosti od rovin daných $= r$. Sestrojme tedy pomocné roviny $\tau'$, $\sigma'$, $\varphi'$ tak, aby vzdálenosti jejich od středu $o$ byly o $r$ *větší*, než vzdálenosti daných rovin od středu $o$, a sestrojme střed $s$ koule $\lambda$, která procházejíc bodem $o$ dotýká se rovin

$\tau$, $\sigma'$, $\varphi'$ podle úlohy 7.; $s$ je střed žádané koule $\varkappa$, výsledky jsou dva. Roviny $\tau'' \parallel \tau$, $\sigma'' \parallel \sigma$, $\varphi'' \parallel \varphi$, které jsou o $r$ *blíže* k středu $o$, než $\tau$, $\sigma$, $\varphi$, dají obdobnou konstrukcí další dva výsledky.

13. *Dvě tečné roviny* $\tau$, $\sigma$, *dvě tečné koule* $\mu$, $\nu$. Budiž $r$ poloměr, $a$ střed menší koule dané $\mu$, $s$ střed koule $\varkappa$ dotýkající se rovin $\tau$, $\sigma$ a koulí $\mu$, $\nu$ *vně*. Mysleme si kouli $\lambda$ o středu $s$ a poloměru $\overline{sa}$. Plocha $\lambda$ prochází bodem $a$, dotýká se rovin $\tau' \parallel \tau$, $\sigma' \parallel \sigma$, jež mají od středu $s$, tudíž i od středu $a$ vzdálenost o $r$ *větší* než roviny $\tau$, $\sigma$, a dotýká se koule $\nu'$, která je soustředná s koulí $\nu$, ale má poloměr o $r$ *menší*. Roviny $\tau'$, $\sigma'$ a kouli $\nu'$ sestrojme a stanovme podle úlohy 8. střed $s$ koule $\lambda$, která procházejíc bodem $a$ dotýká se rovin $\tau'$, $\sigma'$ a koule $\nu'$ vně. Bod $s$ je střed žádané koule $\varkappa$; její poloměr $= \overline{so} - r$. Výsledky jsou dva [1]; další dva obdržíme rovinami $\tau'' \parallel \tau$, $\sigma'' \parallel \sigma$, jež ke středu $a$ jsou o $r$ *blíže* než $\tau$, $\sigma$, a koulí $\nu''$, která je soustředná s koulí $\nu$, ale má poloměr o $r$ *větší*. Útvary $\tau'$, $\sigma'$, $\nu''$ dají další dva, útvary $\tau''$, $\sigma''$, $\nu'$ také dva výsledky, jichž jest tudíž celkem *osm*.

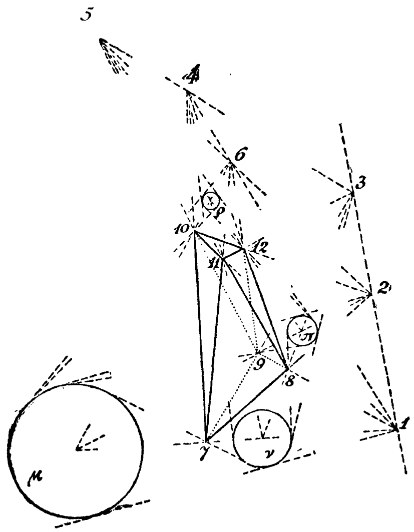
14. *Tečná rovina* $\tau$ *a tři tečné koule* $\mu$, $\nu$, $\pi$. Budiž nejmenší daná koule $\pi$ o poloměru $r$ a středu $a$. Je-li $s$ střed koule $\varkappa$ dotýkající se daných tří koulí *vně*, bude koule s ní soustředná $\lambda$ o poloměru $\overline{sa}$ procházeti bodem $a$, dotýkati se koulí $\mu'$, $\nu'$, jež jsou soustředny s koulemi $\mu$, $\nu$, majíce však poloměry o $r$ menší, a dotýkati se současně roviny $\tau' \parallel \tau$, jejíž vzdálenost $\tau'\tau$ jest o $r$ *větší*, než vzdálenost $\tau a$. Proložíme tedy podle úlohy 9. bodem $a$ plochu kulovou $\lambda$, která se dotýká koulí $\mu'$, $\nu'$ a roviny $\tau'$; její střed $s$ dá zároveň střed koule žádané $\varkappa$, jejíž poloměr $= \overline{sa} - r$. Tato konstrukce dá výsledky dva; další obdržíme pomocnými koulemi $\mu''$, $\nu''$ soustřednými s $\mu$, $\nu$, ale o poloměrech o $r$ větších, a další pomocnou rovinou $\tau'' \parallel \tau$, jejíž vzdálenost $\tau''\tau$ jest o $r$ menší než vzdálenost $\tau a$. Celkem úloha 14. dá výsledků 16.

15. *Čtyři koule* $\mu$, $\nu$, $\pi$, $\varrho$, jichž žádaná koule $\varkappa$ má se dotýkati. Redukcí nejmenší dané koule, na př. $\varrho$, v její střed $o$,

---

[1]) Nikoli čtyři jako v úloze 8., protože zde jde o koule dotýkající se daných koulí *vně*; tím vysvětluje se táž zdánlivá neshoda vyskytující se v následující úloze 14.

a současným zmenšením nebo zvětšením koulí $\mu$, $\nu$, $\pi$ o poloměr $r$ koule $\varrho$, převedeme úlohu tuto na úl. 10. Označíme-li redukované koule $\mu'$, $\nu'$, $\pi'$, resp. $\mu''$, $\nu''$, $\pi''$, dostaneme celkem 8 kombinací těchto prvků třetí třídy, jež liší se toliko svými akcenty; každá dá výsledky dva, takže obecně úloha 15. skytá výsledků šestnáct. [1])




Obr. 5.

[1]) Podali jsme tuto vůbec konstrukce, jichž odůvodnití lze geometrií elementárnou. Výhodnější jsou ovšem některé konstrukce, jež poskytuje vyšší geometrie synthetická. Na př. úlohu 15. lze řešiti takto: *Vnější* body podobnosti 1, 2, 6 (obr. 5.) koulí $\mu\nu$, $\mu\pi$, $\mu\varrho$ určují rovinu podobnosti $\sigma$ všech čtyř koulí (do níž zapadají i ostatní vnější body podobnosti 3, 4, 5). Rovině $\sigma$ jakožto polárné přísluší v koulích póly $m_0$, $n_0$, $p_0$, $r_0$. Sestrojíme-li střed koule orthogonálné k daným koulím (viz poznámku k úloze 3. dole pod čarou) čili bod $o$ stejných mocností, a promítneme-li z bodu $o$ póly $m_0$, $n_0$, $p_0$, $r_0$ na povrchy příslušných koulí (na každé bude jeden průmět vnitřní $m_1$ a jeden vnější $m_2$) dostaneme body dotyku $m_1$, $n_1$, $p_1$, $r_1$ žádané koule $\varkappa$ na koulích daných. Poloměry průmětů vnitřních prodlouženy protnou se v středu $s$ koule $\varkappa$, která se dotýká daných koulí vně, poloměry průmětů vnějších protnou se v středu $s'$ koule $\varkappa'$, která se dotýká daných koulí vnitř, všecky je objímajíc.

Důkaz zakládá se na této úvaze: Ježto rovina $\sigma$ prochází vnějším bodem podobnosti 1 koulí $\mu$, $\nu$, jsou i póly $m_0$, $n_0$ homologické $(\overline{m_0 n_0 1},$

16. Připojujeme ještě pět případů speciálních, kdy daný bod nachází se na dané rovině nebo na dané kouli. Tečná rovina s bodem dotyčným zastupuje tři podmínky, stačí tudíž podmínka ještě jedna. Dán buď na př. bod $a$, tečná rovina $\tau$ s bodem dotyčným $b$. Kolmice postavená v bodě $b$ na rovinu $\tau$ protne rovinu $\varrho$, kterou postavíme v středu tětivy $\overline{ab}$ kolmo, v středu $s$ žádané koule $\varkappa$, poloměr $= \overline{sa}$.

17. Bod $a$, tečná koule $\mu$ s bodem dotyčným $b$. Je-li $o$ střed koule $\mu$, spojme $\overline{bo}$ a postavme v bodě $b$ rovinu $\tau \perp \overline{bo}$; $\tau$ je tečná rovina žádané koule $\varkappa$, je tudíž úloha převedena na předchozí.

18. Dvě tečné roviny $\tau$, $\sigma$ a dotyčný bod $b$ v rovině $\tau$. Rozpolme úhel rovin $\tau\sigma$ rovinou $\varrho$ a v bodě $b$ postavme kolmici $K \perp \tau$; $K$ protne rovinu $\varrho$ v středu $s$ žádané koule $\varkappa$, poloměr $= \overline{rb}$. Rovina půlící vedlejší úhel rovin $\tau\sigma$ dá výsledek druhý.

19. Tečná rovina $\tau$ s bodem dotyčným $b$ a tečná koule $\mu$. Je-li $o$ střed koule $\mu$, $s$ střed žádané koule $\varkappa$ dotýkající se koule $\mu$ vně, bude pomocná plocha kulová $\lambda$ o středu $s$ a poloměru $\overline{so}$ dotýkati se roviny $\tau' \parallel \tau$, jejíž vzdálenost $\tau'\tau$ rovná se poloměru $r$ koule $\mu$. Položme tedy rovinu $\tau' \parallel \tau$ tak, aby vzdá-

---

v jedné přímce); ale také dotyčné body $m_1$, $n_1$ na těchto koulích jsou homologické podle 1 (viz úl. 6.), a homologické spojnice $\overline{m_0 m_1}$, $\overline{n_0 n_1}$ musí se protnouti na chordálné rovině koulí $\mu$, $\nu$ jakožto kollineační. Totéž platí i o každých jiných dvou koulích daných; ježto tedy každé dvě z přímek $m_0 m_1$, $n_0 n_1$, $p_0 p_1$, $r_0 r_1$ se protínají, musí procházeti jedním bodem $o$, a protože leží v chordálných rovinách koulí, jest bod $o$ totožný se středem koule orthogonálné. Totéž platí o kouli $\varkappa'$ určené body $m_2$, $n_2$, $p_2$, $r_2$. Ostatní roviny podobnosti dají výsledky další. Vnějších bodů podobnosti přísluší čtyřem koulím — po dvou — celkem 6, vnitřních rovněž 6 (v obr. 5. označené 7, 8 . . . 12). Těchto dvanáct bodů leží po třech na šestnácti osách podobnosti $\overline{123}$, $\overline{345}$, . . . a každým bodem podobnosti procházejí čtyři osy. Osy podobnosti leží po šesti v osmi rovinách, z nichž každá obsahuje 6 bodů podobnosti. Každá z těchto osmi rovin dá dvě koule (obdobně jako prve rovina $\sigma \equiv \overline{126}$) úloze vyhovující, což zase potvrzuje, že úloha 15. dává obecně výsledků 16. Tyto roviny podobnosti omezují *osmistěn* 7, 8, 9, 10, 11, 12, jehož vrchoíy jsou ve vnitřních bodech podobnosti; protější jeho hrany, na př. $\overline{7, 8}$; $\overline{10, 12}$, leží v jedné rovině (úhlopříčné).

Při nepříznivých vzájemných polohách daných koulí (jsou-li nedaleko od sebe) stávají se některé výsledky nemožnými, takže žádaných koulí jest méně než 16 (ale vždy počet sudý), což platí i o úlohách předchozích.

lenost $\tau'o$ byla o $r$ větší než vzdálenost $\tau o$, spusťme $\overline{bb'} \perp \tau'$, a sestrojme střed $s$ koule $\lambda$, která probíhajíc bodem $o$ dotýká se roviny $\tau'$ v bodě $b'$ podle úlohy 16. Bod $s$ je středem koule $\varkappa$, $sb'$ poloměr. Rovina $\tau'' \parallel \tau$, jejíž vzdálenost od středu $o$ jest o $r$ menší, než vzdálenost $\tau o$, dá výsledek druhý.

20. Dvě tečné koule $\mu$, $\nu$ a dotyčný bod $b$ na kouli $\nu$. Položíme-li bodem $b$ tečnou rovinu $\tau$ ke kouli $\nu$, dostaneme úlohu předchozí: dáno $\tau$, $b$, $\mu$. —

Řada těchto úloh rozhojní se o dalších 20, připojíme-li jakožto čtvrtý prvek *přímku*, které žádaná koule $\varkappa$ má se dotýkati. Mnohé však z těchto úloh vedou ke konstrukcím složitým, jichž elementární geometrií nelze vůbec odůvodniti (viz na př. řešení úlohy: sestrojiti kouli dotýkající se čtyř přímek mimoběžných, uveřejněné v Časopise mathematickém, ročník 1891, str. 6, autorem tohoto článku [1]). Jen některé úlohy sem spadající lze snadno a elementárně řešiti. Několik takových příkladů budiž tuto položeno.

21. Koule $\mu$ buď dána čtyřmi tečnami $A$, $B$, $C$, $D$, z nichž prvé tři leží v jedné rovině $\varrho$. Vepišme do trojúhelníka, jejž omezují tečny $A$, $B$, $C$, kružnici $L$, stanovme průsečík $p$ čtvrté tečny $D$ s rovinou $\varrho$, veďme bodem $p$ tečnu $\overline{pq}$ ke kružnici $L$ a učiňme na tečně $D$ $\overline{pt} = \overline{pq}$; $t$ je dotyčný bod tečny $D$ na kouli $\mu$. Kolmice $K$, postavená v středu kružnice $L$ na rovinu $\varrho$, a rovina $\sigma'$, položená bodem $t \perp D$, protnou se v středu $s$ koule $\mu$. Druhý bod $t'$ na $D$, jehož $\overline{pt'} = -\overline{pt}$, dá výsledek druhý. Symmetrály vnějších úhlů $\triangle ABC$ dají středy dalších tří kružnic a tím dalších 6 koulí úloze hovících.

Dán-li místo tečny čtvrté $D$ bod $d$, stačí spojiti bod $d$ s bodem $e$ na kružnici $L$ zvoleným, a v středu tětivy $\overline{de}$ postaviti rovinu $\varrho \perp \overline{de}$; průsečík $(\varrho K) \equiv s$.

22. Tři tečny $A$, $B$, $C$ procházející jedním bodem $v$, čtvrtá tečna $D$ mimoběžná k $A$, $B$, $C$. Proložme přímkami $A$, $B$, $C$ rotační plochu kuželovou $\varepsilon$, která dotýkati se bude žádané koule $\varkappa$ podél určité kružnice. Osu její $O$ obdržíme v průsečnici rovin $\xi$, $\eta$, jež úhly $AB$, $AC$ rozpolujíce stojí na jejich rovinách

[1]) Srovnej též s publikací »V. Jarolímek, O některých geom. místech středu plochy kulové« ve výroční zprávě c. k. vyšší reálky v Hradci Králové za rok 1892—93.

kolmo[2]). Proložme rovinu $\varrho$ bodem $v$ a tečnou $D$. Rovina $\varrho$ seče kuželovou plochu $\varepsilon$ ve dvou přímkách $E$, $F$ a žádanou plochu kulovou $\varkappa$ v kružnici $M$, která přímek $E$, $F$, $D$ bude se dotýkati. Vepišme tedy do $\triangle EFD$ kružnici $M$, a v středu jejím $o$ postavme kolmici $K \perp \varrho$. Přímka $K$ protne osu $O$ v středu $s$ koule $\varkappa$; její poloměr $r = \overline{sa} \perp A$. Kružnice $N$, která se dotýká přímek $E$, $F$ a strany $D$ *vně* trojúhelníka $EFD$, dá výsledek druhý. Ježto však tečna $D$ probíhá *čtyřmi* rotačními kuželi, jež přímkami $A$, $B$, $C$ lze proložiti, obdržíme výsledků celkem osm.

Dána-li místo čtvrté tečny $D$ koule $\lambda$, jíž koule $\varkappa$ má se dotýkati, položme ke kuželi $\varepsilon$ tři tečné roviny $\tau$, $\sigma$, $\varphi$, a řešme pak úlohu $\tau$, $\sigma$, $\varphi$, $\lambda$ podle úl. 12. — Dán-li místo koule $\lambda$ bod $a$, řešíme úlohu $\tau$, $\sigma$, $\varphi$, $a$ podle úl. 7.

23. Dány tři tečné roviny $\tau$, $\sigma$, $\varphi$ a jedna tečná přímka $D$. *Vepišme* do trojhranu $\tau\sigma\varphi$ rotační kužel $\varepsilon$, jehož osa $O$ je v průsečnici rovin půlících stěnové úhly $\tau\sigma$, $\tau\varphi$, a pokračujme pak podle úlohy 22. Výsledků bude celkem 8 jako tam.

24. Čtyři tečny $A$, $B$, $C$, $D$, z nichž každé dvě sousední se protínají tak, že všecky čtyři tvoří sborcený čtyřúhelník. Dotýkají-li se ramena úhlu $AB$ koule $\varkappa$, leží střed koule $s$ v rovině $\varrho$, která rozpolujíc úhel $AB$ stojí na rovině jeho kolmo. Rozpůlíme-li obdobně úhly $BC$, $CD$ rovinami $\sigma \perp BC$, $\tau \perp CD$, dá průsečík rovin $(\varrho\sigma\tau) \equiv s$ střed koule $\varkappa$, $\overline{sa} \perp A$ její poloměr. Neboť spustíme-li $\overline{sb} \perp B$, $\overline{sc} \perp C$, $\overline{sd} \perp D$, bude, protože $s$ leží v rovině souměrnosti $\varrho$ úhlu $AB$, $\overline{sa} = \overline{sb}$; $s$ je v rovině souměrnosti $\sigma$ úhlu $BC$, tedy $\overline{sb} = \overline{sc}$, a $s$ je posléze v rovině souměrnosti $\tau$ úhlu $CD$, pročež $\overline{sc} = \overline{sd}$, tudíž $\overline{sa} = \overline{sb} = \overline{sc} = \overline{sd}$. Konstrukci lze patrně vykonati i tehdy, když tečny $D$, $A$ se neprotínají, takže není právě nutno, aby dané tečny tvořily čtyřúhelník uzavřený; ale stačí, aby se tři dvojiny tečen protínaly. Rozpůlením vedlejších úhlů $AB$, $BC$, $CD$ dojdeme k výsledkům dalším. Celkem jest obecně osm koulí, jež dotýkají se daných čtyř přímek.

---

[2]) Anebo: Vnesme na $A$, $B$, $C$ libovolnou úsečku $\overline{va} = \overline{vb} = \overline{vc}$, proložme body $a$, $b$, $c$ rovinu $\varrho$ a spusťme z bodu $v$ kolmici $O \perp \varphi$.