Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Čupr

Parsevalova identita a její užití v teorii o funkcích konečných

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 55 (1926), No. 1, 11--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121073

Parsevalova identita a její užití v teorii o funkcích konečných.

Napsal *Karel Čupr.*

1. Značíme-li $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu \ldots$ body, v nichž jsou singularity funkce definované řadou

$$f(x) = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

a podobně $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu \ldots$

body, v nichž jsou singularity funkce definované řadou

$$F(x) = \sum_0^\infty b_m x^m,$$

nemůže dle věty Hadamardovy[1]) míti funkce

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a_m b_m x^m$$

singularity nežli v bodech

$$x = \alpha_k \beta_l, \qquad k = 1, 2, \ldots$$
$$l = 1, 2, \ldots$$

Je-li x obyčejný bod funkce $\varphi(x)$, je dle Parsevalovy identity[2])

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x' e^{i\vartheta}) F(x'' e^{-i\vartheta}) \, d\vartheta, \quad x' x'' = x, \ldots, \tag{1}$$

pokud ovšem integrál v pravo existuje.

Jsou-li $a_m . b_m$ — $m = 0, 1, 2, \ldots$ — vesměs čísla reálná, jest

$$\varphi(x) = \text{reálná část} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x' e^{i\vartheta}) F(x'' e^{-i\vartheta}) \, d\vartheta.$$

---

[1]) Acta math. XXII, pag. 55.; La sér. de Taylor, Scientia, no 12, pag. 69.

[2]) Původní práce Parsevalova jest těžko přístupná. — Mém. des sav. étrang. 1ère sér. t. 1, 1806. Viz Enc. der math. Wissensch. II. Bd., I. Th., p. 948.

V prvé části svého pojednání budeme se zabývati případy, kdy a_m i b_m — $m = 0, 1, 2, \ldots$ — jsou čísla reálná; pak jest, volíme-li $x' = x'' = \sqrt{x}$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(\sqrt{x}\,e^{i\vartheta})\,F\,(\sqrt{x}\,e^{-i\vartheta})\,d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\,(\sqrt{x}\,e^{i\vartheta})\,F\,(\sqrt{x}\,e^{-i\vartheta})\,d\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; (1^*)$$

Identitu Parsevalovu lze pojati obecněji: Platí-li o funkcích

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots$$
$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x), \ldots$$

$$\int_a^b f_k(x)\,\varphi_l(x)\,dx = 0,\ k \neq l,$$

$$\int_a^b f_k(x)\,\varphi_k(x)\,dx - m_k,$$

a konvergují-li řady

$$F(x) = \sum_1^\infty a_k f_k(x),$$

$$\Phi(x) = \sum_1^\infty b_k f_k(x)$$

absolutně a stejnoměrně, jest

$$\sum_1^\infty m_k a_k b_k = \int_a^b F(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

Případu

$$f_n(x) = e^{2n\pi x i},\ \varphi_n = e^{-2n x \pi i},$$

použil několikráte prof. M. Lerch;[3]) tomuto případu blíží se aplikace Parsevalovy identity v teorii Fourierových řad.[4])

V první části svého pojednání chceme pomocí Parsevalovy identity odvoditi některé vztahy mezi nekonečnými řadami a omezenými integrály; v druhé části budeme identitu Parsevalovu apli-

---

[3]) Rozpravy C. Ak., II. tř. 1. r., č. 25.

[4]) Hurwitz, Math. Ann. LVII, 1903; po prvé asi Dirichlet: Vorlesungen über die bestimmte Integrale, pag. 364.

kovati na teorii konečných funkcí, používajíce vztahů odvozených v první části.

2. Budiž $|x| < 1$; n, a, buďtež čísla celistvá kladná a taková, že $n : a$ není číslo celistvé. Pak v rozvoji

$$\frac{1+x^n}{(1+x^a)^s} = (1+x^n)\left[1+\binom{-s}{1}x^a+\binom{-s}{2}x^{2a}+\dots\right].$$

Koeficienty všech mocnin jsou rovny 1 a jest dle . (1*)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1+(\sqrt{x}e^{i\varphi})^n}{[1+(\sqrt{x}e^{i\varphi})^a]^s}\cdot\frac{1+(\sqrt{x}e^{-i\varphi})^n}{[1+(\sqrt{x}e^{-i\varphi})^a]^s}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1+2x^{\frac{n}{2}}\cos n\varphi + x^n}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s}\,d\varphi =$$

$$= 1+\binom{-s}{1}^2 x^a + \binom{-s}{2}^2 x^{2a}+\dots$$

$$\dots + x^n + \binom{-s}{1}^2 x^{a+n} + \binom{-s}{2}^2 x^{2a+n}+\dots =$$

$$= F(s,s,1,x^a) + x^n\, F(s,s,1,x^a) = (1+x^n)\, F(s,s,1,x^a);$$

při čemž F zde i v dalším nám bude značiti Gaussovu hypergeometrickou řadu. Pro $n\to\infty$ máme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = F(s,s,1,x^a),\ |x|<1; \quad . \ . \ . \ (2)$$

a jednoduchým obratem

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = 0,\quad |x| < 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2^*)$$

Položme v . . . (2) 2φ místo φ, a místo $2a$, x místo $\sqrt{x}$, a jest

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = \frac{\pi}{2} F(s,s,1,x^a),\ |x|<1 \ . \ . \ . \ (2^{**}).$$

Píšeme-li v . . . (2) a . . . (2*) $x=\frac{1}{y}$, $|y|>1$ a opět x místo y, máme

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = x^{-as} F(s, s, 1, x^{-a}), \quad |x| > 1 \quad (3)$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi \, d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = 0, \qquad |x| > 1. —$$

Je-li $a = 1$, položme $x = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$; po snadné úpravě plyne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(p^2\cos^2\varphi + q^2\sin^2\varphi)^s} = \frac{\pi \,.\, 2^{2s-1}}{(p \pm q)^{2s}} F\left(s, s, 1, \left(\frac{p \mp q}{p \pm q}\right)^2\right);$$

$\pm$ dle toho, je-li $|p-q| \lesseqgtr |p+q|$. —

Poněkud složitější jest případ, kdy $n : a$ jest číslo celistvé značme je ν. Tu pro $|x| < 1$ jest

$$\frac{1+x^{a\nu}}{(1+x^a)^s} = 1 + \binom{-s}{1} x^a + \binom{-s}{1} x^{2a} + \dots$$

$$\dots + \binom{-s}{\nu-1} x^{(\nu-1)a} + x^{a\nu}\left(\binom{-s}{0} + \binom{-s}{\nu}\right) +$$

$$+ x^{a\nu+a}\left(\binom{-s}{1} + \binom{-s}{\nu+1}\right) + \dots,$$

takže

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1+2x^{\frac{n}{2}}\cos n\varphi + x^n}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} d\varphi = 1 + \binom{-s}{1}^2 x^a + \binom{-s}{2}^2 x^{2a} + \dots$$

$$\dots + \binom{-s}{\nu-1}^2 x^{(\nu-1)a} + x^{a\nu}\left(\binom{-s}{0} + \binom{-s}{\nu}\right)^2 +$$

$$+ x^{a\nu+a}\left(\binom{-s}{1} + \binom{-s}{\nu+1}\right)^2 + \dots \quad = (1+x^n)\, F(s, s, 1\, x^a) +$$

$$+ 2x^n\left[\binom{-s}{0}\binom{-s}{\nu} + \binom{-s}{1}\binom{-s}{\nu+1} x^a + \dots\right] =$$

$$= (1+x^n)\, F(s, s, 1, x^a) + 2x^n \binom{-s}{\frac{n}{a}} F\left(s + \frac{n}{a}, s, \frac{n}{a} + 1, x^a\right).$$

Odsud s ohledem na ... (2) plyne

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} =$$

$$= \pi x^{\frac{n}{2}} \binom{-s}{\frac{n}{a}} F\left(s+\frac{n}{a}, s, \frac{n}{a}+1, x^a\right), \ |x| < 1. \quad \ldots \quad (4)$$

a týmž obratem jako dříve

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} =$$

$$= \pi x^{-as-\frac{n}{2}} \binom{-s}{\frac{n}{a}} F\left(s+\frac{n}{a}, s, \frac{n}{a}+1, x^{-a}\right), \quad |x| > 1. \quad (4^*)$$

Substituce $a = 1$, $x = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2$ vede k integrálu

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\left(p^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + q^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^s} =$$

$$= \frac{2^{2s}\,.\,\pi}{(p\pm q)^2} \cdot \left(\frac{p\mp q}{p\pm q}\right)^n \binom{-s}{n} F\left(s+n, s, n+1, \left(\frac{p\mp q}{p\pm q}\right)^2\right),$$

$\pm$ dle toho, zdaž $|p-q| \lesseqgtr |p+q|$.

Odsud snadno odvodíme Fourierovu řadu[5])

$$\frac{1}{\left(p^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + q^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^s} = \frac{2^{2s-2}}{(p\pm q)^{2s}} \left\{ F\left(s, s, 1, \left(\frac{p\mp q}{p\pm q}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{\infty} \binom{-s}{k} F\left(s+k, s, k+1, \left(\frac{p\mp q}{p\pm q}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{p\mp q}{p\pm q}\right)^k . \cos k\varphi. \right.$$

Jednoduchými změnami lze vzorec 4) přepsati do tvaru

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi + x^a)^s} = \pi\,.\,x^{\frac{n}{2}} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \binom{-s}{\varrho} \binom{-s}{\frac{n}{a}+\varrho} x^{a\varrho}.$$

[5]) Případ $s = 1$ viz Hostinský: Sp. vyd. přír. fak. M. Un. č. 42, pag. 9.

Volme $s=\frac{1}{2}$; poněvadž

$$\binom{-\frac{1}{2}}{\frac{n}{a}+\varrho}=(-1)^{\frac{n}{a}+\varrho}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{a}+\varrho+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{a}+\varrho+1\right)\Gamma(\frac{1}{2})}=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{n}{a}+\varrho}}{\pi}\cdot\int_0^\pi \sin^{\frac{2n}{a}+2\varrho}\varphi\, d\varphi,$$

jest
$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{(1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi+x^a)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi=$$

$$=x^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{a}}\sum_{\varrho=0}^{\infty}\binom{-s}{\varrho}\int_0^\pi \sin^{\frac{2n}{a}}\varphi\,.(-x^a\sin^2\varphi)^\varrho\, d\varphi.$$

Pořad sčítání a integrování lze zaměniti; tak obdržíme

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1+2x^{\frac{a}{2}}\cos a\varphi+x^a}}=x^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{a}}\int_0^\pi \frac{\sin^{\frac{2n}{a}}\varphi}{\sqrt{1-x^a\sin^2\varphi}}\,d\varphi, \quad (4)$$

$|x|<1$, $n:a$ jest číslo celistvé kladné.

Substituce $-x^{\frac{a}{2}}=y$, $a=1$ vede ke známému vztahu Legendreovu.

3. Zabývejme se nyní řadou

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1+2x^a\cos a\varphi+x^{2a})^s}=F(s,\,s,\,1,\,x^{2a})=$$

$$=1+\left(\frac{s}{1}\right)^2 x^{2a}+\frac{s^2(s+1)^2}{1^2\,.\,2^2}x^{4a}+\ldots$$

Pro $x=1$, $2s-1\gtreqless 0$ řada ta diverguje. Budeme v dalším potřebovati asymptotické vyjádření součtu

$$G_k=1+\binom{-s}{1}^2+\binom{-s}{2}^2+\cdots+\binom{-s}{k}^2,$$

pro veliká k. Pišme

$$\binom{-s}{k}^2 = \frac{\Gamma(s+k)^2}{\Gamma(k+1)^2\,\Gamma(s)^2};$$

pomocí Stirlingovy formule zjistíme, že pro rostoucí k chová se poslední výraz jako $\frac{k^{2s-2}}{\Gamma(s)^2}$, jest tudíž

$$G_k \sim \frac{1}{\Gamma(s)^2} \cdot \sum_{n=1}^{n=k} n^{2s-2}.$$

Když $s = \frac{1}{2}$, jest $\lim \frac{G_k}{l\,k} = \pi$,[6]) $\quad k \to \infty$,

když $s > \frac{1}{2}$, jest $\lim \frac{G_k}{k^{2s-1}} = \frac{1}{(2s-1)\Gamma(s)^2}$ [7]), $k \to \infty$.

Vyšetřme ještě asymptotický výraz pro

$$F(s, s, 1\, x^a),\ x \to 1 - 0.$$

Vyšetřování lze provésti obecněji: Hypergeometrická řada

$$F(t) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\ 1 \cdot 2} t^2 + \dots$$

konverguje, když $0 \leqq \alpha + \beta - \gamma < 1$ a $|t| < 1$; je-li $\beta = 1$, diverguje.

Touž vlastnost má i řada

$$\zeta(-\alpha - \beta + \gamma + 1, t) = 1 + \frac{t}{1^{-\alpha-\beta+\gamma+1}} + \frac{t^2}{2^{-\alpha-s+\gamma+1}} + \dots \quad (5)$$

Poněvadž $\lim \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma\gamma}{\Gamma\alpha\,\Gamma s} \cdot = \frac{1}{n^{-\alpha-s+\gamma+1}} =$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \text{ pro } n \to \infty,$$

jest dle věty Césarovy[8])

$$\text{i} \lim \frac{F(t)}{\zeta(-\alpha-\beta+\gamma+1, t)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)},\ t \to 1 - 0.$$

Je-li $\alpha + \beta - \gamma = o$, jest

$$F(t) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)}\left(1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} + \dots\right) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, l \frac{1}{1-t}.$$

---

[6]) Laudau: Darstel und Begründung., pag. 23.
[7]) Stolz-Gmeiner: Einl. in die Funktionenth., pag. 387.
[8]) Pólya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze I, pag. 14. Lerch: Rozpravy Č. Ak. II. tř. III. roč., č. 28, pag. 3.

Specielně pro $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $t = k^2$ jest dáno asymptotické vyjádření úplného eliptického integrálu prvního druhu, když $k \to 1 - 0$; jest totiž [9])

$$\frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Když $\alpha + \beta - \gamma \geqq 1$, srovnejme hypergeometrickou řadu s binomickou řadou $(1 - t)^{-\alpha-\beta+\gamma}$: obě řady pro $|t| < 1$ konvergují a pro $t = 1$ divergují. Poněvadž

$$\lim \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} : \binom{-\alpha-\beta+\gamma}{n} =$$
$$= \frac{B(\gamma, \alpha+\beta-\gamma)}{B(\alpha, \beta)}.$$

Jest tedy v tomto případě:

$$\lim (1 - t)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, t) = \frac{B(\gamma, \alpha+\beta-\gamma)}{B(\alpha, \beta)}.$$

Je-li $\alpha + \beta - \gamma = 1$, lze užíti o koeficientech $F(\alpha, \beta, \gamma, t)$ věty Hardy-Littlewodeovy [10]): Pro veliká k jest

$$\frac{B(\alpha, \beta)}{B(\alpha+\beta-1, 1)} \sum_{n=0}^{n=k} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-1+n)\,\Gamma(n+1)} \cdot$$
$$\cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \backsim k$$

čili

$$\sum_{n=0}^{n=k} \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta-1+n)\,\Gamma(n+1)} \backsim k.$$

Ve tvaru $F(s, s, 1, t)$ jsou obsaženy některé důležité funkce: o $s = \frac{1}{2}$ byla již učiněna zmínka; pro $s = -\frac{1}{2}$ obdržíme úplný eliptický integrál druhého druhu. — Kvadratická transformace Kummerova v tomto případě zní

$$F(s, s, 1, x^2)\,(1 + x)^{2s} = F\left(s, \frac{1}{2}, 1, \frac{4x}{(1+x)^2}\right)$$

[9]) Na př. Petr: Diferenc. rovnice, pag. 211; Petr: Počet int., pag. 306.
[10]) Landau: Darstel. und Begr., pag. 50.

a odtud pro $s=\frac{1}{2}$ známá transformace Landenova. Poněkud obecněji jest

$$F(-m,-n,1,x)=1+\binom{m}{1}\binom{n}{1}x+\binom{m}{2}\binom{n}{2}x^2+\dots$$
$$=\text{R č.}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sqrt{x}\,e^{i\varphi})^m\,(1+\sqrt{x}\,e^{-i\varphi})^n\,d\varphi;$$

pokud $m+n+1>0$, řada konverguje pro $|x|\leqq 1$.

Specielně jest

$$F(m,n,1,1)=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{B(m,n)},$$
$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1\right)=4:\pi,$$
$$F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,1\right)=\sqrt{2}:\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-4^4}},$$
$$F(-m,m-1,1,1)=\sin\pi m:m(1-m),\ \text{atd.}$$

Nesnadnější jest stanovení součtu řady

$$1-\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}-\binom{m}{3}\binom{n}{3}=F(-m,-n,1,1),$$
$$m+n+2>0.$$

Parsevalova identita dává

$$F(-m,-n,1,-1)=\frac{2^{m+n+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left(\overline{m-n}+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^m\varphi\sin^n\varphi\,d\varphi,$$
$$m+1>0,\ n+1>0.$$

Integrál v pravo nelze as v zakončeném tvaru vyjádřiti; pro $m=n$ snadno odvodíme

$$F(-2m,-2m,1,-1)=\cos m\pi\,F(-m,-m,1,1).$$

4. Je-li s číslo celistvé záporné $=-n$, jest $F(s,s,1,x)=$ $=F(-n,-n,1,x)$ polynom stupně n-tého

$$F(-n,-1,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(1+2\sqrt{x}\cos\varphi+x)^n\,d\varphi=$$
$$=1+\binom{n}{1}^2x+\binom{n}{2}^2x^2+\dots\binom{n}{n}^2x^n.$$

Je-li x_1 kořenem rovnice $F(-n, -n, 1, x) = 0$, jest jím i $\frac{1}{x_1}$; substituce $x = \frac{z-1}{z+1}$ převádí takové rovnice v rovnice, jež mají-li kořen z_1, mají i kořen $-z_1$. V našem případě jest

$$F\left(-n, -n, 1, \frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{2n}{\pi (z+1)^n} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi =$$
$$= \frac{2^n}{(z+1)^n} X_n(z),$$

kdež $X_n(z)$ jest n-tý Legendreův polynom. Jest tedy

$$F(-n, -n, 1, x) = (1-x)^n X_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{11});$$

poněvadž

$$F(-n, -n, 1, x) = (1-x)^{2n+1} F(n+1, n+1, 1, x),$$

jest též

$$F(-n, -n, 1, x) = \frac{(1-x)^{2n+1}}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - 2\sqrt{x}\cos\varphi + x)^{n+1}}.$$

Z diferenciální rovnice pro $F(-n, -n, 1, x)$ a z okolnosti, že $F(-n, -n, 1, x)$ jest specielní případ tak zvaných Jacobiových polynomů definovaných vztahem

$$F(-n, \alpha+n, \gamma, x) =$$
$$= \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma-1)(\gamma+n-1)} \frac{d^n [x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}]}{dx^n}$$

— a to pro $\gamma = 1$, $\alpha = -2n$ — lze odvoditi podobné vztahy, které platí pro $X_n(x)$; zde budiž uvedena jen vytvořovací funkce

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2(1+x)r + (1+x)^2 r^2}} = \sum_{k=0}^{k=\infty} F(-k, -k, 1, x) \,.\, r^k,$$

$$F(-n, -n, 1, x) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sqrt[4]{\frac{1-x}{x}} (1-x)^n, \quad 0 < |x| < 1, \quad n \to \infty,$$

[11]) O Čebyševových polynomech $C_n(x)$ platí na př. tento vztah

$$(1-x)^n C_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 + \binom{2n}{2} x + \binom{2n}{4} x^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \binom{2n}{2n} x^n\right] = \frac{1}{2^n}\left[(1+\sqrt{x})^{2n} + (1-\sqrt{x})^{2n}\right].$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{F(-m,-m,1,x)}{(1-x)^{m+1}} \cdot \frac{F(-n,-n,1,x)}{(1-x)^{n+1}}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2n+1, & n = m; \end{cases}$$

tvoří tedy

$$\frac{\sqrt{2k+1}\, F(-k,-k,1,x)}{(1-x)^{k+1}},$$

ortogonální normovaný systém.[12])

5. Pro další potřebu nutno si Parsevalovu identitu přepsati do integrálu funkce komplexní proměnné: značme

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_m z^m; \quad \varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} b_m z^m,$$

pak

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} a_m b_m x^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} f(z)\, \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \frac{dz}{z},$$

při čemž integrál jest vzat v kladném směru po křivce neprobíhající žádným singulárním bodem funkce

$$f(z)\, \varphi\left(\frac{x}{z}\right) \frac{1}{z}.\text{[13])}$$

Pincherle[14]) poněkud obecněji klade:

$$f(z) = a_0 + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n z^n + \frac{a'_n}{z'_n}\right),$$

$$\varphi(z) = b_0 + \sum_{1}^{\infty} \left(b_n z^n + \frac{b'_n}{z'_n}\right).$$

---

[12]) Tohoto symetrického tvaru Leg. pol. a rovněž tvaru $\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{p}{q} \cos^2 \varphi + \frac{q}{p} \sin^2 \varphi\right)^n d\varphi = X_n \left[\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right)\right]$ bylo v literatuře užito zřídka: autorovi jest tvar $F(-n,-n,1,x)$ znám pouze z Hilbertovy práce v Crellově Journalu 103, pag. 342. — V témž ročníku jest jedna z prací Lerchových: byl by tento ročník a H-ova práce onou knihou a prací, o níž L. ve známé anketě Fehrově (pag. 39/40) píše: „Je me rappelle cependant un rêve très vif que j'ai trois fois, à des époques très différents et sous la même forme: je voyais un livre allemand où se trouvaient des théorèmes d'une beauté et d'une élégance suprême, concernant certaines intégrales analoques aux fonction sphériques. — J'attribue ce rêve à quelques impressions reçues et que le sommeil avait exagérées."

[13]) Hadamard: La sér. de Taylor. Scientia no 12, pag. 69.

[14]) Pincherle: Acta mathem. VII, p. 381.

$$a_0 b_0 + \sum_1^\infty \left(a_n b_n x^n + \frac{a' \, b'_n}{x^n}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)\,\varphi\left(\frac{x}{z}\right).\frac{dz}{z}.$$

* * *

Buďtež $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots, b_0, b_1, \ldots b_n, \ldots$ čísla komplexní a zaveďme tato označení:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,\\
f_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\\
\varphi(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,\\
\varphi_n(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n,\\
\sqrt{\varphi_n(x)} &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n + \beta'_n x^{n+1} \ldots\\
&= \gamma_n(x) + \beta'_n x^{n+1} + \ldots\\
\sqrt{(\varphi)\, x} &= \gamma_n(x) + \beta''_{n+1} x^{n+1} + \beta''_{n+2} x^{n+2} + \ldots
\end{aligned}$$

$f(x)$ budiž pro $|x| < 1$ regulérní a konečná,[15]) t. j. $|f(x)| \leqq 1$; $\varphi(x)$ nechť konverguje pro $|x| < 1$.

Pak jest

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(x)\,\varphi_n(x).\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_c f(x)\frac{P_n(x)^2}{x^{n+1}}\,dx,$$

neboť $b_n + b_{n-1} x + \ldots + b_0 x^n = x^n \varphi_n\left(\frac{1}{x}\right)$; C jest kružnice o středu (o, o) a poloměru $r < 1$. Dále máme

$$G_n = |a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0| \leqq \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{r^n}\int_0^{2\pi} |P_n(\nu e^{i\varphi})|\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi . r^n}\int_0^{2\pi} P_n(re^{i\varphi}).\bar{P}_n(r e^{-i\varphi})\,d\varphi,$$

při čemž značíme $\bar{P}_n(x)$ polynomu mající koeficienty komplexně sdružené s koeficienty polynom $P_n(x)$. Poněvadž levá strana rovnice nezávisí na r, nezávisí ani pravá a lze psáti

$$G_n \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(e^{i\varphi})\,\bar{P}_n(e^{-i\varphi})\,d\varphi = |\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_n|^2.$$

---

[15]) Landau: Darstel. und Begründung, pag. 7: beschränkt. Viz Petr: Počet dif. pag. 97.

Lze též říci, že G_n dosahuje nejvýše hodnoty součtu prvních $(n+1)$ koeficientů v mocninném rozvoji funkce definované integrálem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi(\sqrt{x}\,e^{i\varphi})\,\overline{\varphi}(\sqrt{x}\,e^{-i\varphi})}\,d\varphi.$$

Dokažme, že znaménko rovnosti ve výrazu pro G_n platí, když

$$f_n(x) = \varepsilon x^n \sqrt{\frac{\overline{\varphi}_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi_n(x)}} = 2x^n \frac{\overline{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)}{P_n(x)} = \varepsilon(b'_0 + b'_1(x) + \ldots + b'_n x^n + \ldots),$$

při čemž ve všech mnohočlenech v tomto vztahu se vyskytujících nutno podržeti jen $(n+1)$ prvních členů; $|\varepsilon| = 1$. Nutno především dokázati, že $f_n(x)$ jest pro $|x| < 1$ regulérní. Stačí předpokládati, že $\varphi_n(x)$ nemá uvnitř kruhu $(0, 0, 1)$ žádných nulových bodů. V oboru čísel reálných, poskytuje tu kriterium věta Kakeyova, pravící, že jest tomu tak, když

$$b_0 > b_1 > b_2 > \ldots > b_n > 0.$$

Funkce $f_n(x)$ jest i konečná: neboť pro $|x| = 1$ jest

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\varphi_n(e^{-i\varphi})}{\varphi_n(e^{i\varphi})}\right| = 1,$$

takže pro $|x| > 1$ jest

$$|f_n(x)| \leqq 1, \quad \text{c. b. d.}$$

Potom jest

$$a_0 b'_n + a_1 b'_{n-1} + \ldots + a_n b'_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c\equiv(0,0,r<1)} x^n \sqrt{\frac{\overline{\varphi}_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi_n(x)}} \cdot \frac{P^2_n(x)}{x^n} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$\frac{\varepsilon}{2\pi i}\int_c \overline{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) P_n(x)\frac{dx}{x} = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P}_n\left(\frac{1}{r\,e^{i\varphi}}\right) P_n(r\,e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Levá strana opět nezávisí na r, tudíž ani pravá a jest

$$a_0 b'_n + a_1 b'_{n-1} + \ldots a_n b'_0 = (\beta_0 \overline{\beta}_0 + \beta_1 \overline{\beta}_1 + \ldots \beta_n \overline{\beta}_n),$$

čili

$$|a_0 b'_n + a_1 b'_{n-1} + \ldots + a_n b'_0| = |\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 + \ldots + |\beta_n|^2.$$

6. Z posloupností $b_0, b_1, b_2, \ldots$ byly již některé studovány: velmi obecný případ jest

$$b_k = (-1)^k \binom{-s}{k}, \quad \varphi(x) = (1-x)^{-s}$$

Zde $$G_n = \left|\binom{-s}{1}a_n - \binom{-s}{0}a_{n-1} + \ldots \pm \binom{-s}{n}a_0\right|$$

jest nanejvýš rovno součtu $(n+1)$ prvních koeficientů mocninného rozvoje funkce

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{|1-\sqrt{x}e^{i\varphi}|^s} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1-2\sqrt{x}\cos\varphi + x)^{\frac{s}{2}}} = F\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}, 1, x\right);$$

tedy $$G_n \leqq \sum_0^n \binom{-\frac{s}{2}}{k}^2.$$

Je-li $s = 1$, jest[16])

$$G_n = |a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \leqq \sum_0^n \binom{-\frac{1}{2}}{k} \backsim \frac{ln}{\pi},$$

je-li $s = 2$, jest[17])

$$|(n+1)a_0 + na_1 + \ldots \quad + a_n| = |s_0 + s_1 + s_2 + \ldots \quad + s_n| \leqq n+1,$$

při čemž $$s_k = a_0 + a_1 + \ldots a_k.$$

Výrazy $$v = \left|\binom{-s}{0}a_n - \binom{-s}{1}a_{n-1} + \ldots \pm \binom{-s}{n}a_0\right|$$

úzce souvisí[18]) s Cesarovým součtem $\overset{(s-1)}{S_n}$ $(s-1)^{\text{ho}}$ řádu posloupnosti $s_0, s_1, \ldots s_n$; a sice jest

$$|S_n^{s-1}| = \frac{\Gamma(s)}{n^{s-1}}\cdot v \leqq \frac{\Gamma(s)}{n^{s-1}}\sum_{k=0}^{k=n}\binom{-\frac{s}{2}}{k}^2;$$

použijeme-li výsledků odstavce ... 3), máme pro $s > \frac{1}{2}$

$$|S_n^{(s-1)}| < \frac{1}{(s-1)B\left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}\right)}. -$$

$b_0, b_1, b_2, \ldots$ mohou býti funkce jedné proměnné; uvažujme na př. rozvoj

---

[16]) Landau: Darstel. und Begr., pag. 20.

[17]) Fejér: Rendiconti di Pal. 1914, XXXVIII, pag. —.

[18]) Viz na př. Rychlík: Časop. 1917, XLVI, pag. 314. Szász: Mathem. Zeitschrift, 1918, pag. 174.

$$\frac{1}{[1-2(1+x)\,r+r^2(1-x)^2]^s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu^{(s)}(x)\,.\,r^\nu$$

kdež $F(x)$ jsou polynomy v x stupně ν.
Zde jest:

$$|\ a_0 F_n^{(s)}(x) + a_1 F_{n-1}^{(s)}(x) + \ldots \qquad + a_n F_0^{(s)}(x)\,| \leqq \sum_{\nu=0}^{\nu=n} F_\nu^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}(x).$$

Abychom odhadli výraz v pravo pro $x \leqq 0$, položme $x = -\operatorname{tg}^2 \varphi$; poněvadž

$$1-2(1+x)\,r+r^2(1-x)^2 = (1-r\cos^2\varphi\, e^{2i\varphi})\,.\,(1-r\cos^2\varphi\, e^{-2i\varphi}),$$

jest $F_\nu^{(s)}(x)$ koeficient ν-té mocniny v součinu

$$(1-r\cos^2\varphi\, e^{2i\varphi})^s\,(1-r\cos^2\varphi\, e^{-2i\varphi})^s\,,$$

takže

$$F_\nu^{(s)}(-\operatorname{tg}^2\varphi) = (-1)^\nu \cos^{2\nu}\varphi \left[\binom{-s}{\nu} e^{2\nu\varphi i} + \right.$$

$$\left. + \binom{-s}{\nu-1}\binom{-s}{1} e^{2(\nu-1)\varphi i} + \ldots + \binom{-s}{\nu} e^{-2\nu\varphi i}\right].$$

Pro $s > 0$ jsou členy v závorce téhož znamení, jest tedy

$$|F_\nu^{(s)}(-\operatorname{tg}^2\varphi)| \leqq \left|\binom{-s}{\nu} + \binom{-s}{\nu-1}\binom{-s}{1} + \ldots \qquad + \binom{-s}{\nu}\right| = |F_\nu^{(s)}(0)|.$$

Poněvadž

$$\frac{1}{(1-2r+r^2)^s} = \frac{1}{(1-r)^{2s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu^{(s)}(0)\, r^\nu,$$

jest
$$F_\nu^{(s)}(0) = (-1)^\nu \binom{-2s}{\nu},$$

takže pro $x < 0$ máme

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} F_\nu^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}(x) \leqq \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \cos^{2\nu}\varphi \binom{-s}{\nu}^2 \leqq \sum_{\nu=0}^{\nu=n} \binom{-s}{\nu}^2.$$

Znaménko rovnosti platí jen pro $x = \varphi = 0$. Tak jsme zároveň rozhodli o konvergenci resp. divergenci a asymptotickém vyjádření řady

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} F_\nu^{\left(\frac{s}{2}\right)^2}(x), \qquad x \leqq 0.$$

Pro $s = 1$ jest na př.

$$\lim \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=n} F^2(-\nu, -\nu, 1, x)\right] : n^{1+\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0, \ x \leqq 0, \ n \to \infty.$$ [19])

Stanovme ještě horní mez výrazu

$$G'_n = |b_0 a_{\nu+np} + b_1 a_{\nu+np-p} + \dots + b_n a_\nu|$$

uvážíce, že

$$b_0 a_{\nu+np} + b_1 a_{\nu+np-p} + \dots \quad + b_n a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(x)\, \varphi_n(x^p)}{x^{np+\nu+1}} dx.$$

Postupem týmž jako dříve obdržíme, že G'_n jest nejvýše rovno součtu prvních $(n+1)$ koeficientů rozvoje

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi(\sqrt{x}\, e^{pi\varphi})|\, d\varphi,$$

čili, že jest $$G'_n = G_n.$$

7. Naskytá se otázka po horní mezi g_n výrazu

$$|a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots \quad + a_n b_n|.$$

Zde jest

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots \quad a_n b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\, \varphi_n\left(\frac{x}{z}\right) \cdot \frac{dz}{z}$$

a známými obraty

$$g_n = |a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots \quad + a_n b_n| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi_n(e^{i\varphi})|\, d\varphi =$$

$$= |\beta_0|^2 + |\beta_1|^2 + \dots \quad + |\beta_n|^2 + |\beta'_{n+1}|^2 + |\beta'_{n+2}|^2 + \dots,$$

jest tedy $g_n > G_n$. — Zde však není možno obecně stanoviti funkci $\varphi(z)$, pro kterou by bylo v platnosti znaménko rovnosti; g_n jest pro množství konečných funkcí horní mezí výrazů $|a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots$ $\dots + a_n b_n|$ a nemusí býti maximem, jak tomu jest při G_n. O tom nás přesvědčí jednoduchý příklad $b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_n = \dots = 1$.

Tento příklad jest i jinak zajímavý; zde jest

$$g_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|1 - e^{-\frac{n+1}{2} i\varphi}\right|}{\left|1 - e^{\frac{i\varphi}{2}}\right|} d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(n+1)\varphi|}{\sin\varphi} d\varphi.$$

---

[19]) Pro polynomy Laguerrovy platí podobná věta: Wiarda Crelle 1924; 153, pag. 48.

Pišme tu $2n$ místo n; pak integrál v pravo jest $n$tá Lebesgueova konstanta ϱ_n, pro niž Szegö[20]) odvodil vztah

$$\varrho_n = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2\nu(2n+1) - 1}}{4\nu^2 - 1},$$

Poněvadž

$$\varrho_{n+1} - \varrho_n =$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4n\nu + 2\nu + 1} + \frac{1}{4n\nu + 2\nu + 3} + \ldots + \frac{1}{4n\nu + 6\nu - 1}}{4\nu^2 - 1} <$$

$$< \frac{16}{\pi^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{2\nu \cdot \frac{1}{4n\nu + 2\nu}}{4\nu^2 - 1} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\nu - 1} - \frac{1}{2\nu + 1} \right) =$$

$$= \frac{8}{(2n+1)\pi^2},$$

jest

$$\varrho_n < \varrho_{n-1} + \frac{8}{(2n-1)\pi^2}.$$

Napišme tuto rovnici pro $n = 1, 2, \ldots n$ a sečtěme:

$$\varrho_n < 1 + \frac{8}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right);$$

na druhé straně jest $G_{2n} < \varrho_n$,

$$G_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{-\frac{1}{2}}{k}^2,$$

takže pro veliká n jest

$$\frac{1}{\pi} l\, 2_n < \varrho_n < 1 + \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} l\,(2n - 1),$$

čili

$$1 < \frac{\pi \varrho_n}{l\, 2n} < \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{l 2n} = 1{\cdot}273 \ldots + \frac{\pi}{l 2n}.$$ [21])

[20]) Math. Zeitschrift IX, 1921, pag. 165.

[21]) Jiný odhad viz Fejér: Crelle 138; 1910, pag. 30. Gronwall: Math. Annal. 72; 1912, pag. 248.

Proti námitce, proč v tomto odstavci nebylo $\varphi_n(x)$ nahraženo $P_n^2(x)$ jako v odstavci 5., lze uvésti toto: jmenovatel integrované funkce v odstavci 5. x^{n+1} způsobuje, že $\varphi_n(x)$ lze nahraditi polynomem vyššího stupně než n, jen když má s $\varphi_n(x)$ $(n+1)$ prvních koeficientů společných; jmenovatel integrované funkce v tomto odstavci však vyžaduje, aby $\varphi_n(x)$ byla pouze stupně n.

Tento rozdíl mizí, je-li $f(x)$ pouze polynomem stupně ntého pak i při výpočtu g_n lze nahraditi $\varphi_n(x)$ polynomem $P_n(x)$ a jest

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(x)\,.\,P_n^2\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}=a_0\,b_0+a_1\,b_1\,z+\cdots+a_n\,b_n\,z^n,$$

$$g_n\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^2(e^{-i\varphi})|\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_n(\sqrt{x}\,e^{i\varphi})|\,d\varphi;$$

tedy — jako dříve — $g_n=$ součet $(n+1)$ prvních koeficientů rozvoje dle x

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\sqrt{x}\,e^{i\varphi})|\,d\varphi,\ \text{čili}\ g_n=G_n;$$

opět předpokládáme $|f(x)|\leqq 1$ pro $(x)\leqq 1$.

Volme na př. $\varphi(x)=0+0\,.\,x+0\,.\,x^2+\ldots 0\,.\,x^{s-1}+$ $+s!\,x^s(1-zx)^{-s-1}$; potom

$$s!\,a_s\,z^s+\frac{(s+1)!}{1!}a_{s+1}\,z^{s+1}+\cdots+\frac{n!}{(n-s)!}a_n\,z=$$

$$=z^s f^{(s)}(z)=s!\int_c f(x)\frac{z^s}{x^s}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{-s-1}.\frac{dx}{x};$$

jest tudíž $|f^{(s)}(z)|$ nanejvýš rovno součtu $(n+1)$ prvních koeficientů rozvoje v x

$$\frac{s!}{2\pi}\int_0^{2\pi}|(\sqrt{x}\,e^{i\varphi})^s(1-z\sqrt{x}\,e^{i\varphi})^{-s-1}|\,d\varphi=$$

$$=\frac{s!}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^s(1-\bar{z}\sqrt{x}\,e^{i\varphi})^{-s-1}(1-z\sqrt{x}\,e^{-i\varphi})^{-s-1}\,d\varphi=$$

$$=s!\,x^s\left(1+\binom{-\frac{s-1}{2}}{1}^2 z\,.\,\bar{z}\,x+\binom{-\frac{s-1}{2}}{2}^2 z^2\,\bar{z}^2\,x^2+\ldots\right)=$$

$$=s!\,x^s\,F\left(\frac{s+1}{2};\frac{s+1}{2},\ 1,\ |z|^2\,.\,x\right),$$

čili $|f^{(s)}(z)|$ jest nanejvýš rovno součtu $(n-s+1)$ prvních členů

řady $$s!F\left(\frac{s+1}{2}, \frac{s+1}{2}, 1, |z|^2\right).$$ [22]

Když $s=1$, $|z|=1$, dostaneme známou větu Rieszovu o maximu absolutní hodnoty první derivace trigonometrického polynomu:

$$|f'(e^{i\varphi})| \leqq n.$$ [23]

Sur une identité de Parseval et son application à la théorie des fonction continues.

(Extrait de l'article précédent.)

I. Les fonctions $f(x)$, $F(x)$ étant données, respectivement, par les séries $\sum\limits_0^\infty a_m x^m$ et $\sum\limits_0^\infty b_m x^m$, désignons par $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ et par $\beta_1\ \beta_2, \ldots$ leurs points singuliers. D'après un théorème de M. Hadamard, les points singuliers de la fonction $\varphi(x) = \sum\limits_0^\infty a_m b_m x^m$ ne peuvent être que $\alpha_k \beta_l$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$.

Si x est un point ordinaire de la fonction $\varphi(x)$, on a, d'après une identité de Parseval

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sqrt{x}\, e^{i\vartheta})\, f(\sqrt{x} e^{-i\vartheta})\, d\vartheta,$$

pourvu que cette intégrale existe. On peut appliquer cette formule au calcul des valeurs de plusieurs intégrales et de quelques limites. — Les résultats respectifs sont donnés:

1. par les formules (2), (2*) (3), où F désigne la série hypergéometrique, n, a des entiers positifs, $\frac{n}{a}$ une fraction.

2. Formules (4), (4*) où n, a, $\frac{n}{a}$ sont des entiers positifs.

3. Formule (4) où n, a, $\frac{n}{a}$ sont des entiers positifs.

4. Posons

$$G_x = l + \binom{-s}{1}^2 + \ldots + \binom{-s}{k}^2$$

---

[22]) Jiný odhad v případě $s=1$ pomocí maxima absolutní hodnoty $f(z)$ v intervalu $-1 \ldots 1$ viz Riesz: Acta math. XL., 1916, pag. 337.

[23]) Riesz f. d. M. Ver. 1914, XXIII., pag. 354. — Viz též Časopis 1925, LIV, pag. 9.

on a $\lim \frac{G_k}{l_k} = \pi$ pour $s = \frac{1}{2}$, $k \to \infty$; $\lim \frac{G_k}{k_k} = \frac{1}{2s-1}\, \Gamma(s)^2$ pour $s > \frac{1}{2}$, $k \to \infty$.

5. Pour $t \to 1 - 0$ on trouve

$$\lim \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, t)}{\zeta(-\alpha-\beta-\gamma+1)} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}, \quad 0 \leqq \alpha+\beta-\gamma < 1$$

$$\lim \frac{F(\alpha, \beta, \gamma, t)}{l(1-t)} = -\frac{1}{B(\alpha, \beta)} \quad \alpha+\beta-\gamma = 0;$$

$$\lim\, (1-t)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, t) = \frac{B(\gamma, \alpha+\beta-\gamma)}{B(\alpha, \beta)}, \quad \alpha+\beta-\gamma \geqq 1$$

ζ désignant la série (5).

6. n étant entier, considérons le polynôme

$$F(-n, -n, l, x) = l + \binom{n}{1}^2 x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 x^n;$$

$X_1, X_2, \ldots$ étant des polynômes de Legendre, on trouve

$$F(-n, -n, l, x) = (l-x)^n X_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

II. Soit C une courbe fermée, entourant le point O; on peut mettre l'identité de Parseval sous la forme

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m\, b_m\, z^m = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, \varphi\left(\frac{x}{z}\right) dz$$

et appliquer cette formule à généraliser quelques résultats de M. Landau (Darstelung und Begrüdung, p. 7). Posons

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^x$; $|f(x)| \leqq 1, |x| < 1$; $\varphi(x) = \sum_{x=0}^{\infty} b_k x^x$, $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^x$ $\sqrt{\varphi_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^x + \beta'_{k+1} x^{k+1} + \ldots$; on trouve

$$G_n = |a_0 b_n + \ldots + a_n b_0| \leqq |\beta^2{}_0| + |\beta^2{}_1| + \ldots + |\beta^2{}_n|$$

G_n ne surpasse pas en valeur la somme des $(n+1)$ coëfficients dans le développement suivant les puissances croissantes de x de la fonction $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(\sqrt{x} e^{i\varphi})|\, d\varphi$.

8. Applications. Posons $b_k = (-1)^k \binom{-s}{k}$. — La limite supérieure de l'expresion $|b_0 a_{\gamma+np} + b_1 a_{\gamma+np-p} + \ldots + b_n a_\gamma|$ est G_n.

9. Posons

$$g_n = |a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n|;$$

on a

$$g_n \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\varphi_n(e^{i\varphi})| \, d\varphi \qquad g_n > G_n.$$

A l'aide de cette inégalité on trouve

$$1 < \frac{\pi \varrho_n}{l 2n} < 1{\cdot}273 + \frac{\pi}{ln}.$$

$\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ étant les constantes de Lebesgue.