Arnošt Dittrich

Stanovení nejjednodušších opticky významných případů z Maxwellových rovnic

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 2, 139--149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121103`

Odvoďme k těmto kuželosečkám vůči bodu o centrálně podobné křivky v tečné rovině na základě téhož poměru zvětšení, položivše v rovnicích (3) a (4)

$$z = h, \quad r_3 = 0, \quad R_3 = 0.$$

Tyto křivky jsou pak indikatricemi ploch v tomto bodě. Jich společné průměry stotožňují se se společnými průměry zmíněných infinitesimálních kuželoseček a tedy s tečnami průsečné křivky daných ploch ve dvojném bodě o.

Dodatek. Přejde-li jedna z ploch v tečnou rovinu k ploše druhé, přejde její indikatrix v úběžnou přímku; prochází tedy tečny ve dvojném bodě průsečné křivky úběžnými body indikatrice druhé plochy v tomto bodě.

V obyčejném bodě plochy má průsečná křivka plochy s rovinou tečnou dvojný bod; tečnami v něm jsou asymptoty indikatrice plochy, jež se zovou jejími hlavními čili inflekčními tečnami ve zmíněném bodě.

Stanovení nejjednodušších opticky významných případů z Maxwellových rovnic.

Napsal dr. **A. Dittrich** v Třeboni.

Aby řešení Maxwellových rovnic vztahovalo se na případy optické, předpokládá se, že elektrický a magnetický vektor zachovává kontinuitu. K tomuto předpokladu připojíme druhý:

Poloha proudokřivek energie jest na čase nezávislá.

Tímto předpokladem zajistíme si existenci paprsků — po případě křivočarých. Jsou to jedinci ze svazku všech proudokřivek energie.

Jsou dva případy. Buď paprsky protínají jistý svazek ploch orthogonálně neb ne.

Hledáme případ „nejjednodušší", t. j. mathematicky přístupný. Proto budeme předpokládati, že plochy orthogonálné k paprskům existují. Říkejme jim vlnoplochy.

Obecně nevyhovují — jak samozřejmo — vlnoplochy differenciální rovnici Ossian-Bonnetově pro orthogonální soustavy ploch. Budeme to však předpokládati. Jde nám o případ „nejjednodušší“!

Nyní zavedeme křivočaré orthogonálné souřadnice ξ, η, ζ. *Vlnoplochy* buďtež plochami *stálého* ζ. Proto jsou *paprsky* křivkami *proměnného* ζ.

Čtverec elementu délkového ds v křivočarých orthogonálních souřadnicích jest

$$ds^2 = a_1^2\, d\xi + a_2^2\, d\eta + a_3^2\, d\zeta.$$

Směry rostoucího ξ, η, ζ zvolíme předem tak, aby si příslušely jako směr osy x, y, z francouzského kříže souřadnic.

Složky elektrického vektoru ve směru rostoucího ξ, η, ζ jsou

$$X,\ Y,\ Z.$$

Složky vektoru magnetického jsou

$$X_m,\ Y_m,\ Z_m.$$

Pak zní Maxwellovy rovnice *) pro ústředí nevodivé s permeabilitou rovnou jedné a dielektrickou konstantou K:

$$\begin{aligned}
\frac{K}{V} a_2 a_3 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} a_2 Y_m - \frac{\partial}{\partial \eta} a_3 Z_m \\
\frac{K}{V} a_3 a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} a_3 Z_m - \frac{\partial}{\partial \zeta} a_1 X_m \\
\frac{K}{V} a_1 a_2 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta} a_1 X_m - \frac{\partial}{\partial \xi} a_2 Y_m, \\
-\frac{a_2 a_3}{V} \frac{\partial X_m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} a_2 Y - \frac{\partial}{\partial \eta} a_3 Z \\
-\frac{a_3 a_1}{V} \frac{\partial Y_m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} a_3 Z - \frac{\partial}{\partial \zeta} a_1 X \\
-\frac{a_1 a_2}{V} \frac{\partial Z_m}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \eta} a_1 X - \frac{\partial}{\partial \xi} a_2 Y.
\end{aligned}$$

Hledejme ta řešení, pro něž

1. Poyntingův vektor má vždy a všude směr rostoucího ζ,
2. zachována kontinuita vektoru elektrického i magnetického.

---

*) Dr. F. Koláček: Elektřina a magnetismus. Kap. XVI. § 118.

První podmínka praví, že elektrický i magnetický vektor padne vždy a všude do vlnoplochy ζ tak, že trvale a kdekoliv

$$Z = 0, \quad Z_m = 0.$$

Maxwellovy rovnice poskytují pak vztahy

$$\frac{K}{V} a_2 a_3 \frac{\partial X}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial \zeta} a_2 Y_m; \qquad \frac{a_2 a_3}{V} \frac{\partial X_m}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \zeta} a_2 Y,$$

$$\frac{K}{V} a_3 a_1 \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \zeta} a_1 X_m; \qquad \frac{a_3 a_1}{V} \frac{\partial Y_m}{\partial t} = + \frac{\partial}{\partial \zeta} a_1 X;$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} a_1 X = \frac{\partial}{\partial \xi} a_2 Y,$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} a_1 X_m = \frac{\partial}{\partial \eta} a_2 Y_m.$$

Podmínka druhá vyslovující kontinuitu vektorů zní pak

$$\frac{\partial}{\partial \xi} a_2 a_3 X + \frac{\partial}{\partial \eta} a_1 a_3 Y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} a_2 a_3 X_m + \frac{\partial}{\partial \eta} a_1 a_3 Y_m = 0.$$

Pro přehlednost dosadíme

$$a_1 X = A; \qquad a_1 X_m = A_m; \qquad \frac{a_1}{a_2} = a,$$

$$a_2 Y = B; \qquad a_2 Y_m = B_m; \qquad a_3 = b.$$

Tím obdržíme z hořejší soustavy

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{\partial B}{\partial \xi}; && \frac{\partial A_m}{\partial \eta} = \frac{\partial B_m}{\partial \xi}, \\
&\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{b}{a} A = - \frac{\partial}{\partial \eta} ab B; && \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{b}{a} A_m = - \frac{\partial}{\partial \eta} ab B_m. \\
&\frac{K}{V} ab \frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial A_m}{\partial \zeta}; && \frac{1}{V} ab \frac{\partial B_m}{\partial t} = + \frac{\partial A}{\partial \zeta}, \\
&\frac{K}{V} \frac{b}{a} \frac{\partial A}{\partial t} = + \frac{\partial B_m}{\partial \zeta}; && \frac{1}{V} \frac{b}{a} \frac{\partial A_m}{\partial t} = - \frac{\partial B}{\partial \zeta}.
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nejjednodušší případ, k němuž směřujeme, obdržíme položíce

$$ab = 1, \qquad \frac{b}{a} = 1.$$

Pak jest pro kladnost hodnot a, b

$$a = 1, \qquad b = 1,$$

tak že

$$a_3 = 1, \qquad a_1 = a_2.$$

Tyto dvě relace určují ty orthogonální soustavy, pro něž rovnice (1) jsou nejjednodušší.

Tímto stanovením budeme se obírati nejdříve. Pak se zase vrátíme k rovnicím.

Tvar vlnoploch. Podmínka $a_3 = 1$ praví, že plochy stálého ζ jsou t. zv. plochy parallelní. Element normály ds_3 padající mezi plochu ζ a $\zeta + d\zeta$ jest totiž

$$ds_3 = a_3 d\zeta,$$

tak že v našem případě

$$ds_3 = d\zeta.$$

Poněvadž tato vzdálenost jest nezávislá na ξ, η, obdržíme z plochy ζ sousední $\zeta + d\zeta$, pošineme-li každý její bod (ξ, η) o touž infinitesimální dráhu

$$ds_3 = d\zeta$$

na jeho vlastní normále. Opakujíce tento proces nekonečně často jak směrem rostoucího tak ubývajícího ζ, vytvoříme všechny plochy ζ z jediné z nich.

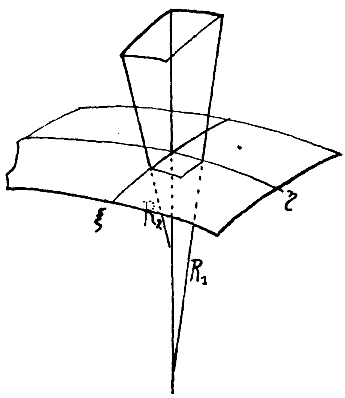
Z theorií Sopha Lie-ho plyne, že svazek ploch ζ lze vytvořiti následujícím z optiky známým způsobem:

Kol každého bodu jedné z ploch ζ vedeme kouli o poloměru r. Tento jest pro všechny její body týž. Obě obálky vzniklých ∞^2 koulí představují pak dvě další vlnoplochy ζ. Měníce pak r můžeme vytvořiti všechny.

Podmínka $a_3 = 1$ praví tedy, že plochy ζ mají vlastnosti Huygensovým principem vytvořených vlnoploch. Z těch vytkneme pro pozdější použití, že paprsky, čáry proměnného ζ, jsou přímky; jsou to společné normály svazku vlnoploch.

Druhá podmínka $a_1 = a_2$ praví, že každá z ploch ζ rozdělí se křivkami proměnné ξ a η v infinitesimální čtverce, uložíme-li inkrementům parametrů podmínku $d\xi = d\eta$. Dle věty Ossian-Bonnetovy jsou ale křivky ξ, η na ploše ξ zároveň jejími křivoznačnými čarami. Z toho plyne, že každou plochu ζ lze rozložiti křivoznačnými čarami v infinitesimální čtverce. Takové plochy nazývají se *isothermické*; náležejí k nim plochy druhého stupně, plochy rotační a stálého zakřivení. Souhrn jich definován partiální rovnicí differenciální — čtvrtého stupně —, kterou v roce 1883 nalezl Weingarten.

Abychom stanovili qualitu orthogonální soustavy, pro niž rovnice (1) zjednoduší se co nejvíce, třeba určiti ty svazky paralellních ploch, jichž jednotlivé plochy jsou isothermické.



Obr. 1.

Svazek parallelních ploch jest dokonale určen jedinou z ploch. Nazveme ji plochou základní. Z té obdržíme plochy ostatní t. zv. dilatací, tečnou transformací, jež v optice sluje Huygensovým principem.

Jest nutno, aby základní plocha S byla isothermickou. Na ni učiníme parametry bodu souřadnice ξ, η křivoznačných čar. Tyto zvolíme tak, aby podmínka $d\xi = d\eta$ stanovila rozdělení plochy S v infinitesimální čtverce.

Z této plochy zjednáme si následujícím způsobem orthogonální soustavu.

Systém ploch ζ obdržíme z plochy S pomocí principu Huygensova. Soustavu ploch ξ a η tvoří rozvinutelné plochy společných normál ku plochám ζ, očíslované týmiž veličinami ξ, η jako křivoznačné čáry plochy S, jež na této vytínají.

Vykresleme nyní — viz obr. 1. — v ploše S infinitesimální čtverec příslušný bodu ξ, η. Týž čtverec přeneseme pak pomocí normál na jinou plochu ξ.

Infinitesimální figura v ploše ξ jest dle povahy orthogonální soustavy stanovena čtyřmi křivoznačnými čarami této plochy ξ, η, $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, jimž přísluší tytéž čtyři numerické hodnoty jako stranám infinitesimálního čtverce v ploše S. Pro tento čtvereček bylo ale $d\xi = d\eta$. Proto jest i v ploše ζ

$$d\xi = d\eta,$$

t. j. i přenesená infinitesimální figura jest čtverec.

Na první pohled patrno z obrazce, že tato podmínka splněna tehdy a jen tehdy, je-li poloměr křivosti

$$R_1 = R_2.$$

Plocha S musí míti samé body kruhové. Tedy jest *koule* neb *rovina* *).

Hledaný nejjednodušší případ týká se kulových a rovinných vln.

Zpracování rovnic. Další úvahy opírají se pouze o soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{\partial B}{\partial \xi}; && \frac{\partial A_m}{\partial \eta} = \frac{\partial B_m}{\partial \xi},\\
&\frac{\partial A}{\partial \xi} = -\frac{\partial B}{\partial \eta}; && \frac{\partial A_m}{\partial \xi} = -\frac{\partial B_m}{\partial \eta}.\\
\frac{K}{V}&\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial A_m}{\partial \zeta}; & \frac{1}{V}&\frac{\partial B_m}{\partial t} = +\frac{\partial A}{\partial \zeta},\\
\frac{K}{V}&\frac{\partial B}{\partial t} = +\frac{\partial B_m}{\partial \zeta}; & \frac{1}{V}&\frac{\partial A_m}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial \xi}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Prvé čtyři rovnice praví, že

$$B + iA = f(z); \qquad B_m + iA_m = f_m(z),$$

kde

$$z = \xi + i\eta.$$

---

*) Důkaz v každé differenciální geometrii neb theorii ploch.

Obě soujemné funkce f_m, f závisí ještě na dvou veličinách t a ξ. Jaká toto závislost jest, určují dvě rovnice

$$\frac{K}{V}\frac{\partial f}{\partial t} = i\,\frac{\partial f_m}{\partial \zeta}; \qquad \frac{i}{V}\frac{\partial f_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi},$$

jež jsou aequivalentní posledním čtyřem rovnicím. Při tom jest

$$\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial B}{\partial t} + i\,\frac{\partial A}{\partial t} \text{ atd.}$$

Aby se rovnice co nejvíce zjednodušily, zvolme jednotku času tak, aby rychlost

$$\frac{V}{\sqrt{K}} = 1.$$

Pak jest Webrovo číslo $V = \sqrt{K}$ a rovnice zní

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{i}{\sqrt{K}}\frac{\partial f_m}{\partial \xi},$$

$$\frac{i}{\sqrt{K}}\frac{\partial f_m}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Ty sečteme a odečteme, čímž plyne

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f + \frac{i}{\sqrt{K}} f_m\right] = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[f + \frac{i}{\sqrt{K}} f_m\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[f - \frac{i}{\sqrt{K}} f_m\right] = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[f - \frac{i}{\sqrt{K}} f_m\right].$$

Zavedeme-li konečně — rovněž soujemné — funkce

$$g = f + \frac{i}{\sqrt{K}} f_m,$$

$$h = f - \frac{i}{\sqrt{K}} f_m$$

jest

$$\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0,$$

tak že

$$g \equiv g\,(z,\ t + \xi), \quad h \equiv h\,(z,\ t - \xi).$$

Dospěli jsme tedy k následujícímu výsledku:

Funkce hovící serii rovnic (2) obdržíme z dvou soujemných funkcí (g, h), jichž koefficienty závisí na jedné reálné proměnné $t + \zeta$ po případě $t - \zeta$.

Řešiti problém týkající se kulových neb rovinných vln znamená proto nalézti ony dvě soujemné funkce.

Význam stereografické projekce. Tato transformace má pro úlohy, jimiž se zabýváme, obzvláštní zájem. Abychom k větám jí se týkajícím dospěli, určíme blíže souřadnice ξ, η, ζ jednak pro rovinné jednak pro kulové vlny.

U rovinných vln lze ztotožniti křivočaré souřadnice s obyčejnými Carteskými. Směr rostoucího z jest směrem paprsků, vlnoplochy jsou roviny rovnoběžné s rovinou x, y. V případě tom jest

$$a_1 = 1 = a_2.$$

Křivočaré souřadnice pro kulové soustředné vlny zjednáme si následujícím způsobem. Vytkněme si mezi vlnoplochami kouli o *průměru* rovném jedné. Položme k ní jednu tečnou rovinu. Z bodu, jenž leží diametrálně proti tečnému bodu, promítneme kouli stereograficky na tečnou rovinu. Stíny bodů koule ležící v rovině očíslujeme pak pravoúhlými souřadnicemi ξ, η položivše počátek kříže do tečného bodu, osy do tečné roviny. Jest to z funkční theorie známý C. Neumannův způsob přenesení roviny soujemných čísel

$$z = \xi + i\eta$$

na kouli.

Nyní zjednáme si křivoznačné souřadnice pomocí polopaprsků, jež jdou středem koulí. Každý paprsek vyznačíme párem hodnot ξ, η, jenž přísluší bodu, v němž protne kouli o poloměru $\frac{1}{2}$. Třetí souřadnice ζ budiž vzdáleností bodu od středu — poloměr koule, v níž leží.

Tato volba souřadnic jest přípustná, poněvadž stereografická projekce isothermy

$$d\xi = d\eta$$

v rovině mění v isothermy na kouli. Pamatujme pro další, že

$$a_1 = \frac{2\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + 1} = a_2.$$

Zjistili jsme nahoře, že pomocí dvou soujemných funkcí $g(z)$ a $h(z)$ lze splniti rovnice (2). Dle toho, zda pak z zobrazíme bodem roviny či — stereografickou projekcí — koule, obdržíme případ rovinných či kulových vln.

Je-li tedy rozřešen direktně nějaký problém o vlnách rovinných — ku př. úloha Lecherova arrangementu, — lze pomocí stereografické projekce použíti tytéž formule ještě pro ∞^2 problémů o vlnách kulových. Možností přenesení jest nekonečně v druhém stupni, poněvadž tolikerým způsobem lze položiti jednotkovou kouli na rovinu z.

Ku konci naznačíme několik příkladů k předchozím theoriím.

1. *Rozložení elektrického a magnetického vektoru v rovinných vlnách.*

Vezmou se v úvahu funkce f a f_m. Tyto jsou spojité, konečné a jednoznačné v celé rovině z. Třeba přihlédnouti k tomu, že rovina v úvahách fysikálních nemá jediný nekonečně vzdálený bod jako rovina soujemných čísel. Ale přes to nemohou f a f_m býti celistvými transcendentami; jsou komplexními konstantami.

2. *Předchozí úloha pro vlny kulové.*

Nyní jest

$$f = \frac{2\zeta(Y + iX)}{\xi^2 + \eta^2 + 1}; \quad f_m = \frac{2\zeta(Y_m + iX_m)}{\xi^2 + \eta^2 + 1}$$

na celé *kouli* z spojité, konečné a jednoznačné. Poněvadž pak obě funkce pro $z = \infty$ zmizí, jsou *nullou.*

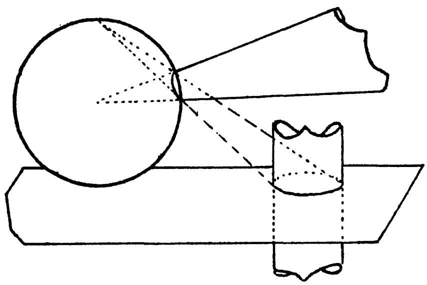
Na kulových vlnách jest spojité rozložení vektorů nemožné. V rovinných existuje jediné, při němž silokřivky elektrické i magnetické tvoří dvě osnovy rovnoběžných přímek. Sklon a velikost sil v určité rovině jest jen funkcí času.

3. *Přenesení elektrostatických dvojrozměrných úloh na případy kulové.*

Máme-li v prostoru x, y, z statický stav elektrický nezávislý na z, lze pomocí funkční theorie jisté problémy*) řešiti. Případy tyto náležejí k těm, jimiž se zde zabýváme.

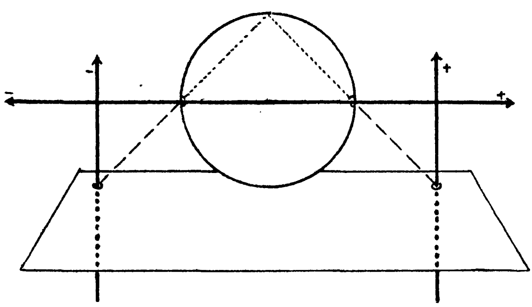
*) Viz Koláček, Elektřina a magnetismus. Kap. VI.

Užijeme-li přenesení stereografickou projekcí na kouli — obr. 2. — zobrazí se kovový válec v prostoru xyz, kovovým kuželem v prostoru ξ, η, ζ. Kontura válce v rovině x, y a kužele na kouli jednotkové souvisí stereografickou projekcí.



Obr. 2.

Ku př. V prostoru xyz jsou dvě rovnoběžná do nekonečna doucí kovová vlákna kolmá k rovině xy. Obr. 3. ukazuje, že



Obr. 3

za určitých podmínek promění se použitím naší transformace v antiparallelní polopaprsky vycházející ze středu koulí. Lze tedy řešiti tuto elektrostatickou úlohu.

Vodivý polopaprsek má kladný náboj, druhý, jenž jej doplňuje v paprsek, má náboj záporný.

Principem reciprokých radiů lze polopaprsky invertovati v poloroviny téže kružnice. — Poslední dvě úlohy mají jakýsi význam.

4. Lecherovo arrangement. Tytéž formule, jež řeší případy rovnoběžných napnutých drátů, hodí se též pro dráty radiálně z jednoho bodu vycházející. Tyto považujeme za nekonečně tenké. Protnou vlnoplochu v bodech

$$a_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Sdělíme jen výsledek. Funkce f a f_m (obsahující též čas!) zní pak

$$f(z) = a + bi + \sum_1^n{}^\nu T_\nu\left(\frac{1}{z - a_\nu}\right),$$

$$f_m(z) = a_m + b_m i + \sum_1^n{}^\nu T_{m\nu}\left(\frac{1}{z - a_\nu}\right).$$

Každé T jest celistvou transcendentou; žádné neobsahuje stálý člen. Jde-li o vlny kulové, jest

$$a + bi \equiv 0; \quad a_m + b_m i \equiv 0.$$

Transcendenty T_ν mají v bodě a_ν dojista podstatnou singulárnost. $T_{m\nu}$ ji míti mohou, ale bod a_ν může býti pro ně též pólem.

Toto řešení jest přibližné. Neboť průměr drátu musil by býti nullou, aby podmínka Maxwellovy theorie, že síla elektrická stojí na dokonalém vodiči kolmo, znamenala, že bod, v němž drát vlnoplochu protne, jest podstatně singulárný. Průměr drátu ale nesmí býti nullou, aby do elektromagnetického pole nenáležely body, v nichž celé transcendenty rostou nad libovolně velké číslo.

5. Lze vlnění světelné v cylindrických a kuželovitých svazcích paprsků, jež realisujeme pomocí čoček, vystihnouti pomocí soujemných funkcí, jež mají přirozené hranice?

Úvod do vektorové analyse.

Napsal řed. **Ant. Libický**.

(Pokračování.)

Položme po čtvrté

$$\mathbf{v} = uv \nabla w;$$

pak

$$div(uv \nabla w) = \nabla uv \,.\, \nabla w + uv\, div \nabla w$$
$$= u \nabla v \,.\, \nabla w + v \nabla u \,.\, \nabla w + uv \nabla^2 w.$$