Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 16 (1887), No. 4, 175--184

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121078

$$S = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

bezeichnet, deren Glieder c_n mit wachsendem n zu Null convergiren, die also jedenfalls selbst convergirt, solange $x < 1$. Es ist nämlich $(1 - x)S$, so lange $x < 1$, die sicherlich convergente Reihe

$$c_0 + x(c_1 - c_0) + x^2(c_2 - c_1) + \ldots$$

etc.“

Po té uvádí větu:

„Sind *ferner* die c reell und positiv, und ist $c_{n+1} < c_n$ für jedes n, *so convergirt die Reihe*

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

noch für alle Werthe von x, *für welche Mod* $(x) = 1$; *nur für* $x = 1$ kann sie divergent sein.

Důkaz tam podaný však k odůvodnění této poučky, o jejíž správnosti mám ostatně vážné pochybnosti, nikterak nestačí. S jistotou lze tvrditi toliko, že řada $(1 - x)S$ konverguje pro všecka x, jichž absolutní hodnota $= 1$, a zvlášť také pro $x = 1$; leč z toho nikterak nelze souditi na konvergenci řady S, která může divergovati pro všecka x, jichž absolutní hodnota rovná se jednotce, a přec při tom může funkce existovati, býti pravidelnou pro všecka tato x vyjímaje $x = 1$. Věta má zníti tak, že „funkce definovaná elementem S má pro všecka x, pro něž $|x| = 1$, hodnotu konečnou, nejvýše vyjímaje pro $x = 1$.“

Úlohy.

Řešení úlohy 9.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Žádanou plochu p obdržíme, odečteme-li od plochy P trojúhelníka daného, plochy tří trojúhelníků, které s trojúhelníkem daným mají společný úhel buď α, neb β, neb γ a s hledaným jednu stranu.

Jeden z těchto trojúhelníků, jenž má úhel α sevřený stranami $b_1 = c \cos \alpha$ a $c_1 = b \cos \alpha$, má plochu

$$p_1 = \frac{b_1 c_1}{2} \sin\alpha = \frac{bc}{2} \sin\alpha \cos^2\alpha = \mathrm{P}\cos^2\alpha;$$

a podobně ostatní dva $p_2 = \mathrm{P}\cos^2\beta$, $p_3 = \mathrm{P}\cos^2\gamma$.

Žádaná plocha jest tedy

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{P}\,(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) \\ &= \mathrm{P}\,[\sin^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2(\alpha + \beta)] \\ &= \mathrm{P}\,[\cos^2\beta\,(\sin^2\alpha - 1 - \cos^2\alpha) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta] \\ &= \mathrm{P}\,[2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta] \\ &= 2\mathrm{P}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \end{aligned}$$

Správné řešení zaslali pp.: *Bohuslav Mašek* z VIII. tř. gymn. v Truhlářské ulici v Praze, *Ant. Radešínský* a *Frant. Navrátil* z VIII. tř. v Litomyšli, *Bohumír Tomíček* z VIII. tř. v Jičíně, *A. Smolík* z VIII. tř. v Budějovicích, *Karel Herzán* ze VI. tř. r., *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Otakar Kádner* a *Karel Zikmund* ze VII. tř. g. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 10.

Budiž B počátkem a BC osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Hledejme nejprve geom. místo vrcholu M(x, y), který ve straně AB se nalezá. Rovnice kruhu, po kterém vrchol A(ξ, η) se pohybuje, jest

(1) $$\xi^2 + \eta^2 - a\xi - 2\beta\eta = 0,$$

klademe-li BC $= a$, a je-li β pořadnice středu. Ježto body M, A v přímce AB se nalezají, máme

(2) $$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x};$$

mimo to jest známo, že strana vepsaného čtverce

(3) $$y = \frac{a\eta}{a + \eta}.$$

Vyloučíme-li ξ a η z rovnic (1), (2), (3), obdržíme rovnici geom. místa bodu M:

(4) $$ax^2 + (a + 2\beta)y^2 - a^2x + axy - 2a\beta y = 0.$$

Hledanou křivkou jest *ellipsa* jdoucí vrcholy B a C. Položíme-li do rovnice poslední $x + y$ místo x, obdržíme geom. místo bodu N a tedy opět *ellipsu.*

Píšeme-li v rovnici (4) $x+\frac{y}{2}$ místo x a $\frac{y}{2}$ místo y, dojdeláme se rovnice, která vyjadřuje, že také geom. místem středu čtverce jest *ellipsa* jdoucí vrcholy B a C.

Poznámka. Pohybuje-li se bod A v kružnici

$$\xi^2+\eta^2=a^2,$$

vytvoří bod M parabolu

$$x^2+2ay-a^2=0,$$

mající ohnisko v bodu B.

Řešení této úlohy zaslali pp.: *K. Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 11.

Normály ellipsy v bodech (x_1y_1), (x_2y_2) mají rovnice

$$a^2y_1x-b^2x_1y=e^2x_1y_1,$$
$$a^2y_2x-b^2x_2y=e^2x_2y_2,$$

kdež $e^2=a^2-b^2$. Souřadnice oněch bodů lze též takto vyjádřiti:

$$x_1=a\cos\omega,\quad y_1=b\sin\omega,$$
$$x_2=-a\sin\omega,\quad y_2=b\cos\omega;$$

budou pak normálám náležeti rovnice

$$\frac{ax}{\cos\omega}-\frac{by}{\sin\omega}-e^2=0,$$
$$\frac{ax}{\sin\omega}+\frac{by}{\cos\omega}+e^2=0.$$

Vypočítáme-li z rovnic těchto napřed $\frac{1}{\sin\omega}, \frac{1}{\cos\omega}$ a potom $\sin\omega$, $\cos\omega$ a užijeme-li podmínky

$$\cos^2\omega+\sin^2\omega=1,$$

dostaneme po krátkém zjednodušení

$$(a^2x^2+b^2y^2)^3=\frac{e^4}{2}(a^2x^2-b^2y^2)^2.$$

Hledaná křivka jest stupně šestého, souměrná k oběma osám a má v počátku souřadnic bod čtyrnásobný. Úhlopříčny obdélníka, který jest omezen tečnami ve vrcholech ellipsy sestrojenými, protínají ellipsu ve čtyřech bodech, jichž normály protínají osy ve vrcholech křivky.

Správné řešení této úlohy zaslali pp.: *K. Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. g. v Litomyšli.

Řešení úlohy 12.

Tečny ellipsy v bodech M, N protínají se v bodu Q kružnice

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Hledejme dříve geom. místo bodu R, ve kterém MN a OQ se protínají. Rovnice poláry MN bodu Q(α, β) vzhledem k ellipse jest

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2, \tag{1}$$

přímce OQ náleží rovnice

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x, \tag{2}$$

a že bod Q v kružnici se nalézá, máme podmínku

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

Vyloučíme-li z rovnic (1), (2), (3) α a β, obdržíme

$$a^4b^4(x^2 + y^2) = (a^2 + b^2)(a^2y^2 + b^2x^2)^2 \tag{4}$$

jakožto rovnici geom. místa bodu R.

Užitím známých rovnic transformačních

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

obdržíme rovnici křivky v souřadnicích polárných

$$\varrho = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)}. \tag{5}$$

Nyní lze i polárnou rovnici geom. místa bodu P(r, ω) obdržeti. Poněvadž bod R úsečku PQ rozpoluje jest

$$\varrho = \frac{r + \sqrt{a^2 + b^2}}{2};$$

dosadíme-li hodnotu za ϱ do rovnice (5), obdržíme po krátké redukci

$$r = \frac{2a^2b^2 - (a^2 + b^2)(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)}{\sqrt{a^2 + b^2}\,(a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega)},$$

a přejdeme-li opět k souřadnicím pravoúhlým

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)(a^2y^2 + b^2x^2)^2 = [2a^2b^2(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)(a^2y^2 + b^2x^2)]^2.$$

Křivka hledaná jest stupně šestého a má v počátku bod čtyřnásobný. Poněvadž jest

$$OP = 2 . OR - OQ,$$

jest křivka tato konchoidou křivky homothetické s geom. místem bodu R.

Řešení téže úlohy zaslal p. *K. Petr* ze VII. třídy gymn. v Chrudimi.

Řešení úlohy 13.

Řešení 1.

Rovnici danou

$$(x^2+1)^2+(x+1)^2=a(x^2+1)(x+1)$$

dělíme-li $(x^2+1)(x+1)$, povstane rovnice

$$\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+1}=a,$$

jest tedy tvaru

$$z+\frac{1}{z}=a.$$

Řešení 2.

Klademe-li v rovnici dané

$$x^2+1=u, \quad x+1=v,$$

bude tvar její

$$u^2+v^2=auv$$

aneb

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{u}{v}\right)^2-a.\frac{u}{v}+1=0,$$

z kteréž jde

$$\frac{u}{v}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2},$$

tedy $u=bv$ nebo-li $x^2+1=b(x+1)$, znamená-li

$$b=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.\,^{*)}$$

Řešení 1. zaslali pp.: *Frant. Klas* a *Jindřich Šafařovič* z VIII. třídy v Písku, *Jos. Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně, *Adolf Plýva*, *Svatopluk Dienel*, *Frant. Doležal* a *Jan Andres* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Lud. Novotný* a *Karel Petr* ze VII. třídy gym. v Chrudimi.

*) Tvar rovnice (α) dostaneme, dělíme-li rovnici danou $(x+1)^2$.

Řešení 2. zaslali pp.: *Bohumír Tomíček* z VIII. tř. v Jičíně, *A. Smolík* z VIII. tř. v Budějovicích, *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Karel Bailony* z VIII. třídy v Chrudimi, *Jos. Lauschmann* ze VII. tř. g. v Příbrami, *Kar. Herzán* ze VI. tř. r., *Jos. Dvořák* a *Karel Novák* z VIII. třídy v Hradci Králové.

Řešení úlohy 14.

(Zaslal p. *Frant. Zelinka*, stud. VI. tř. r. v Brně.)

V trojúhelníku daném *abc* sestrojme výšky

$$ad \perp bc, \; be \perp ca, \; cf \perp ab;$$

jak známo, půlí tyto výšky vnitřní úhly trojúhelníka *def*. Označme v trojúhelníku *abc* úhly písmenami α, β, γ; úhly trojúhelníka *def* nechť jsou x, y, z. Snadným způsobem odvodíme z obrazce rovnice tyto:

$$x + y = 2\gamma, \; y + z = 2\alpha, \; z + x = 2\beta,$$

jichž řešením najdeme:

$$x = \beta + \gamma - \alpha, \quad y = \gamma + \alpha - \beta, \quad z = \alpha + \beta - \gamma.$$

Podobnosť trojúhelníků *abc*, *def* vyžadovala by vzájemnou rovnosť úhlů, tedy na př.

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma.$$

Pak by však bylo

$$\alpha = \beta + \gamma - \alpha, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

a dle rovnice $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ bylo by $\alpha = 60^0$; rovněž tak bychom nalezli $\beta = 60^0$, $\gamma = 60^0$. K témuž výsledku dospějeme, kladouce rovnými úhly obou trojúhelníků jiným pořádkem, třeba

$$x = \beta, \quad y = \gamma, \quad z = \alpha;$$

tím tedy odůvodněna věta:

Trojúhelník určený patami výšek trojúhelníka daného, jest tomuto podoben jen tehdy, když daný trojúhelník jest rovnostranný.

Správné řešení úlohy této zaslal pan *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Správné, ač ne úplné, řešení zaslali pp.: *Karel Novák* z VIII. tř. v Hradci Králové a *Václav Žítek* z V. tř. r. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 15.

(Zaslal p. *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně.)

Dán jest čtyřúhelník $abcd$; označme délky stran a úhlopříčen jeho
$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b, \quad \overline{cd} = c, \quad \overline{da} = d, \quad \overline{ac} = m, \quad \overline{bd} = n.$
Protínají-li se úhlopříčny v bodě o, znamenejme
$\overline{ao} = m_1, \quad \overline{bo} = n_1, \quad \overline{co} = m_2, \quad \overline{do} = n_2, \quad \sphericalangle boc = \omega.$
I jest pak

$$a^2 = m_1^2 + n_1^2 + 2m_1n_1 \cos\omega, \quad b^2 = m_2^2 + n_1^2 - 2m_2n_1 \cos\omega,$$
$$c^2 = m_2^2 + n_2^2 + 2m_2n_2 \cos\omega, \quad d^2 = m_1^2 + n_2^2 - 2m_1n_2 \cos\omega;$$

uváživše, že jest $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n$, obdržíme z rovnic předcházejících

$$\cos\omega = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn}.$$

Známo však, že lze plochu čtyřúhelníka vyjádřiti vzorcem

$$P = \tfrac{1}{2}\, mn \sin\omega;$$

vyloučením součinu mn z obou rovnic posledních dospějeme k výsledku

$$P = \tfrac{1}{4}(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) \operatorname{tg}\omega.$$

Ze vzorce tohoto i ze vzorce pro $\cos\omega$ zřejmo jest, že při $\omega = 90^0$ musí býti

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Dvořák*, *Karel Novák* a *Josef Kábrle* z VIII. tř. g. a *Karel Herzán* ze VI. tř. r. v Hradci Králové, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně a *Jan Andres* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze.

Řešení úlohy 16.

Za podmínek v úloze daných lze rovnice obou křivek psáti

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$x^2 + y^2 = ab;$$

body oběma křivkám společné mají souřadnice

$$x = \pm a\sqrt{\frac{b}{a+b}}, \quad y = \pm b\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Hleďme k onomu z nich, který má obě souřadnice kladné; tečna v něm k ellipse stanovená má směrnici

$$A = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b}{a}},$$

tečna kružnice v témž bodě má směrnici

$$A' = -\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Tečny tyto svírají tedy úhel φ určený vzorcem

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a-b}{\sqrt{ab}}.$$

Aby byl tento úhel $\varphi = 45^0$, jest třeba a stačí, aby bylo $b:(a-b) = (a-b):a$; v případě tomto bude poloměr kruhu

$$r = \sqrt{ab} = a - b.$$

Výsledek tento lze vysloviti takto:

Ellipsa a soustředný s ní kruh stejného obsahu protínají se v úhlu 45⁰, je-li vedlejší osa rovna menšímu dílu hlavní osy rozdělené dle zlatého řezu; průměr kruhu rovná se pak dílu většímu.

Tečna ke kružnici má rovnici ve tvaru normálném

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = \sqrt{ab};$$

podmínka, aby přímka tato byla zároveň tečnou ellipsy, jest

$$a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = ab,$$

odkud ustanovíme

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{b}{a+b}}, \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Rovnice jedné společné tečny obou křivek jest tudíž

$$\frac{x}{\sqrt{a(a+b)}} + \frac{y}{\sqrt{b(a+b)}} = 1;$$

část tečny té mezi oběma osami obsažená jest $c = a + b$. Přímka tato dotýká se ellipsy v bodě m, jehož souřadnice jsou

$$x_1 = a\sin\alpha, \quad y_1 = b\cos\alpha;$$

bod dotyčný n na kružnici má souřadnice

$$x_2 = \sqrt{ab}\,.\cos\alpha, \quad y_2 = \sqrt{ab}\,.\sin\alpha.$$

Poloha bodů dotyčných ke průsečíkům obou křivek jest z těchto rovnic patrna. Stanovíme-li totiž všechny 4 společné tečny, obdržíme na ellipse 4 dotyčné body; tyto leží na průměrech sdružených k oněm, které body společnými obou křivek procházejí.

Poznámka. Bod m jest tak zvaný *bod Fagnanův*; dělí příslušný kvadrant ellipsy ve dva oblouky, jichž rozdíl jest $a - b$.

Řešení úlohy této zaslali pp.: *Bohumír Tomíček* z VIII. tř. v Jičíně, *Jindřich Šafařovič* z VIII. tř. v Písku, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Alois Smolík* z VIII. tř. v Budějovicích, *Frant. Doležal* a *Jan Andres* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *Karel Novák* a *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Vladimír Novák* z VIII. tř. v Truhlářské ulici v Praze, *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli a *Fr. Janoušek* ze VII. tř. r. v Brně.

Řešení úlohy 1. zaslal též p. *J. Petříček*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úlohu 1. a 3. zaslal p. *Jan Lokay*, stud. VI. tř. g. na Novém Městě v Praze a úlohu 3. a 6. zaslal p. *Bohumír Tomíček*, stud. VIII. tř. v Jičíně a *K. Janoušek*, stud. VII. tř. r. v Brně.

Úloha 29.

Řešiti soustavu rovnic

$$(a-1)\,xy - (ab-1)\,x + a\,(b-1) = 0$$
$$(b-1)\,yz - (bc-1)\,y + b\,(c-1) = 0$$
$$(c-1)\,zx - (ca-1)\,z + c\,(a-1) = 0.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 30.

Lichoběžník rozpůliti přímkou rovnoběžnou k úhlopříčně.

Týž.

Úloha 31.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, r poloměr kružnice opsané, ϱ poloměr kružnice vepsané a $2s = a + b + c$, buď dokázáno, že

$$ab + bc + ca = \varrho^2 + 4\varrho r + s^2.$$

Týž.

Úloha 32.

V pravoúhlé soustavě dány jsou body $a\,(0, 5)$, $b\,(3, -4)$ a přímka

$$T_1 \equiv 3x - 4y + 25 = 0.$$

Buďtež ustanoveny:

a) Rovnice kružnic K_1, K_2 body a, b procházejících a přímky T_1 se dotýkajících.

b) Souřadnice středů a poloměry kružnic K_1, K_2.

c) Úhel těchto kružnic.

d) Rovnice druhé společné tečny T_2 těchto kružnic.

e) Souřadnice bodů, ve kterých se kružnice K_1, K_2 tečen T_1, T_2 dotýkají.

f) Úhel tečen T_1, T_2 a souřadnice jich průsečíku.

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 33.

Jsou-li r_1, r_2 průvodiče bodu na ellipse, r pak příslušný poloměr, jest výraz $r^2 + r_1 r_2$ hodnoty stálé. Buď podán důkaz této vlastnosti a ukázána obdobná vlastnost hyperboly. *Týž.*

Úloha 34.

Jest dán kruh a v bodu O tečna T; v krajních bodech průměru AB vedené tečny protínají tečnu T v bodech C a D. Má se dokázati, že geom. místem bodu M, ve kterém přímky AD a BC se protínají, jest kružnice.

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 35.

Kruh O dotýká se dané přímky T v bodu D; v krajním bodu A průměru AOB vedená tečna protíná tečnu T v bodu C. Má se dokázati, že geom. místem bodu M, který délku BC rozpoluje, jest strophoida. *Týž.*

Úloha 36.

V trojúhelníku ABC jest příčka AA′ úhel A půlící, rovna pevné základně AB; má se určiti geom. místo hybného vrcholu C.

Dr. *Fr. Sum* v Telči.