Rozbor rovnice druhého stupně o třech proměnných.

Napsal

Eduard Weyr.

(Pokračování.)

I. Jest známo, že lineárné rovnice (21) mají jediné řešení tenkráte a jen tenkráte, jeli determinant koefficientů neznámých různý od nully, t. j. je-li

$$A_{44} \gtrless 0. \tag{22}$$

Plochy druhého stupně mající jediný střed se zovou centrálnými; nerovnost (22) tudíž charakterisuje plochy centrálné. Přechodem k centru jakožto k počátku nových os souřadných rovnoběžných s původními vyskytuje se jeden nový koefficient, totiž $f(x_0, y_0, z_0)$; jeho hodnotu lze přímo, bez počítání souřadnic x_0, y_0, z_0 takto ustanoviti. Máme obecně

$$f(x, y, z) = \tfrac{1}{2} x \frac{\partial f}{\partial x} + \tfrac{1}{2} y \frac{\partial f}{\partial y} + \tfrac{1}{2} z \frac{\partial f}{\partial z}$$
$$+ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44},$$

pročež

$$f(x_0, y_0, z_0) = a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44}.$$

Ale řešením rovnic (21) plynou

$$x_0 = \frac{A_{41}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{42}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{43}}{A_{44}},$$

čímž

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}}{A_{44}} = \frac{D}{A_{44}}.$$

Má-li střed centrálné plochy býti na ploše, t. j. mají-li

$$x' = y' = z' = 0$$

hověti transformované rovnici, musí $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ t. j. $D = 0$, t. j. plocha jest kuželovou.

II. Dále je známo, že v případě, kdy

$$(23) \qquad A_{44} = 0,$$

rovnicím (21) buď vůbec vyhověti nelze aneb existuje nekonečně mnoho řešení; tyto plochy, nemající tedy buď žádného středu aneb mající nekonečně mnoho středů nazveme necentrálnými.

A. Případ první nastane (v. cit. pojednání §. V.) pakli nevymizí všecky determinanty 3. stupně vznikající ze schematu koefficientů rovnic (21) vypuštěním některého sloupce, t. j. pakli některý z determinantů A_{41}, A_{42} a A_{43} jest různý od nully.

B. Případ druhý pak nastane, jsou-li všecky tyto tři determinanty rovny nulle; pak ale patrně

$$D = \Sigma a_{4k} A_{4k} = 0, \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

tedy jest v tomto případě plocha kuželová neb válcová. Snadno shledáme, že se tu plocha nutně zvrhne na system dvou rovin, různých neb splývajících aneb že jest válcem. Jsou totiž dle učiněné supposice

$$A_{4k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

řádky ve schematu (21) složeny ze dvou neb jednoho řádku, tedy řádky v D složeny α) ze tří, neb β) ze dvou, neb γ) z jednoho řádku. V případě α) t. j. v případě, kdy některý subdeterminant $A_{gh} \gtrless 0$ jest vrchol kužele x' stanoven proporcí

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = A_{g1} : A_{g2} : A_{g3} : A_{g4};$$

avšak $A_{g4} = A_{4g} = 0$, tedy $x'_4 = 0$, tedy vrchol v nekonečnu a plocha válcem. V případě β) t. j. kdy vymizí všecky A_{ik} ale ne všecky minory druhého stupně z D, skládá se plocha ze dvou rovin (dle úvah sub B. §. 3.) a v případě γ), kdy totiž i tyto minory všecky vymizí, skládá se plocha ze dvou splývajících rovin (dle úvah sub C. téhož §). Přihlédněme ku středu plochy v případech α), β) a γ).

α) Zde jsou řádky ve schematu (21) složeny ze dvou, na př. z prvního a druhého, tak že každý bod hovící první a druhé rovnici (21) jest středem. Tyto dvě linearné rovnice stanoví přímku, která obsahuje všecky středy našeho válce (osa válce).

β) Nevymizíli všecky minory druhého stupně vzaté ze schematu (21), pak stanoví ony dvě rovnice (21), z nichž je nemizící minor vzat, všecky středy; ony naplňují opět přímkou — průsečnou přímku rovin, z nichž se plocha skládá. Jsouli ale všecky minory 2. stupně ze schematu (21) rovny nulle, pak jsou dvě z rovnic (21), na př. první dvě, násobky třetí, a bod hovící této jest středem; naplňují tedy pak středy celou rovinu

24) $$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0.$$

Myslímeli si v (21) řádky napsány jako sloupce, tedy vidíme, že v uvažovaném případě vymizí všecky minory druhého stupně z D vzaté z g-ho ($g = 1, 2, 3$) a 4-ho řádku a z prvních tří sloupců; zároveň patrno, že

$$\begin{vmatrix} a_{33}, & a_{34} \\ a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} \gtrless 0,$$

neb jinak by všecky řádky v D byly z třetího složeny, pročež soudíme dle závěrečné úvahy odst. B. v §. 3., že plocha se skládá ze dvou rovnoběžných rovin; dle onoho odstavce máme

$$\varphi = \frac{a_{44}\varphi_3^2 - 2a_{34}\varphi_3\varphi_4 + a_{33}\varphi_4^2}{a_{33}a_{44} - a_{34}^2}.$$

Dle poznámky o minorech z 3-ho a 4-ho řádku diskriminantu vzatých víme, že a_{41}, a_{42}, a_{43} jsou úměrny ku a_{31}, a_{32}, a_{33}, na př.

$$a_{4k} = \mu a_{3k}, \quad (k = 1, 2, 3), \quad \text{avšak} \quad a_{44} \gtrless \mu a_{34}.$$

Máme tedy

$$\varphi_4 = \mu\varphi_3 + (a_{44} - \mu a_{34})x_4 \quad \text{čili} = \mu\varphi_3 + \nu;$$

to vloženo do hořejší hodnoty pro φ, podává

$$(a_{33}a_{44} - a_{34}^2)\,\varphi = (a_{44} - 2a_{34}\mu + a_{33}\mu^2)\,\varphi_3^2 - 2(a_{34}\nu - a_{33}\mu\nu)\varphi_3 + a_{33}\nu^2;$$

ale $$a_{33}\mu = a_{34},$$

pročež

$$(a_{33}a_{44} - a_{34}^2)\,\varphi = (a_{44} - \mu a_{34})\,\varphi_3^2 + a_{33}\nu^2.$$

Píšemeli místo x_1, x_2, x_3, x_4 resp. $x, y, z, 1$, tu se vracíme k obyčejným souřadnicím, a máme tedy rovnici plochy ve tvaru (krátivše faktorem $a_{44} - \mu a_{34} \gtrless 0$),

$$(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})^2 + a_{33}(a_{44} - \mu a_{34}) = 0,$$

z níž již patrno, že se plocha skládá ze dvou rovin rovnoběžných s rovinou (24) a od této stejně vzdálených.

γ) Všecky řádky v D jsou složeny z jednoho. Jeli tento obsažen v (21), na př. první, t. j. nejsou-li všecky koefficienty v první rovnici (21) nullami, tu jest každý bod roviny

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0$$

středem plochy; plocha sama dle odst. C. §. 3. se redukuje na tutéž rovinu. — Kdyby ale všecky koefficienty v (21) se rovnaly nulle, tu by vůbec jen $a_{44} \gtrless 0$, a tedy by plocha

$$\varphi \equiv a_{44}x_4^2 = 0$$

se redukovala na nekonečně vzdálenou rovinu; pak by každý bod hověl rovnicím (21), t. j. každý bod byl by středem plochy.

Poznámka. Všecky dosavadní úvahy potrvají v platnosti i v tom případě, že x, y, z značí rovnoběžné kosoúhlé souřadnice.

§. 5. *Transformace ploch centrálných k hlavním osám.*

Ukázali jsme v předešlém §., že zvolíme-li střed za počátek souřadnic rovnice plochy nabývá tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + a_{44} = 0,$$

aneb stručněji

$$u\,(x, y, z) + a_{44} = 0,$$

označivše literou u součet kvadratických členů. Položme si otázku, zdali lze počátkem souřadnic vésti tři nové taktéž pravoúhlé osy x', y', z' tak, aby transformovaná rovnice obsahovala mimo absolutní člen pouze čtverce nových souřadnic.

Abychom odpověděli k této otázce, označme literami α, β, γ cosinusy úhlů, které uzavírá nová osa x' s osami původními;

obdobný význam mějte α', β', γ' pro osu y' a konečně α'', β'', γ'' pro osu z'. Nové osy mají býti též pravoúhlé, platí tedy relace

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,\\
(25)\qquad &\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,\\
&\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,\\
(26)\qquad &\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,\\
&\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0.
\end{aligned}
$$

Transformační formule jsou, jak známo,

$$
\begin{aligned}
&x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',\\
(27)\qquad &y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',\\
&z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'.
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice plochy, patrně u přejde na homogenní kvadratickou funkci u' nových souřadnic a absolutní člen a_{44} zůstane nezměněn.

Máme tedy rovnici plochy

$$u + a_{44} = u' + a_{44} = 0,$$

kdež značí

$$u' = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{31}z'x' + 2a'_{12}x'y'$$

a $a'_{11} = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta,$

$$a'_{12} = a_{11}\alpha\alpha' + a_{22}\beta\beta' + a_{33}\gamma\gamma' + a_{23}(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + a_{31}(\gamma\alpha' + \alpha'\gamma) + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta),\qquad \text{atd.}$$

Jde tedy o to, ustanoviti směry α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' tak, aby hověli rovnicím (25) a (26), a konečně aby činily

$$(28)\qquad a'_{23} = 0,\quad a'_{31} = 0,\quad a'_{12} = 0.$$

Jde tedy o řešení devíti kvadratických rovnic o devíti neznámých.

Řešení tohoto úkolu si usnadníme následující úvahou. Dejme tomu, že existuje hledané řešení, t. j. že existují realné hodnoty α, β, γ, α', ..., γ'' hovící rovnicím (25), (26), (28); jimi pak jsou stanoveny nové osy x', y', z'. Jest známo, že čtverec vzdálenosti libovolného bodu x, y, z od počátku jest dán výrazem $x^2+y^2+z^2$; jsouli x', y', z' nové souřadnice téhož bodu bude $x'^2+y'^2+z'^2$ podávati týž čtverec, pročež

$$x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

relace, která i přímo plyne, dosadímeli za x, y, z hodnoty transformačními formulemi (27) dané a přihlédneme-li k relacím (25) a (26). Za platnosti rovnic (27) máme tedy

$$u-\lambda(x^2+y^2+z^2)=u'-\lambda(x'^2+y'^2+z'^2),$$

nechť je λ jakákoli hodnota. Volímeli nyní λ tak, aby levá strana se rozložila na součin dvou linearných faktorů, platí totéž o pravé straně a též naopak, neboť nějaký linearný faktor $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z$ přejde rovnicemi (27) patrně na faktor též linearný $\mathrm{A}'x'+\mathrm{B}'y'+\mathrm{C}'z'$. Avšak levá strana jest součinem dvou linearných faktorů tehdy a jen tehdy, kdy *)

$$\text{(29)} \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

pak ale se též pravá strana rozloží na dva linearné faktory, t. j. pak platí

---

*) Aby kvadratická homogenní funkce tří proměnných

$$\alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{23}yz+2\alpha_{31}zx+3\alpha_{12}xy$$

se rozložila na součin dvou linearných funkcí

$$(ax+by+cz)(a'x+b'y+c'z),$$

musí patrně — a to také stačí — učiníme-li

$$\frac{x}{z}=\xi,\quad \frac{y}{z}=\eta,$$

kvadratická funkce dvou proměnných

$$\alpha_{11}\xi^2+\alpha_{22}\eta^2+2\alpha_{12}\xi\eta+2\alpha_{31}\xi+2\alpha_{32}\eta+\alpha_{33}$$

se rozložiti na součin dvou linearných faktorů

$$(a\xi+b\eta+c)(a'\xi+b'\eta+c').$$

To se ale stane tehdy a jen tehdy (viz na př. pojednání „Rozbor rovnice druhého stupně“, v němž můj dobrý přítel M. R. bez pomocí determinantů vytknutý úkol řeší, kdežto v tomto pojednání všude dán průchod užívání determinantů), když diskriminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}=0.$$

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda, & a'_{12}, & a'_{13} \\ a'_{21}, & a'_{22}-\lambda, & a'_{23} \\ a'_{31}, & a'_{32}, & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Každá hodnota λ hovící (29) hoví tedy i (30) a naopak, t. j. rovnice (29) a (30) mají tytéž kořeny; jsou-li všecky tři kořeny různé, soudíme, že rovnice tyto se úplně shodují, a mají-li vícenásobné kořeny, dojdeme k témuž úsudku, pozměníme-li hodnoty a_{ik} o malé obnosy tak, aby se vyskytly jen různé kořeny.

Dle supposice jest transformace (26) tak ustanovena, že

$$a'_{12} = a'_{23} = a'_{31} = 0,$$

tedy že (30) zní

$$(a'_{11}-\lambda)(a'_{22}-\lambda)(a'_{33}-\lambda) = 0.$$

Jsou tedy kořeny λ rovnice (30), a tedy i rovnice (29) hodnoty

$$\lambda_1 = a'_{11}, \quad \lambda_2 = a'_{22}, \quad \lambda_3 = a'_{33};$$

žádná z těchto hodnot nemůže býti nullou, neboť (29) při $\lambda = 0$ není vyplněna, poněvadž při centrálné ploše $\Sigma \pm (a_{11}a_{22}a_{33}) \gtrless 0$.

Řešivše tedy kubickou rovnici (29) a označivše její kořeny a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} nalezáme

$$(31)\qquad a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + a_{44} = 0,$$

jakožto transformovanou rovnici, — arci za stálé supposice, že žádaná transformace existuje. Zbývá dokázati, že tato supposice jest oprávněna a dále zbývá stanoviti nové (hlavní) osy, t. j. neznámé α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''.

§. 6. *Realnost kořenů λ.*

Především ukážeme, že rovnice (29), o níž jen předpokládáme, že hodnoty a_{ik} jsou realné a mimo to $a_{ik} = a_{ki}$, má naskrze realné kořeny. — Dejme tomu, že rovnici (29) hoví hodnota $\lambda = p + q\sqrt{-1}$. Jelikož determinant (29) se rovná nulle, lze ustanoviti tři hodnoty x_1, x_2, x_3, které nejsou vesměs nullami, tak že platí

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0,\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{23}x_3&=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+(a_{33}-\lambda)x_3&=0.\end{aligned}$$

Změníme-li v těchto rovnicích všude $\sqrt{-1}$ na $-\sqrt{-1}$, t. j: zaměníme-li λ za $\lambda'=p-q\sqrt{-1}$, x_k za konjugovanou hodnotu x'_k, bude patrně opět

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda')x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3&=0,\\ a_{21}x'_1+(a_{22}-\lambda')x'_2+a_{23}x'_3&=0,\\ a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+(a_{33}-\lambda')x'_3&=0.\end{aligned}$$

Pišme první tři rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=\lambda x_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=\lambda x_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=\lambda x_3,\end{aligned}\tag{32}$$

a druhé tři ve tvaru

$$\begin{aligned}a_{11}x'_1+a_{12}x'_2+a_{13}x'_3&=\lambda'x'_1,\\ a_{21}x'_1+a_{22}x'_2+a_{23}x'_3&=\lambda'x'_2,\\ a_{31}x'_1+a_{32}x'_2+a_{33}x'_3&=\lambda'x'_3.\end{aligned}\tag{33}$$

Násobme rovnice (32) resp. hodnotami x'_1, x'_2, x'_3 a sečtěme je pak podle sloupců; tu, přihlížejíce k rovnicím (33) obdržíme

$$\lambda'(x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3)=\lambda(x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3).\tag{A}$$

Součet $x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3$ nemůže býti nullou; neboť učiníme-li

$$x_k=g_k+h_k\sqrt{-1},$$

jest

$$x'_k=g_k-h_k\sqrt{-1},$$

a tedy

$$x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3=g_1^2+h_1^2+g_2^2+h_2^2+g_3^2+h_3^2$$

různé od nully, neb jinak by všech šest hodnot g, h rovnalo se nulle, tedy i x_1, x_2 a x_3, což jest proti supposici. Jelikož

$$x_1x'_1+x_2x'_2+x_3x'_3>0,$$

soudíme z (A), že

$$\lambda' = \lambda,$$

t. j.

$$p + q\sqrt{-1}, = p - q\sqrt{-1},$$

t. j. že q jest nullou, a tedy λ realnou hodnotou, co bylo dokázati.

Tohoto jednoduchého důkazu lze užiti doslova i v obecném případě známé rovnice n-ho stupně

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

která se v theorii sekulárných perturbac a v theorii malých vibrac vyskytuje. (Srovnej s důkazem, který podal *Caucky*, Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes; Exercices de Mathématiques, 4e année, pag. 140, Paris 1829.)

§. 7. *Případ různých kořenů λ.*

Jakožto první případ vezměme v úvahu ten, kdy kubická rovnice (29) má tři různé kořeny λ_1, λ_2, λ_3, které též značiti budeme a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}. Máme pak dle předešlého §.

$$u = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \tag{34}$$

a s. platí tato rovnice za pomocí rovnic (27) totožně. Derivujemeli tuto totožnosť dle x' obdržíme

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} = 2\lambda_1 x'$$

t. j.

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} = 2\lambda_1 x'.$$

Vypíšeme-li levou stranu, ihned shledáme, že se nemění, zaměníme-li na vzájem x, y, z a α, β, γ. Značíme-li tedy literou v funkci u, vložíme-li do ní α, β, γ na místo x, y, z, máme, vyjádřivše na pravé straně x' pomocí x, y, z, totožnosť

$$x\frac{\partial v}{\partial \alpha} + y\frac{\partial v}{\partial \beta} + z\frac{\partial v}{\partial \gamma} = 2\lambda_1(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

pročež $$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 2\lambda_1 \alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial \beta} = 2\lambda_1 \beta, \quad \frac{\partial v}{\partial \gamma} = 2\lambda_1 \gamma,$$

t. j. krátivše 2

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= 0,\\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta + a_{23}\gamma &= 0,\\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - \lambda_1)\gamma &= 0.\end{aligned} \tag{35}$$

Označme literou Δ determinant z koefficientů neznámých α, β, γ v těchto rovnicích. Pak víme, že $\Delta = 0$, neboť λ_1 jest jedním z kořenů rovnice (29). Označme dále obecně Δ_{ik} subdeterminant, jenž náleží v Δ k onomu elementu, který stojí v i-tém řádku a v k-tém sloupci; patrně $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$. Jestliže alespoň jeden z determinantů Δ_{ik} jest různý od nully, na př. Δ_{gh} — a že tomu tak, hned dokážeme — pak mají rovnice (35) jen řešení

$$\alpha : \beta : \gamma = \Delta_{g1} : \Delta_{g2} : \Delta_{g3}.$$

Vzhledem k první rovnici (25) máme nyní

$$\alpha = \varrho \Delta_{g1}, \quad \beta = \varrho \Delta_{g2}, \quad \gamma = \varrho \Delta_{g3},$$

kde $$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{g1}^2 + \Delta_{g2}^2 + \Delta_{g3}^2}},$$

a odmocninu možno vzíti se znamením libovolným.

Zbývá ukázati, že alespoň jeden subdeterminant Δ_{ik} jest různý od nully. Dle supposice jest λ_1 jednoduchým kořenem rovnice (29); derivujeme-li determinant (29) dle λ a vložíme-li za λ hodnotu λ_1, tu patrně obdržíme

$$-(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}),$$

a tento výraz jest různý od nully, neboť jinak by λ_1 nebyl jednoduchým kořenem. Z toho patrné, že nemohou všecky Δ_{ik} vymizeti.

Obdobně jako jsme nalezli α, β, γ, nalezneme α', β', γ' a α'', β'', γ''. Derivujemeli totiž (34) dle y', obdržíme pro α', β', γ' rovnice, které vycházejí z (35), nahradímeli λ_1 kořenem λ_2 a podobně hoví α'', β'', γ'' třem linearným rovnicím, v nichž λ_3 stojí na místě λ_1. Máme tedy

$$(36)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda_2)\alpha' + a_{12}\beta' + a_{13}\gamma' &= 0, \\ a_{21}\alpha' + (a_{22}-\lambda_2)\beta' + a_{23}\gamma' &= 0, \\ a_{31}\alpha' + a_{32}\beta' + (a_{33}-\lambda_2)\gamma' &= 0; \end{aligned}$$

$$(37)\qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda_3)\alpha'' + a_{12}\beta'' + a_{13}\gamma'' &= 0, \\ a_{21}\alpha'' + (a_{22}-\lambda_3)\beta'' + a_{23}\gamma'' &= 0, \\ a_{31}\alpha'' + a_{32}\beta'' + (a_{33}-\lambda_3)\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

Značíme-li determinant rovnic (36) literou Δ', onen rovnic (37) literou Δ'' a dále Δ'_{ik}, Δ''_{ik} jich subdeterminanty, jsou-li mimo to Δ'_{kl} a Δ''_{mn} různy od nully, máme

$$\alpha' = \sigma\Delta'_{k1}, \quad \beta' = \sigma\Delta'_{k2}, \quad \gamma' = \sigma\Delta'_{k3},$$

$$\alpha'' = \tau\Delta''_{m1}, \quad \beta'' = \tau\Delta''_{m2}, \quad \gamma'' = \tau\Delta''_{m3},$$

kdež

$$\frac{1}{\sigma} = \sqrt{\Delta'^2_{k1} + \Delta'^2_{k2} + \Delta'^2_{k3}}, \quad \frac{1}{\tau} = \sqrt{\Delta''^2_{m1} + \Delta''^2_{m2} + \Delta''^2_{m3}},$$

a znamení odmocnin lze libovolně volit.

§. 8. *Pokračování: Verifikace nalezeného řešení.*

Ukážeme nyní, že nalezené hodnoty α, β, γ, ... γ'' skutečně devíti rovnicím (25), (26), (28) hoví. Že hoví rovnicím (25) jest přímo patrné.

Abychom dále ukázali, že rovnice (26) jsou vyplněny, t. j. že nové osy jsou na sobě kolmy, pišme rovnice (35) a (36) ve tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma &= \lambda_1\alpha; & a_{11}\alpha' + a_{12}\beta' + a_{13}\gamma' &= \lambda_2\alpha', \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma &= \lambda_1\beta; & a_{21}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{23}\gamma' &= \lambda_2\beta', \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma &= \lambda_1\gamma; & a_{31}\alpha' + a_{32}\beta' + a_{33}\gamma' &= \lambda_2\gamma'. \end{aligned}$$

Násobmo levé rovnice resp. hodnotami α', β', γ' a sečtěme je dle sloupců; pak obdržíme se zřetelem na pravé rovnice

$$\lambda_2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = \lambda_1(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')$$

čili
$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0.$$

Avšak dle supposice jest $\lambda_2 - \lambda_1 \gtrless 0$, pročež

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0;$$

obdobně lze ukázati, že i druhé dvě rovnice (26) jsou vyplněny.

Zbývá verifikovati rovnice (28). Měli jsme na př.

$$a'_{12} = a_{11}\alpha\alpha' + a_{22}\beta\beta' + a_{33}\gamma\gamma' + a_{23}(\beta\gamma' + \gamma\beta') + a_{31}(\gamma\alpha' + \alpha\gamma') \\ + a_{12}(\alpha\beta' + \beta\alpha')$$

čili

$$a'_{12} = \alpha'(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) + \beta'(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) \\ + \gamma'(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma),$$

pročež vzhledem k rovnicím (35)

$$a'_{12} = \lambda_1(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0;$$

obdobně plynou ostatní dvě rovnice (28).

Nebude zbytečným, verifikujeme-li ještě přímo, že stanovenou transformací koefficienty při x'^2, y'^2, z'^2 jsou resp. λ_1, λ_2, λ_3. Měli jsme na př.

$$a'_{11} = a_{11}\alpha^2 + a_{22}\beta^2 + a_{33}\gamma^2 + 2a_{23}\beta\gamma + 2a_{31}\gamma\alpha + 2a_{12}\alpha\beta$$

čili

$$a'_{11} = \alpha(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma) + \beta(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma) \\ + \gamma(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma)$$

t. j. vzhledem ku (35)

$$a'_{11} = \lambda_1(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \lambda_1;$$

obdobně plyne $a'_{22} = \lambda_2$ a $a'_{33} = \lambda_3$.

Byla tedy učiněná supposice, že lze tři pravoúhlé osy souřadné tak ustanoviti, aby do transformované rovnice nové souřadnice jen svými čtverci vcházely, v případě různých kořenů λ oprávněna; zároveň patrno, že v tomto případě existuje jen to řešení, které jsme nalezli, t. j. že v tomto případě existuje jediná trojina hlavních os.

§. 9. *Případ dvou stejných kořenů λ.*

Jakožto druhý případ vezměme v úvahu ten, kdy rovnice (29) t. j.

$$\psi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

má dva různé kořeny: jeden dvojný $\lambda_1 = \lambda_2$ a jeden jednoduchý λ_3. Jakož jsme již v §. 6. byli podotkli, vyjádřeno faktum, že λ_1 jest dvojným kořenem, rovnicí $\frac{d\psi(\lambda_1)}{d\lambda_1} = 0$ t. j.

$$(38) \qquad \frac{d\Delta}{d\lambda_1} = -(\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}) = 0.$$

Nutno ještě dáti početního výrazu té supposici, že λ_1 není trojným kořenem t. j. že $\frac{d^2\psi(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} \gtrless 0$. Derivováním obdržíme

$$\frac{d^2\psi(\lambda_1)}{d\lambda_1^2} = \frac{d^2\Delta}{d\lambda_1^2} = -\left(\frac{d\Delta_{11}}{d\lambda_1} + \frac{d\Delta_{22}}{d\lambda_1} + \frac{d\Delta_{33}}{d\lambda_1}\right)$$
$$= -2(a_{11} - \lambda_1 + a_{22} - \lambda_1 + a_{33} - \lambda_1),$$

pročež máme v uvažovaném případě

$$(39) \qquad a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3\lambda_1 \gtrless 0.$$

Snadno ukážeme, že v tomto případě všecky subdeterminanty Δ_{ik} se rovnají nulle. Neboť kdyby některý z nich na př. Δ_{3h} byl různý od nully, pak by musil nutně $\Delta_{33} \gtrless 0$, což vychází těmiže úvahami jako obdobné tvrzení v §. 3. na str. 104. Pak by ve schematu elementů v Δ t. j.

$$(40) \qquad \begin{matrix} \bar{a}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \bar{a}_{33} \end{matrix}$$

kde k vůli stručnosti stojí $\bar{a}_{11}$ místo $a_{11} - \lambda_1$, $\bar{a}_{22}$ místo $a_{22} - \lambda_1$ a $\bar{a}_{33}$ místo $a_{33} - \lambda_1$, byly první dva řádky podstatně různé a jelikož $\Delta = 0$, byl by třetí z nich složen na př. pomocí faktorů ϱ a σ, t. j.

$$(41) \qquad a_{3k} = \varrho a_{1k} + \sigma a_{2k}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

při čemž nutno a_{hh} nahraditi hodnotou $\bar{a}_{hh}$.

Dle (38) máme ale

$$\begin{vmatrix} \bar{a}_{22} & a_{23} \\ a_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{13} \\ a_{31} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Nahraďme v prvních dvou determinantech elementy druhého řádku hodnotami (41), i obdržíme snadno

$$\varrho \begin{vmatrix} \bar{a}_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{13} \end{vmatrix} + \sigma \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = 0;$$

učiňme nyní totéž s druhými sloupci prvních dvou determinantů a máme snadno

$$\varrho^2 \begin{vmatrix} \bar{a}_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \bar{a}_{11} \end{vmatrix} + \sigma^2 \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

t. j. $$(\varrho^2 + \sigma^2 + 1)\Delta_{33} = 0.$$

Vzhledem k realnosti faktorů ϱ a σ jest první faktor > 0, pročež by musilo Δ_{33} vymizeti, což by bylo proti supposici. Jest tedy tato supposice nemožnou, t. j. všecky minory Δ_{ik} jsou nutně rovny nulle. Jsou tedy ve schematu (40) dva řádky násobky třetího. Zároveň není možná, aby všecky elementy tohoto schematu byly nullami, neboť pak by

$$\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + \bar{a}_{33} = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3\lambda_1 = 0,$$

což odporuje (39). Budiž tedy na př. některý element prvního řádku v (39) různý od nully; pak jest ze známých příčin (§. 3. C.) nutně i $\bar{a}_{11} \gtrless 0$ a rovnice (35) se redukují na jedinou rovnici

$$(a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0.$$

Volme směry α, β, γ a α', β', γ' tak, aby oba hověly této rovnici a aby současně

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0;$$

geometrický význam této volby jest jasný.

Směr α'', β'', γ'' závisící na třetím, jednoduchém kořenu λ_3 stanovme dle formulí §. 6.

Takto stanovené tři směry hoví rovnicím (25), (26), (28), t. j. ony formulemi (27) transformují u na tvar

$$u = \lambda_1(x'^2 + y'^2) + \lambda_3 z'^2.$$

Verifikace: Předně patrno, že $\alpha, \beta \ldots$ byly tak ustanoveny, aby hověly rovnicím (25). Za druhé lze kolmost směrů

$$(\alpha\beta\gamma) \perp (\alpha''\beta''\gamma'') \quad \text{a} \quad (\alpha'\beta'\gamma') \perp (\alpha''\beta''\gamma'')$$

právě tak dokázati, jako v §. předchozím, jelikož náleží k různým kořenům, totiž λ_1 a λ_3 a kolmost $(\alpha\beta\gamma) \perp (\alpha'\beta'\gamma')$ pojištěna přímo volbou těchto dvou směrů; tím verifikovány relace (26). Konečně lze relace (28) verifikovati právě tak jako v předešlém §., neboť se verifikace opírala o právě vytknuté relace (26). — A touže cestou konečně i shledáme, že

$$a'_{11} = a'_{22} = \lambda_1; \quad a'_{33} = \lambda_3.$$

§. 10. *Případ tří stejných kořenů λ.*

Jakožto třetí a poslední případ vezměme v úvahu ten, kdy rovnice (29) má tři stejné kořeny $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, t. j. kdy platí současně

$$\Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33} = 0,$$

(42) $$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 3\lambda_1 = 0,$$

Z první rovnice jsme odvodili, že všecky Δ_{ik} jsou nullami, z druhé pak dále plyne, že všecky elementy schematu (40) jsou nullami; neboť kdyby na př. některý element prvního řádku nebyl nullou, tu by na jisto $\bar{a}_{11} \gtrless 0$ a druhý a třetí řádek by byl násobkem prvního, t. j.

$$a_{2k} = \varrho a_{1k}; \quad a_{3k} = \sigma a_{1k}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

kdež a_{hh} nutno nahraditi hodnotou $\bar{a}_{hh}$. Tudíž specialně

$$a_{21} = \varrho \bar{a}_{11}; \quad a_{31} = \sigma \bar{a}_{11},$$

pročež i

$$\bar{a}_{22} = \varrho a_{12} = \varrho^2 \bar{a}_{11}; \quad \bar{a}_{33} = \sigma a_{13} = \sigma^2 \bar{a}_{11},$$

čímž druhá rovnice (42) přejde na

$$\bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + \bar{a}_{33} = \bar{a}_{11}(1 + \varrho^2 + \sigma^2) = 0,$$

což jest odpor, neboť $\bar{a}_{11} \gtrless 0$ a $1 + \varrho^2 + \sigma^2 > 0$.

Vymizí tudíž všecky elementy schematu (40), t. j. máme

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda_1\,; \quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0.$$

Rovnice (29) jsou identické, majíce naskrz nullové koefficienty. Jelikož tu rovnice plochy zní

$$a_{11}(x^2 + y^2 + z^2) + a_{44} = 0,$$

jest patrné, že každé tři k sobě kolmé osy jsou osami hlavními, neboť pak transformací máme

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

tak že transformovaná rovnice má vždy týž tvar jako původní, neobsahujíc proměnné než ve čtvercích.

(Dokončení.)

Poznámka o rozměrovém součinu elektrické kapacity a elektrického odporu, a o významu jeho.

Napsal

B. Navrátil,

ředitel realné školy v Prostějově.

Jest známo, že v měrné soustavě *cm g s*

$$1 \text{ farad} \triangleq 9\,.\,10^{11}\,[k] \triangleq 10^{-9}\,[K]$$

$$1 \text{ ohm} \triangleq \frac{[r]}{9\,.\,10^{11}} \triangleq 10^{9}\,[R],$$

kdež $[k]$, $[r]$ jsou jednotky kapacity a odporu v míře elektrostatické, $[K]$, $[R]$ tytéž jednotky v míře elektromagnetické.

Z toho plyne přímo

$$1 \text{ farad} \times 1 \text{ ohm} \triangleq [k]\,.\,[r] \triangleq [K]\,.\,[R].$$

Podobně snadno se přesvědčíme, že

$$1 \text{ mikrofarad} \times 1 \text{ megohm} \triangleq [k]\,.\,[r] \triangleq [K]\,.\,[R].$$

Dále jest rozměr

	v míře elektrostat.	v míře elektromag.
kapacity	$[L]$	$[L^{-1}\,T^2]$
odporu	$[L^{-1}\,T]$	$[L\,T^{-1}]$,

tak že