

# Časopis pro pěstování matematiky a fyziky

---

L. Borovanský

Ukázky themat daných k písemným zkouškám maturitním na českých školách středních v škol. r. 1907 [II.]

*Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, Vol. 37 (1908), No. 2, 217--221

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/121102>

## Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1908

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

určení korekce, že se hodiny při natahování opozdily o jistý celý počet kyvů (přibližně o dvojnásobný počet kyvů, jež kyvadlo učinilo při natahování). V lepších kyvadlových hodinách je chod od natahování nezávislý. *N.*

## Ukázky themat

daných k písemným maturitním zkouškám z matematiky na českých školách středních v školním roce 1906—7.

Vybral **L. Borovanský.**  
(Pokračování.)

26. Součet prvního a čtvrtého členu řady geometrické má se k součtu druhého a třetího členu jako 7 : 3 ; člen druhý jest o 48 menší čtvrtého. Vypočísti člen první a podíl řady.

27. Řešiti soustavu rovnic :

$$1. x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}} = 8, \quad 2. x^2 + y^{\frac{9}{4}} = 134.$$

28. Řešiti rovnici

$$\log \sqrt[3]{4(9x^2 - 4) - 7(x + 2)} - \log \sqrt[3]{(x + 1)^2 - 4x} = \frac{2}{3}.$$

29. Stanoviti hodnotu zlomku :

$$\frac{1 - 2 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 4 \cos^3 \alpha + \dots \text{in inf.}}{1 + 2 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha + 4 \cos^3 \alpha + \dots \text{in inf.}}$$

30. Kdosi opomenul po 7 let vybíratí si 21letý důchod ročních 800 K. I dohodl se s ústavem, aby za to zbývající důchod 14letý byl přiměřeně zvětšen. Jaký byl zvětšený důchod při 4% celoročním slož. úrokování ?

31. *A* a *B* začnou současně šetřiti. *A* má kapitál 2433 K, který uloží a nevybírání úroků ; *B* nemá jmění, ukládá však ze svého příjmu na konci roku 300 K. Za kolik let mají stejné při 4% úrok. slož. celoročním ?

32. Jakou stranu má kosočtverec, jehož součet úhlopříčen  $s = 96$  a jeden úhel  $\alpha = 56^{\circ}26'$  ?

33. Na ramenech úhlu  $120^{\circ}$  jsou body *A* a *B*, jichž vzdálenost jest 31 *m*. Pošineme-li bod *A* o 10 *m* dále od vrcholu, obnáší vzdálenost jejich 39 *m*. Jak daleko jest *A* a *B* od vrcholu ?

34. V trojbokém jehlanu o výšce  $v = 6$ , jest pata této středem kružnice vepsané do podstavy, jejíž obvod  $2s = 120$  a strany její mají se k sobě jako  $5 : 12 : 13$ . Jest určití obsah jehlanu, jeho povrch a úhly, jež svírají pobočné stěny se základnou.

35. Základna trojbokého hranolu přímého jest rovnoramenný trojúhelník, jehož úhel při základně trojúhelníka dán jest rovnicí  $\cotg \frac{\alpha}{2} = 3$ . Poloměr koule do hranolu vepsané jest  $r = 10$  cm. Stanoviti povrch a obsah.

36. Obsah výseče kulové jest  $72\pi$ , úhel při vrcholu osového řezu  $2\alpha = 120^\circ$ . Určiti poloměr koule a obsah příslušné úseče.

37. Trojúhelník o stranách  $a, b, c$  otáčí se postupně kol svých tří stran. a) Najíti obecně poměr obsahů tří těles takto vzniklých. b) Dle výsledků a) vypočísti tyto obsahy pro  $a = 4, b = 13, c = 15$ .

38. V pravidelném jehlanu tvoří sousední stěny pobočné úhel  $\beta = 135^\circ$  a sousední hrany pobočné úhel  $\varphi = 40^\circ 46' 28''$ . Kolik stěn má jehlan a jak velký úhel  $\alpha$  svírají stěny pobočné se základnou?

39. Dne 20. července pozoroval jsem, že tyč svislá vrhá stín rovný své výšce. V kolik hodin to bylo (pravého času slunečního)? (Zeměpisná šířka  $\varphi = 49^\circ 32'$ , deklinace toho dne  $\delta = 20^\circ 50'$ .)

40. Jest vypočísti nejkratší vzdálenost přímky  $5x + 12y = 35$  od ellipsy  $\left(\frac{x}{16}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ .

41. Na ellipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$  vyšetřiti jest bod, u něhož jest úhel  $\alpha$  sevřený normálou a spojnicí tohoto bodu se středem největší.

42. Z bodu  $m(-3, 2)$  vésti tečny k parabole  $y^2 = 12x$ . Vyšetřiti pak na parabole bod, jehož úsečka rovná se pořadnici a srovnati obsah trojúhelníka, majícího vrchol v tomto bodě a v obou bodech tečných s obsahem trojúhelníka, jenž má za stranu tečnu ve vytčeném bodu a obě tečny s daného bodu vedené.

43. Parabola má normálu  $N \equiv 2x + y = 24$ . Určiti rovnici paraboly, úhel, který svírá normála s průvodičem tečného bodu a rovnicí tečny.

44. Na kružnici  $x^2 + y^2 = 169$  najít bod, jehož tečna tvoří s tečnami v průsečných bodech kružnice s osou  $x$  s touto osou lichoběžník určitého obvodu  $L = \frac{247}{3}$ .

45. Bodem  $m(x = 3)$  ležícím na parabole  $y^2 = 12x$  vésti takovou ellipsu v poloze základní, která by parabolu kolmo protínala.

46. Ze středu kruhu  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$  vedeny jsou tečny k ellipse  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ; jest dokázati, že střed poláry leží na dané kružnici a středy obou křivek se středem poláry na jediné přímce.

47. Libovolný bod  $m_1$  přímky  $L \equiv x - 10 = 0$  spojen s body  $m_2(6, 0)$ ,  $m_3(-6, 0)$  a pak bodem  $m_2$  vedena kolmice k přímce  $m_1m_2$ ; ustanoviti geometrické místo bodu  $m_4$ , v kterém tato kolmice protíná přímku  $m_1m_3$ .

48. Na sdružené průměry hyperboly  $9x^2 - 4y^2 = 36$  spuštěny s obou ohnisek kolmice. Vyšetřiti geometrické místo průsečíků těchto kolmic.

49. V trojúhelnících nad toutéž podstavou  $c = 8$  jest  $tg \alpha \cdot tg \beta = 9$ , kdež  $\alpha$  a  $\beta$  jsou úhly při podstavě; které jest geometrické místo temene a jak zní rovnice tečen tvořících s kladnou částí osy  $x$  úhel  $\alpha = 135^\circ$ ?

50. Jest určití společné vnější tečny kružnic:

$$K_1 \equiv x^2 + y^2 + 14x + 6y + 33 = 0$$

$$K_2 \equiv x^2 + y^2 - 16x - 4y - 32 = 0.$$

## Ukázky themat

daných k písemným zkouškám maturitním z deskriptivní geometrie ve šk. r. 1901 na německých reálkách předlitavských.

(Vybral Jos. Kálal.)

1. Dány jsou 3 mimoběžky  $A \equiv \overline{ab}$ ,  $B \equiv \overline{cd}$ ,  $C \equiv \overline{ef}$  a bod  $p$ ; veďte tímto bodem rovinu  $\rho$ , svírající se všemi třemi přímkami stejné úhly. [ $a(0, 0, 6\cdot5)$ ,  $b(3\cdot5, 0, 10)$ ;  $c(0, 0, 1\cdot5)$ ,  $d(0, 3\cdot5, 6)$ ;  $e(0, 0, 4\cdot5)$ ,  $f(7, 1\cdot5, 8)$ ;  $p(5, 5, 10)$ ]. (Cheb.)

2. Bodem  $a$  veďte přímku  $P$  různoběžnou s přímkou  $C \equiv \overline{de}$  a k přímkám  $A \equiv \overline{pn}$  a  $B \equiv \overline{bc}$  stejně nakloněnou [ $a(0, 0, 4\cdot5)$ ;  $p(12, -12, 0)$ ,  $n(3, 0, 9)$ ;  $b(-4, 5, 7)$ ,  $c(2, 0, 7)$ ;  $d(-9, -8\cdot5, 0)$ ,  $e(-3\cdot5, 0, 4)$ ]. (Viedeň IV.)

3. Rotační kužel jest dán vrcholem  $v$ , středem podstavy  $s$  a jedním jejím bodem  $m$ . Protněte ho v parabole, jejíž průměry jsou rovnoběžny s povrchovou přímkou  $\overline{vm}$ , rovinou, dělicí úsečku  $\overline{sv}$  v poměru 1 : 2. [ $v(8, 13, 7)$ ,  $s(20, 6, 7)$ ,  $m(17, ?, 2\cdot5)$ ].  
(Znojmo.)

4. Rotační kužel, o podstavě v první průmětně. dán jest vrcholem  $v$  a bodem  $a$  na plášti. Sestrojte v tomto bodě tečnu kužele o odchylce  $\alpha = 30^\circ$ . [ $v(15, 6\cdot5, 12\cdot5)$ ,  $a(17, 8\cdot5, 8\cdot5)$ ].  
(Svitavy.)

5. Stanovte geometrické místo druhých stopníků přímek procházejících bodem  $a(11, 7, 0)$  a majících odchylku  $\alpha = 45^\circ$ .  
(Brno, něm. zemská.)

6. Bod  $o$  jest středem elliptického prstenu v rovině  $\rho$  kolmé k půdorysně, jehož nárys jest mezikruží v poloměrech  $r$  a  $r_1$ . Za ním stojí rotační kužel, jehož podstava dotýká se v  $o_1$  přímky  $\rho_1$ . Zobraďte úplný výjev osvětlení při obvyklém směru světla. [ $\rho(-2\cdot5, 6\cdot5, 3)$ ,  $\sphericalangle x_{o_1} = 45^\circ$ ,  $r = 3$ ,  $r_1 = 1\cdot5$ ; poloměr podstavy kužele  $r_2 = 3\cdot5$ , jeho výška  $v = 6\cdot5$ ].  
(Linec.)

7. Rovnostranný rotační válec o podstavě v  $\mu$  dán jest bodem  $a$ , tečnými rovinami  $\rho$  a  $\sigma$  jdoucími body  $r$  a  $s$ . Zobraďte řez tohoto válce s rovinou jdoucí přímkou  $\overline{rs}$  kolmo k rovině totožnosti. [ $a(0, 2, 4)$ ;  $\rho$  jest rovnoběžna s rovinou souměrnosti,  $r(7, 6, 2\cdot5)$ ;  $\sigma$  rovnoběžna s rovinou totožnosti,  $s(2, 6, 10)$ ].  
(Lublaň.)

8. Nad danou elipsou co podstavou sestrojte rotační válec a osvětlete ho rovnoběžnými paprsky. Zároveň stanovte vzdálenost povrchové přímky, tvořící mez vlastního stínu, od osy válce.  
(Praha-II.)

9. Mezi dvě mimoběžky  $A$  a  $B$  vložte danou úsečku  $d$  tak, aby stála na  $A$  kolmo. [ $A \dots a(0, 6\cdot5, 6\cdot5)$ ,  $\sphericalangle x_1 A_1 = x_2 A_2 = 45^\circ$ ;  $B \parallel x(x_B = 7\cdot7, z_B = 5\cdot8)$ ].  
(Linec.)

10. Bodem  $a$  veďte přímkou mající od dané přímky  $A$  vzdálenost  $d$  a s rovinou  $\rho$  rovnoběžné [ $a(0, 4, 10)$ ],  $A \dots p(4\cdot5, 1\cdot5, 0)$ ,  $A_1 x = -45^\circ$ ,  $A_2 x = 45^\circ$ ,  $\rho(8, 3, 6)$ ,  $d = 3$ ].  
(Mor. Ostrava.)

11. Zobraďte koule jdoucí body  $a$ ,  $b$  a dotýkající se obou průměten [ $a(0, 1, 2)$ ,  $b(4, 4, 5)$ ].  
(Lublaň.)

12. Zobraďte obě koule dotýkající se první průmětny a jdoucí body  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i jich pronik a osvětlení. [ $a(3, 2, 7)$ ,  $b(7, 1, 10)$ ,  $c(3, 7, 12)$ ].  
(Hodonín.)

13. Zobrazte pronik a osvětlení kužele  $K(v, o, r)$  s koulí  $K'(s)$  dotýkající se kužele v předu z leva. [ $K: v(0, 4, 9), o(0, 4, 0), r = 3; K': s(0, 3\cdot5, 3)$ ]. (Solnohrad.)

14. Vedte společné tečné roviny kužele  $K(v, o, r)$  a koule  $K'(s, r_1)$  dotýkající se kužele  $K$ . [ $v(10, 0, 5), r = 3, v = 6; s(x, y, 5), r_1 = 3$ ]. (Litoměřice.)

15. Zobrazte v centrálním osvětlení stíny koule  $K(o, r)$  s bodu  $s$  tak, aby vržený stín na prvou průmětnu byla větev hyperbolická a na druhou průmětnu parabola. [ $o(0, 4\cdot1, 3\cdot1), r = 2\cdot5; s(-4\cdot3, 0\cdot7, ?)$ ]. (Rymařov.)

16. Dány jsou body  $a, b$  a rovina  $\rho$ ; najděte body, mající od obou bodů vzdálenost  $d$  a od roviny  $\rho$  vzdálenost  $\delta$ . [ $a(12, 4, 3), b(8, 7, 6), \rho(17, 45^\circ, 60^\circ), d = 5, \delta = 1\cdot5$ ]. (Bolzano.)

17. Danou přímkou v  $\pi$  se nalézající položte rovinu protínající danou kouli  $(s, r)$  v kruhu, jehož plocha rovná se  $\frac{2}{3}$  plochy největšího kruhu. [ $s(12\cdot5, 6\cdot7, 6), r = 5\cdot5; A \equiv op: o(0, 0, 0), p(7, 12, 0)$ ]. (Viedeň VII.)

18. Dány jsou dva body  $a, b$ ; najděte přímkou k průmětnám  $30^\circ$ , resp.  $45^\circ$  nakloněnou a od obou bodů vzdálenost  $d = 2$  cm mající. (Viedeň I.)

19. V rovině  $\rho$  stanovte přímkou mající od bodu  $a$  vzdálenost  $d$  a jež jsou rovnoběžny s rovinou  $\sigma$ . [ $\rho(-7, 8, 3), a(0, 3\cdot5, 4), d = 3, \sigma(5\cdot5, 4\cdot5, 5)$ ]. (Solnohrad.)

20. Sestrojte parabolu, k jejímuž určení jsou dány: tečna  $ik$ , ohnisko  $f$  a bod  $p$  na křivce. (Dvě řešení.) [ $i = 2\cdot7, ik = 3\cdot0, pk = 9\cdot5, kfp$  kolmo k tečně.] (Viedeň VII.)

## Úlohy.

### a) Z matematiky\*).

#### Úloha 15.

*Řešiti rovnici*

$$\sqrt[4]{41+x} - \sqrt[4]{41-x} = 2. \quad \text{Prof. J. Ždímal.}$$

\*) V úloze 4. (z matematiky) v předešlém čísle byla přehlédnuta tisková chyba; výraz v úloze má znít:

$$\frac{n^3 + (n+2)^3}{4}.$$