Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Anton Kotzig
O k-posunutiach

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. 1-4, 55--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121084

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1946

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O k-posunutiach.

Anton Kotzig, Bratislava.

(Došlo dňa 13. mája 1946.)

Nech sú k, n dané prirodzené čísla, $1 \leq k \leq n$. Vyšetrújme n-rozmerný priestor R_n (ponímaný ako množina všetkých systémov $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \xi$, kde x_i sú t. zv. súradnice bodu ξ). Budeme nazývať k-posunutím také posunutie v priestore R_n, pri ktorom sa zmení najmenej jedna a najviac k súradníc, ktoré sa zmenšia o celé čísla a ostatné súradnice zostanú bez zmeny. Nech je ďalej M množina všetkých bodov, ktorých všetky súradnice sú celé nezáporné čísla, potom platí veta:

Existuje jedna a len jedna množina A, ktorá má tieto tri vlastnosti:

1. $A \subset M$.
2. Ak je $\xi \in M - A$, existuje k-posunutie, ktoré prevádza bod ξ v bod množiny A.
3. Ak je $\xi \in A$ a ak je η bod, vznikajúci z ξ k-posunutím, neleží η v množine A.

Množina A je potom definovaná takto: Nech je $\xi = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ bod o celých nezáporných súradniciach. Rozviňme súradnice v dyadickéj sústave

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x_i)\, 2^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

($b_m(x_i) = 0$ alebo $= 1$, pre každé i je ovšem maximálne konečný počet čísel $b_m(x_i)$ rôzny od nuly). Potom bod ξ patrí do množiny A vtedy a len vtedy, ak je

$$b_m(x_1) + b_m(x_2) + \ldots + b_m(x_n) \equiv 0 \pmod{(k+1)} \qquad (*)$$

pre každé celé $m \geq 0$.

Def.: Ak bod α ($\alpha \in M$) určitým k-posunutím prejde v bod α', budeme hovoriť, že bod α je počiatočný, α' výsledný bod tohoto k-posunutia. Ak prevedieme postupne viac (napr. s) k-posunutí tak, že výsledný bod jednoho k-posunutia považujeme za počiatočný bod ďalšieho k-posunutia, jednotlivé polohy bodu bude nám udávať postupnosť bodov: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$. Takejto postupnosti budeme hovoriť *k*-reťaz z bodu α_0.

Dôkaz vety: Dokážeme teraz, že existuje maximálne jedna množina majúca vlastnosti 1., 2., 3.

Dôkaz: Predpokladajme, že existujú dve také množiny A, B, ktoré majú vlastnosti 1., 2., 3. Aby $A \neq B$, musí existovať aspoň jeden bod taký, že je elementom len jednej z týchto množín. Bez újmy všeobecnosti môžeme predpokladať, že existuje bod β_0, o ktorom platí: $\beta_0 \in B$, a zároveň β_0 neleží v A. Skonštruujme k-reťaz z bodu β_0 týmto spôsobom: Prvé k-posunutie preveďme tak, aby platilo $\beta_1 \in A$ (je to možné na základe vlastnosti 2., lebo β_0 neleží v A). Na základe vlastnosti 3. však potom platí: β_1 neleží v B. Môžeme tedy druhé k-posunutie voliť tak, aby $\beta_2 \in B$; na základe vlastnosti 3. bude platiť: β_2 neleží v A a tretie k-posunutie možno voliť tak, aby platilo: $\beta_3 \in A$ neleží v B, atď. Týmto spôsobom docielime toho, že o bodoch tejto k-reťazi bude platiť:

$$\left.\begin{array}{ll}\beta_{2l} \in B; & \beta_{2l} \text{ neleží v } A\\ \beta_{2l+1} \in A; & \beta_{2l+1} \text{ neleží v } B\end{array}\right\} \text{ pre všetky } l = 0, 1, 2, \ldots$$

Uvážme, že každým k-posunutím sa najmenej jedna súradnica umenší. Je zrejmé, že pre nejaké j bude najmenej jedná súradnica bodu β_j záporná. Ale to nie je možné, lebo musí byť $\beta_j \in M$; preto je zrejmé, že nemôžu existovať dve rôzne množiny majúce vlastnosti 1., 2., 3. (Že nemôže existovať viac takých množín, je z dôkazu tiež zrejmé.)

Ide ešte o dôkaz, že množina definovaná podmienkami (*) má vlastnosti 1., 2., 3.:

Každé celé nezáporné číslo x dá sa rozvinúť v dvojkovej (dyadickej) sústave, pri čom budeme stále užívať označenia

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\, 2^m \quad (b_m(x) = 0, \text{ alebo } = 1).^{1)} \tag{1}$$

Ak je daná ľubovolná skupina A, skládajúca sa z celých nezáporných čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_p,^{2)} \tag{2}$$

[1]) Pre každé také x je ovšem opäť maximálne konečný počet čísel $b_m(x)$ rôzny od nuly.

[2]) Tieto čísla $a_1, \ldots, a_p$ nemusia byť navzájom rôzne, bude záležať na tom, koľkokrát sa každé z nich v tej skupine vyskytuje. Naproti tomu nám nebude záležať na tom, v jakom poriadku sú čísla $a_1, a_2, \ldots, a_p$ napísané. Teda napr.: 2, 2, 0, 7, 7, 2 bude tá istá skupina ako 0, 2, 7, 2, 7, 2, ale iná než 2, 0, 7, alebo 2, 2, 2, 0, 7. Ačkoľvek teda „skupina" (užívam úmyselne tohoto neutrálneho slova) je niečo trochu iného než „množina", budeme užívať symboliky obvyklej z teorie množín: Keď je A skupina $a_1, \ldots, a_p$, ak je B skupina $b_1, \ldots, b_q$ a ak označíme C skupinu $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$, budeme písať $C = A + B$, $B = C - A$, $A \subset C$ (A je „časťou" C), $a_1 \in A, a_2 \in A, \ldots, a_p \in A$ (a_i je „prvkom" skupiny A) atď. Nedorozumenie je iste vylúčené.

budeme znakom $\sigma_m(A)$ označovať zbytok čísla

$$b_m(a_1) + b_m(a_2) + \ldots + b_m(a_p) = \sum_{x \in A} b_m(x)^{3)} \quad (3)$$

podľa modulu $k + 1$, takže $0 \leqq \sigma_m(A) \leqq k$.

Nech je teraz S_0 ľubovolná skupina n celých nezáporných čísel

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \quad (4)$$

Budem hovoriť, že skupina T_0 celých nezáporných čísel

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \quad (5)$$

vzniká z S_0 k-posunutím, ak je $y_p \leqq x_p$ pre $p = 1, 2, \ldots, n$ a ak nerovnosť $y_p < x_p$ platí najmenej pre jednu a najviac pre k hodnôt p.

Ak skupina (4) splňuje rovnice

$$\sigma_m(S_0) = 0 \quad \text{pre } m = 1, 2, 3, \ldots \quad (6)$$

a ak skupina (5) (označme ju T_0) vzniká k-posunutím z S_0, nemôžu byť splnené všetky rovnice

$$\sigma_m(T_0) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \quad (7)$$

Lebo nech je m_0 najväčšia hodnota m taká, že je $b_m(y_p) < b_m(x_p)$ aspoň pre jedno p $(1 \leqq p \leqq n)$. Zo vzťahov $y_q \leqq x_q$, $b_m(y_q) = b_m(x_q)$, platných pre $m > m_0$, $q = 1, 2, \ldots, n$ plynie, že je nutne $b_{m_0}(y_q) \leqq b_{m_0}(x_q)$ pre $q = 1, 2, \ldots, n$, takže $\sum_{y \in T_0} b_{m_0}(y)$ je menšie než $\sum_{x \in S_0} b_{m_0}(x)$ aspoň o 1 a najviac o k. Nakoľko $\sigma_{m_0}(S_0) = 0$, nemôže byť $\sigma_{m_0}(T_0) = 0$.

Aby sme dokázali základnú vetu, stačí teda, keď dokážeme ešte toto:

Nech je daná skupina (4) celých nezáporných čísel — označme ju S_0, ktorá nesplňuje všetky rovnice (6). Potom existuje skupina T_0, vznikajúca z S_0 k-posunutím a taká, že platia všetky rovnice (7).

Dôkaz: Budeme definovať celé číslo $\pi > 0$, skupiny

$$S_\pi \subset S_{\pi-1} \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0, \quad (8)$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi) \quad (9)$$

celé čísla

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_\pi > m_{\pi+1} = -1.^{4)} \quad (10)$$

a celé kladné čísla

$$\sigma^0_{m_1}, \sigma^1_{m_2}, \ldots, \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} \quad (11)$$

spôsobom, ktorý teraz popíšeme.

---

[3]) Smysel symbolu je jasný. Obecne, ak je A skupina $a_1, a_2, \ldots, a_p$ a ak je $f(x)$ ľubovolná funkcia, značí symbol $\sum_{x \in A} f(x)$ číslo $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_p)$.

[4]) Číslo $m_{\pi+1}$ zavádzam len pre pohodlie.

Z (8), (9) plynie, že

$$S_0 = P_1 + P_2 + \ldots + P_i + S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi), \tag{12}$$

obecnejšie

$$S_j = P_{j+1} + \ldots + P_i + S_i \quad (0 \leqq j < i \leqq \pi), \tag{13}$$

špeciálne

$$S_0 = P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi + S_\pi. \tag{14}$$

Pre všetky dostatočne velké m je $b_m(x_p) = 0$, teda $\sigma_m(S_0) = 0$; podľa predpokladu existuje však m_1 také, že

$$\sigma_{m_1}(S_0) > 0. \tag{15}$$

Zvolme za m_1 najväčšie číslo, pre ktoré platí (15). Položme $\sigma_{m_1}(S_0) = \sigma^0_{m_1}$ a z čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vyberme $\sigma^0_{m_1}$ čísel

$$x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,\sigma^0_{m_1}}, \tag{16}$$

pre ktoré je $b_{m_1}(x) = 1$; čísla (16) nech tvoria skupinu P_1, kladieme potom $S_1 = S_0 - P_1$, takže $P_1 = S_0 - S_1$, $0 < \sigma^0_{m_1} \leqq k$. Predpokladajme, že sme už definovali pre isté $p \geqq 1$ skupiny

$$S_p \subset S_{p-1} \subset \ldots \subset S_0, \tag{17}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

celé čísla

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_p \geqq 0 \tag{19}$$

a celé kladné čísla

$$\sigma^0_{m_1}, \ldots, \sigma^{p-1}_{m_p} \tag{20}$$

tak, že

$$\sigma^0_{m_1} + \ldots + \sigma^{p-1}_{m_p} \leqq k \tag{21}$$

a že každá skupina P_i sa skladá z $\sigma^{i-1}_{m_i}$ čísel; pre $p = 1$ sme to práve učinili.

Skupina $S_p = S_0 - (P_1 + \ldots + P_p)$ sa skladá z $n - \sigma^0_{m_1} - \ldots - \sigma^{p-1}_{m_p} \geqq n - k \geqq 0$ čísel. Ak neexistuje žiadne číslo m, pre ktoré by platilo

$$m_p > m \geqq 0, \; 0 < \sigma_m(S_p) \leqq k - \sum_{i=1}^{p} \sigma^{i-1}_{m_i}, \tag{22}$$

položme $\pi = p$, $m_{p+1} = -1$ a sme s indukciou hotoví. Ak však existuje také číslo m, pre ktoré platí (22) — nech je m_{p+1} najväčšie také číslo m — položme $\sigma_{m_{p+1}}(S_p) = \sigma^p_{m_{p+1}}$, takže podľa (22) je

$$\sigma^p_{m_{p+1}} > 0, \quad \sum_{i=1}^{p+1} \sigma^{i-1}_{m_i} \leqq k.$$

Vyberme ďalej zo skupiny S_p skupinu $\sigma^p_{m_{p+1}}$ čísel

$$x_{p+1,1},\ x_{p+1,2},\ \ldots,\ x_{p+1,\sigma^p_{m_{p+1}}}, \tag{23}$$

pre ktoré je $b_{m_{p+1}}(x) = 1$, túto skupinu označme P_{p+1} a položme $S_{p+1} = S_p - P_{p+1}$. Vidíme, že vzťahy (17) až (21) budú teraz platiť s indexom $p + 1$ namiesto p. Nakoľko každá skupina obsahuje aspoň jedno číslo, je vidieť, že sa postup musí najneskoršie po n krokoch zastaviť, takže dospejeme takto k systému s vlastnostiami (8) až (13).

Z toho, ako bol indukčný krok (prvý a $(p + 1)$-ý) prevedený, je zrejmé ešte toto: Predovšetkým je

$$\sigma^0_{m_1} + \sigma^1_{m_2} + \ldots + \sigma^{\pi-1}_{m_\pi} \leqq k, \tag{24}$$

teda istotne

$$1 \leqq \pi \leqq k.$$

Za druhé: P_i sa skladá z $\sigma^{i-1}_{m_i}$ čísel, pri čom pre $x \in P_i$ je $b_{m_i}(x) = 1$, teda $\sigma_{m_i}(P_i) = \sigma^{i-1}_{m_i}$.

Za tretie:

$$\sigma^{i-1}_{m_i} = \sigma_{m_i}(S_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi), \tag{25}$$

takže podľa vlastnosti druhej je

$$\sigma_{m_i}(S_i) = \sigma_{m_i}(S_{i-1} - P_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi). \tag{26}$$

Za štvrté:

$$\sigma_m(S_0) = 0 \tag{27}$$

pre $m > m_1$.

Za piate: Pre

$$m_i > m > m_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \pi)$$

neplatí (22), t. j. je

$$\text{buďto } \sigma_m(S_i) = 0, \text{ alebo } \sigma_m(S_i) > k - \sum_{j=1}^{i} \sigma^{j-1}_{m_j} \tag{28}$$

$$(m_i > m > m_{i+1};\ i = 1, 2, \ldots, \pi).$$

Teraz nahradím skupinu S_0 novou skupinou S'_0 (složenou tiež z n celých nezáporných čísel) takto: Skupinu S_π nechám bez zmeny, kdežto čísla každej skupiny P_i $(i = 1, 2, \ldots, \pi)$ zmením takto:

Ak je $x \in P_i$, nahradím číslo x číslom

$$x' = \sum_{\substack{0 \leqq m \leqq m_i \\ m \neq m_\pi, m_{\pi-1}, \ldots, m_{i+1}, m_i}} 2^m + \sum_{m > m_i} b_m(x)\, 2^m. \tag{29}$$

T. j. koeficienty pri 2^m $(m > m_i)$ nechám bez zmeny, koeficienty pri $2^{m_i}, 2^{m_{i+1}}, \ldots, 2^{m_\pi}$ nahradím nulami (vieme, že v x bol koeficient pri 2^{m_i} rovný 1), ostatné koeficienty nahradím jedničkami. Nakoľko prvý súčet v (29) je menší než 2^{m_i}, je $x' < x$. Skupinu čísel x', ktorú takto dostaneme zo skupiny P_i, označme P'_i, položme ešte

$$S'_\pi = S_\pi, \; S'_i = P'_{i+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi \quad (i = 0, 1, \ldots, \pi - 1). \tag{30}$$

Čísla z S'_0 vznikly teda z čísel skupiny S_0 tak, že sme čísla skupiny $P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi$ zmenšili, ostatné nechali bez zmeny.

Je zrejmé toto:

1. Ak je $m > m_1$, je:

$$\sigma_m(S'_0) = \sigma_m(S_0) = 0. \tag{31}$$

2. Ak je $m = m_p$ ($p = 1, 2, \ldots, \pi$), je podľa (29) $b_{m_p}(x') = 0$ pre $x' \epsilon P'_i$, akonáhle $i \leqq p$

t. j.

$$\sigma_{m_p}(P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_p) = 0,$$

t. j.

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = \sigma_{m_p}(S'_p).$$

Ale pre $x' \epsilon S'_p$, t. j. $x' \epsilon P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$[5]) je podľa (29) a v dôsledku rovnice $S_\pi = S'_\pi$ zrejme $b_{m_p}(x') = b_{m_p}(x)$,[6]) takže $\sigma_{m_p}(S'_p) = \sigma_{m_p}(S_p) = 0$ [viď (26)].

Teda:

Pre $m = m_p$ ($p = 1, 2, \ldots, \pi$) je

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = 0. \tag{32}$$

3. Ak je $m_p > m > m_{p+1}$ ($p = 1, 2, \ldots, \pi$), platí toto: keď je $x' \epsilon P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$, t. j. $x' \epsilon S'_p$, je podľa (29) a v dôsledku rovnice $S_\pi = S'_\pi$ zrejme $b_m(x') = b_m(x)$, tedy

$$\sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p). \tag{33}$$

Nahradíme konečne čísla skupiny $S'_0 = P'_1 + P'_2 + \ldots + P'_\pi + S'_\pi$ novými číslami, ktoré budú tvoriť novú skupinu S''_0 o n číslach a budú sostrojené takto:

1. Čísla z S'_π necháme bez zmeny.

2. Koeficienty $b_m(x')$ pre $m > m_1$ a práve tak koeficienty $b_{m_1}(x')$, $b_{m_2}(x')$, ..., $b_{m_\pi}(x')$ nechám bez zmeny pre každé $x' \epsilon S'_0$.

Podľa (31), (32) bude potom

$$\sigma_m(S''_0) = 0 \text{ pre } m > m_1 \text{ a práve tak pre } m = m_1, \; m = m_2, \ldots, m = m_\pi. \tag{34}$$

3. Nech je konečne m číslo, splňujúce nerovnosť $m_p > m > m_{p+1}$ ($1 \leqq p \leqq \pi$). Potom zmením koeficienty $b_m(x')$ takto:

[5]) Pre $p = \pi$ odpadne ovšem $P'_{p+1} + \ldots + P'_\pi$, podobne v analogických prípadoch.

[6]) Znakom x značím to číslo z S_p, z ktorého vzniklo číslo x' zmenou, udanou v (29).

I. Buď je $\sigma_m(S_p) = 0$. Potom všetky koeficienty $b_m(x')$ pre všetky $x' \in P'_1 + \dots + P'_p$ nahradím nulami [u x' boly tieto koeficienty rovné 1, viď (29)], kdežto u všetkých $x' \in P'_{p+1} + \dots + P'_\pi + S'_\pi = S''_p$ nechám $b_m(x')$ bez zmeny.

Potom bude teda:

$$\sigma_m(S''_0) = \sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) = 0 \tag{35}$$

[viď (33)].

II. Alebo neni $\sigma_m(S_p) = 0$. Potom je podľa (28)

$$\sigma_m(S_p) > k - \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1};$$

nakoľko $\sigma_m(S_p) \leqq k$ a nakoľko platí (24), je istotne

$$k + 1 \leqq \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + \sigma_m(S_p) \leqq 2k. \tag{36}$$

Je

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sum_{x' \in P'_1 + \dots + P'_p} b_m(x') + \sum_{x' \in P'_{p+1} + \dots + P'_\pi + S'_\pi} b_m(x') \pmod{(k+1)}. \tag{37}$$

Ale podľa (29) a v dôsledku rovnice $S'_\pi = S_\pi$ je

$$\sum_{x' \in P'_{p+1} + \dots + P'_\pi + S'_\pi} b_m(x') = \sum_{x \in P_{p+1} + \dots + P_\pi + S_\pi} b_m(x) \equiv \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)},$$

kdežto prvý súčet v (37) sa skladá zo samých jedničiek. Teda

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sigma_{m_1}^{0} + \dots + \sigma_{m_p}^{p-1} + \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)}. \tag{38}$$

Nakoľko $0 \leqq \sigma_m(S'_0) \leqq k$, plynie z (36), (38) zrejme

$$\sigma_m(S'_0) + k + 1 = \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + \sigma_m(S_p) < \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} + k + 1,$$

t. j.

$$\sigma_m(S_0') < \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}. \tag{39}$$

Nakoľko ďalej všetky čísla

$$x' \in P'_1 + P'_2 + \dots + P'_p$$

(ktorých počet je práve rovný $\sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}$) majú koeficient $b_m(x') = 1$, môžem tieto koeficienty podľa (39) zmeniť tak, že u $\sigma_m(S'_0)$ týchto čísel $x' \in P'_1 + P'_2 + \dots + P'_p$ koeficient $b_m(x') = 1$ nahradím nulou, u ostatných čísel $x' \in P'_1 + \dots + P'_p$ jako aj u všetkých čísel $x' \in S'_p$ nechám $b_m(x')$ bez zmeny. Potom bude zrejme

$$\sigma_m(S''_0) = 0. \tag{40}$$

Systém S''_0 práve konštruovaný vyhovuje teda rovnici (40) pre všetky celé $m \geqq 0$ [viď tiež (34), (35)]. Okrem toho vznikol S''_0 z S_0 k-posunutím: lebo čísla skupiny $P_1 + P_2 + \ldots + P_\pi$ (čo je najmenej jedno číslo a najviac k čísel) sme zmenšili, ostatné sme ponechali bez zmeny. Tým je dôkaz prevedený.

*

Sur les „translations k“.

(Résumé de l'article précédent.)

Soient k, n deux nombres entiers donnés, $1 \leqq k \leqq n$. Soit R_n l'espace cartésien à n dimensions. Considérons une translation quelconque (caractérisée par n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$) qui transforme chaque point $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in R_n$ en $[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]$. Cette translation soit appellée une „translation k“, si les conditions suivantes sont remplies:

1. Chaque nombre a_i est entier et non négatif ($\geqq 0$).

2. Si l'on désigne par l le nombre de ceux parmi les nombres $a_1, \ldots, a_n$ qui sont différents de zéro, on a $1 \leqq l \leqq k$.

Pour le développement d'un nombre entier $x \geqq 0$ quelconque dans le système dyadique nous allons constamment employer la notation suivante:

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)\, 2^m \quad (b_m(x) \text{ égal à } 0 \text{ ou à } 1). \tag{1}$$

Par M nous allons désigner l'ensemble de tous les points $[x_1, \ldots, x_n]$ dont toutes les coordonnées x_i sont entières et non négatives.

Théorème. Il existe un ensemble A et pas plus qu'un seul, jouissant des propriétés suivantes:

I. $A \subset M$.

II. Si $\xi \in A$ et si η provient de ξ par une translation k, on a η non $\in A$.

III. Au contraire, si $\xi \in M - A$, il existe une translation k qui transforme ξ en un point de A.

L'ensemble A est défini de la manière suivante: Un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \in M \tag{2}$$

appartient à A, si l'on a

$$b_m(x_1) + \ldots + b_m(x_n) \equiv 0 \pmod{k+1} \text{ pour } m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

et dans ce cas seulement.

Démonstration de l'unicité. Supposons que deux ensembles différents A_1, A_2 jouissent des propriétés I, II, III. Il existe alors p. ex. un point $\xi_1 \epsilon A_1 - A_2$. Il existe alors un point $\xi_2 \epsilon A_2$, provenant de ξ_1 par une translation k (voir III), donc $\xi_2 \epsilon A_2 - A_1$ (voir II). Ensuite, il existe un point $\xi_3 \epsilon A_1$, provenant de ξ_2 par une translation k (voir III), donc $\xi_3 \epsilon A_1 - A_2$ (voir II) etc. Il existe donc une suite infinie $\xi_1, \xi_2, \ldots$, où $\xi_{2r} \epsilon A_2 - A_1$, $\xi_{2r+1} \epsilon A_1 - A_2$ et où ξ_m provient de ξ_{m-1} par une translation k. Donc, à partir d'un certain rang, une coordonnée au moins de ξ_m est négative — contradiction (voir I).

Reste de la démonstration. Soit maintenant A l'ensemble de tous les points (2) qui satisfont (3). Il nous reste à démontrer que A possède les propriétés II, III (car I est évidente).

Propriété II. Soit $\xi = [x_1, \ldots, x_n] \epsilon A$ et soit $\eta = [y_1, \ldots, y_n] \epsilon$ ϵM un point provenant de ξ par une translation k. Soit μ le plus grand nombre tel que la suite $b_\mu(y_1), \ldots, b_\mu(y_n)$ ne soit pas identique à $b_\mu(x_1), \ldots, b_\mu(x_n)$. Evidemment, on a ou bien $b_\mu(x_i) = b_\mu(y_i)$ ou bien $b_\mu(x_i) = 1$, $b_\mu(y_i) = 0$; désignons par l le nombre des indices i, pour lesquels la seconde éventualité a lieu; on a évidemment $1 \leqq l \leqq k$, et donc (voir (3)) $b_\mu(y_1) + \ldots + b_\mu(y_n) \equiv -l \not\equiv 0 \pmod{k+1}$, donc $\eta \epsilon M - A$.

Propriété III. Soit donné un point

$$\xi = [x_1, \ldots, x_n] \epsilon M - A. \tag{4}$$

Il faut démontrer l'existence d'un point appartenant à A et provenant de ξ par une translation k. Pour cela, nous allons en premier lieu décomposer d'une manière convenable le système

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{5}$$

que nous désignons par S_0.[1])

Si S est un système des nombres entiers non négatifs $a_1, a_2, \ldots, a_r$ et f une fonction, nous allons poser $\sum\limits_{x \epsilon S} f(x) = f(a_1) + \ldots + f(a_r)$.

En particulier, nous allons désigner par $\sigma_m(S)$ le reste du nombre $\sum\limits_{x \epsilon S} b_m(x)$ suivant le module $k+1$, donc

$$0 \leqq \sigma_m(S) \leqq k. \tag{6}$$

---

[1]) Les nombres $x_1, \ldots, x_n$ peuvent être en partie égaux. Nous regardons deux systèmes comme identiques si l'un d'eux provient de l'autre par une permutation de ses „éléments", de sorte que p. ex. 0, 2, 7, 3, 0, 2, 2, est le même système que 0, 0, 2, 2, 2, 3, 7, mais il est différent de 0, 2, 3, 7 de même que de 0, 2, 0, 7, 3. Quoique la notion d'un „système" est différente de celle d'un „ensemble", nous empruntons quelques notations à la théorie des ensembles (sans qu'aucune confusion soit à craindre), à savoir: Si nous désignons par A le système $a_1, \ldots, a_r$, par B le système $b_1, \ldots, b_s$ et par C le système $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$, nous allons écrire: $a_i \epsilon A$, $A \subset C$, $A + B = C$, $B = C - A$. (P. ex. $A + B = C$ équivaut à $B = C - A$, ce qui n'est pas vrai dans la théorie des ensembles.)

Nous allons définir par induction un nombre entier $\pi > 0$, les systèmes

$$S_\pi \subset S_{\pi-1} \subset \ldots \subset S_1 \subset S_0, \tag{7}$$

$$P_i = S_{i-1} - S_i \quad (1 \leqq i \leqq \pi) \tag{8}$$

et les nombres entiers

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_\pi > m_{\pi+1} = -1, \tag{9}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{m_1} > 0,\ \overset{1}{\sigma}_{m_2} > 0,\ \ldots,\ \overset{\pi-1}{\sigma}_{m_\pi} > 0, \tag{10}$$

satisfaisant l'inégalité

$$\overset{0}{\sigma}_{m_1} + \ldots + \overset{\pi-1}{\sigma}_{m_\pi} \leqq k \tag{11}$$

comme il suit.

Remarquons d'abord que (7), (8) entraîne

$$S_j = P_{j+1} + \ldots + P_i + S_i \quad (0 \leqq j < i \leqq \pi). \tag{12}$$

Soit m_1 le plus grand nombre tel que $\sigma_{m_1}(S_0) > 0$ (m_1 existe d'après (4)). Posons $\overset{0}{\sigma}_{m_1} = \sigma_{m_1}(S_0)$; parmi les nombres $x_1, \ldots, x_n$ choisissons un système partiel P_1 qui consiste de $\overset{0}{\sigma}_{m_1}$ nombres x satisfaisant la condition $b_{m_1}(x) = 1$. Posons $S_1 = S_0 - P_1$, donc $P_1 = S_0 - S_1$, $0 < \overset{0}{\sigma}_{m_1} \leqq k$.

Supposons que l'on ait déjà défini $S_0, \ldots, S_p, P_1, \ldots, P_p, m_1, \ldots m_p, \overset{0}{\sigma}_{m_1}, \ldots, \overset{p-1}{\sigma}_{m_p}$ pour un certain $p \geqq 1$ et que $\overset{0}{\sigma}_{m_1} + \ldots + \overset{p-1}{\sigma}_{m_p} \leqq k$.

S'il n'existe aucun nombre m tel que l'on ait

$$m_p > m \geqq 0, \quad 0 < \sigma_m(S_p) \leqq k - \sum_{j=1}^{p} \overset{j-1}{\sigma}_{m_j}, \tag{13}$$

posons $\pi = p$, $m_{p+1} = -1$ et l'induction est finie. S'il existe un tel m (dans ce cas S_p ne peut pas être vide), soit m_{p+1} le plus grand nombre m qui satisfait (13) et soit $\overset{p}{\sigma}_{m_{p+1}} = \sigma_{m_{p+1}}(S_p)$. Nous choisissons de S_p un système partiel P_{p+1} qui consiste de $\overset{p}{\sigma}_{m_{p+1}}$ nombres x tels que $b_{m_{p+1}}(x) = 1$ et nous posons $S_{p+1} = S_p - P_{p+1}$.

En procédant ainsi, on obtient enfin $\pi, S_i, P_i, m_i, \overset{i-1}{\sigma}_{m_i}$ qui satisfont (7)—(11).

Remarquons enfin les conséquences suivantes qui découlent de la façon dont nous avons défini les $S_i, P_i, \ldots$:

($\mathfrak{A}$) P_i consiste précisément de $\overset{i-1}{\sigma}_{m_i}$ éléments; pour $x \in P_i$ on a $b_{m_i}(x) = 1$.

($\mathfrak{B}$) On a $\overset{i-1}{\sigma}_{m_i} = \sigma_{m_i}(S_{i-1})$, donc

$$\sigma_{m_i}(S_i) = \sigma_{m_i}(S_{i-1} - P_i) = 0 \quad (1 \leqq i \leqq \pi). \tag{14}$$

($\mathfrak{C}$) On a

$$\sigma_m(S_0) = 0 \ \text{ pour } m > m_1. \tag{15}$$

(5) Pour $m_i > m > m_{i+1}$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, on n'a pas (13), donc on a

$$\text{ou bien } \sigma_m(S_i) = 0 \text{ ou bien } \sigma_m(S_i) > k - \sum_{j=1}^{j} \sigma_{m_j}^{j-1}. \tag{16}$$

Ayant ainsi décomposé S_0, nous allons remplacer S_0 par un autre système

$$S'_0: \qquad x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \tag{17}$$

comme il suit: Posons $S'_\pi = S_\pi$. Mais si $x_r \in P_i$ $(1 \leqq i \leqq \pi)$, remplaçons x_r par le nombre

$$x'_r = \sum_{\substack{0 \leqq m \leqq m_i \\ m \neq m_\pi, m_{\pi-1}, \ldots, m_i}} 2^m + \sum_{m > m_i} b_m(x_r)\, 2^m \tag{18}$$

(donc $x'_r < x_r$, car $b_{m_i}(x_r) = 1$); nous obtenons ainsi de P_i un nouveau système P'_i et nous posons

$$S'_i = P'_{i+1} + \ldots + P'_\pi + S'_\pi \quad (0 \leqq i < \pi). \tag{19}$$

On voit immédiatement:

$$\sigma_m(S'_0) = \sigma_m(S_0) = 0 \text{ pour } m > m_1 \tag{20}$$

(voir (15), (18)).

Pour $m = m_p$ et pour $x_r \in P_i$, $i \leqq p$, on a $b_{m_p}(x'_r) = 0$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(P'_1 + \ldots + P'_p) = 0$, $\sigma_{m_p}(S'_0) = \sigma_{m_p}(S'_p)$; mais pour $x_r \in S_p = P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$ (voir (18)), donc $\sigma_{m_p}(S'_p) = \sigma_{m_p}(S_p) = 0$ (voir (14)), donc

$$\sigma_{m_p}(S'_0) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq p \leqq \pi. \tag{21}$$

Si $m_p > m > m_{p+1}$ et si $x_r \in P_{p+1} + \ldots + P_\pi + S_\pi$, on a d'après (18) $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, donc

$$\sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) \text{ pour } m_p > m > m_{p+1}. \tag{22}$$

Remplaçons enfin S'_0 par un nouveau système

$$S''_0: \quad x''_1, x''_2, \ldots, x''_n.$$

Pour définir S''_0, il suffit de définir $b_m(x''_r)$ pour chaque r $(1 \leqq r \leqq n)$ et chaque $m \geqq 0$, ce que nous allons faire maintenant.

Pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$ posons $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$ (pour $r = 1, 2, \ldots, n$), d'où (voir (20), (21))

$$\sigma_m(S''_0) = 0 \tag{23}$$

pour $m > m_1$ et pour $m = m_1, m_2, \ldots, m_\pi$.

Soit maintenant $m_p > m > m_{p+1}$. Deux cas sont à distinguer.

I. $\sigma_m(S_p) = 0$. Posons (voir (18)) $b_m(x''_r) = b_m(x'_r) - 1 = 0$ pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$, $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$ pour $x'_r \in S'_p$, donc (voir (22))

$$\sigma_m(S''_0) = \sigma_m(S'_p) = \sigma_m(S_p) = 0. \tag{24}$$

II. $\sigma_m(S_p) > 0$, donc $\sigma_m(S_p) > k - \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1}$ (voir (16)).

Donc (voir (11))

$$k + 1 \leqq \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1} \leqq 2k. \tag{25}$$

On a

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sum_{x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p} b_m(x'_r) + \sum_{x'_r \in S'_p} b_m(x'_r) \pmod{(k+1)}. \tag{26}$$

Mais (voir (18)) pour $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ on a $b_m(x'_r) = 1$, tandis que pour $x'_r \in S'_p$ on a $b_m(x'_r) = b_m(x_r)$, de sorte que (26) donne

$$\sigma_m(S'_0) \equiv \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_p}^{p-1} + \sigma_m(S_p) \pmod{(k+1)}.$$

La comparaison avec (25) donne

$$\sigma_m(S'_0) + k + 1 = \sigma_m(S_p) + \sum_{j=1}^{p} \sigma_{m_j}^{j-1},$$

mais $\sigma_m(S_p) < k + 1$, donc

$$\sigma_m(S'_0) < \sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_p}^{p-1};$$

on peut donc poser $b_m(x''_r) = 0$ pour $\sigma_m(S'_0)$ valeurs de l'indice r tels que $x'_r \in P'_1 + \ldots + P'_p$ (pour ces x'_r, on avait $b_m(x'_r) = 1$); pour toutes les autres valeurs de r, on pose $b_m(x''_r) = b_m(x'_r)$. On a alors

$$\sigma_m(S''_0) \equiv \sigma_m(S'_0) - \sigma_m(S'_0) \equiv 0 \pmod{(k+1)},$$

$\sigma_m(S''_0) = 0$. Donc (voir aussi (23), (24)) $\sigma_m(S''_0) = 0$ pour chaque $m \geqq 0$. Donc le point $\xi'' = [x''_1, \ldots, x''_n]$ appartient à A et il provient de ξ par une translation k, car

$$x''_r \leqq x'_r < x_r \text{ pour } x_r \in P_1 + \ldots + P_\pi,$$

$$x''_r = x_r \text{ pour } x_r \in S_\pi,$$

et $P_1 + \ldots + P_\pi$ consiste de $\sigma_{m_1}^{0} + \ldots + \sigma_{m_\pi}^{\pi-1} \leqq k$ éléments (voir (11)).