Bedřich Procházka

Příspěvek ku sestrojení středu zakřivení trochoid. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 4, 236--240

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121053`

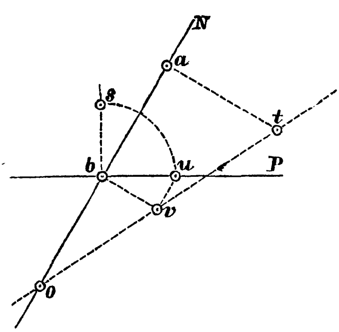
Příspěvek ku sestrojení středu zakřivení trochoid.

Napsal

Bedřich Procházka,
professor v Karlíně.

V 1. čísle letošního ročníku tohoto časopisu uvádí pan professor *Eduard Weyr* jednoduchou konstrukci středu zakřivení trochoid. Používám této příležitosti, abych poukázal ku jiné konstrukci, která taktéž vychází z výtvarného zákona trochoidy, máme-li zření ku velikosti a směru rychlosti, s jakou se body pohybují.

Vyjděme od trochoidy vytvořené kotálením *křivky K po přímce P* (obr. 1.).



Obr. 1.

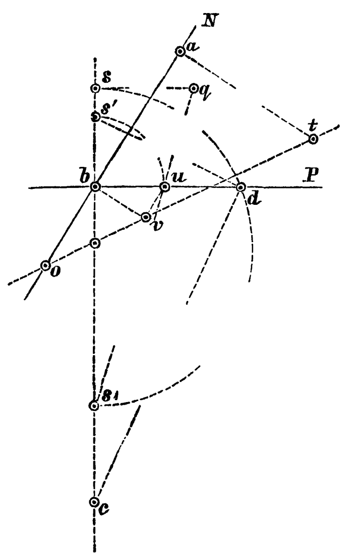
Nechť se křivka K dotýká přímky P v bodě b, jemuž přísluší střed zakřivení s. Bod vytvořující trochoidu V jest a, a přímka ab její normalou N. Zvolíme-li stálou rychlost, s jakou se křivka K v tomto okamžiku otáčí, za jednotku, pak nám vyjadřuje délka $at \perp ab = m$ úhlovou rychlost bodu a.

Zároveň postoupí při kotálení dotýčný bod křivky K, jakožto průsek normaly N s přímkou P v přímce této s rychlostí, která závisla jest na poloměru křivosti $r = sb$ křivky K.

Jelikož jsme předpokládali, že otáčení se děje s rychlostí rovnou jednotce, bude rychlost postupná onoho bodu dotyčného vyjádřena délkou bu rovnou poloměru křivosti r křivky kruhové. Bod b normaly N (který si myslíme v neproměnné vzdálenosti od bodu a), pohybuje se v kolmici k ní s rychlostí bv, kterou obdržíme, když bodem u sestrojíme stejnoměrku $uv \parallel N$.

Normala N pohybuje se tedy tak, že bod její a se otáčí s rychlostí at, a bod b s rychlostí bv. Jistý bod její bude míti rychlost rovnou nulle, bude tudíž bodem zakřivení O, kterýž obdržíme v průseku přímky tv s normalou N.

Mějme nyní na zřeteli případ obecný, že se kotálí křivka K po jiné křivce K_1, jejichž bodu dotyku v jistém okamžiku



Obr. 2.

přísluší poloměry zakřivení r a r_1. Pak jest pro tento okamžik výsledek týž, jako kdyby se kotálela po přímce P (obr. 2.) křivka K' o poloměru r', jejíž křivost by se rovnala součtu křivostí obou prvých křivek t. j.

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1},$$

z kteréž rovnice plyne pro poloměr křivosti r' výraz

$$r' = \frac{r \cdot r_1}{r + r_1},$$

na jehož základě lze poloměr ten takto konstruovati.

Sestrojivše nad délkou ss_1 (s_1 jest střed zakřivení křivky K_1) polokružnici, učiníme $s_1 c = sb = r$. (Obr. 2.) Kolmice sestrojená v bodě průsečném d oné kružnice s přímkou P ke přímce cd, protíná přímku sb v hledaném středu zakřivení s' křivky K', neboť z konstrukce této patrno, že $s'b = \frac{rr_1}{r + r_1}$ *).

Na základě tohoto poloměru r', pokračujíce cestou dříve naznačenou, dospějeme ku středu zakřivení O trochoidy vytvořené libovolným bodem a. Zavedouce opět totéž označení jako dříve ($ab = at = m$, $bu = r'$) a kladouce úhel $abu = \alpha$ a poloměr zakřivení trochoidy $oa = \varrho$, obdržíme

$$bv = bu \sin \alpha = s'b \sin \alpha = \frac{rr_1}{r + r_1} \sin \alpha.$$

Z podobnosti trojúhelníků: $\triangle oat$ a $\triangle obv$ plyne úměra

$$oa : ob = at : bv$$

čili

$$\varrho : (\varrho - m) = m : \frac{rr_1}{r + r_1} \sin \alpha.$$

Rozřešivše tuto úměru přijdeme konečně k formuli

$$\frac{m}{\varrho} = 1 - \frac{\sin \alpha}{m} \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}}$$

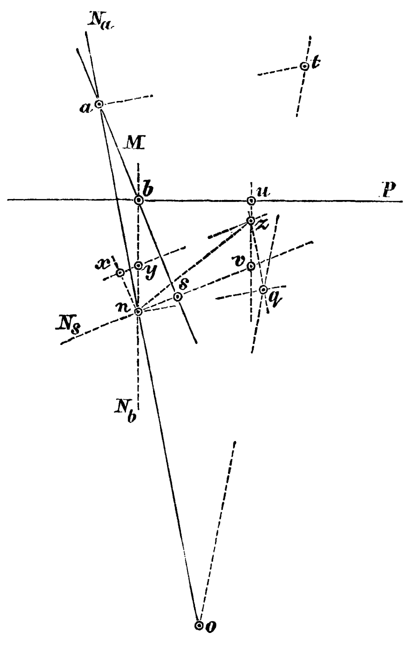
---

*) Délku $bu = s'b$ můžeme také sestrojiti dle téhož vzorce takto: V bodě s sestrojíme $sq \perp sb$; přímka bod q s bodem s_1 spojující, protíná přímku P v bodě u (obr. 2.).

ku které pan professor *Eduard Weyr* ve zmíněném pojednání taktéž dospěl.

Tohoto způsobu určení středu zakřivení lze užiti s prospěchem ve všech případech, kdy můžeme určiti rychlost pohybu dvou bodů příslušné normaly. Tak jest to možno ku př. při *konchoidách.*

Mějme na zřeteli ku př. *konchoidu Nicomedovu* (obr. 3.). Je-li P přímkou řídící a s polem konchoidy Nicomedovy K, pak sestrojíme normalu N a v libovolném jejím bodě a, na paprsku



Obr. 3.

M ležícím, spojíme-li tento bod s okamžitým středem otáčení n, který obdržíme jakožto průsek kolmic $bn \perp P$ a $sn \perp M$. Předpokládejme, že otočení děje se kolem středu n se stálou rychlostí úhlovou rovnou jednotce. Pak bod a pohybuje se rychlostí $at \perp an$ a bod b, v kterém paprsek M přímku P protíná, s rychlostí $bu \perp bn$. Když při otáčení paprsku M kol bodu s, bod a vytvořuje konchoidu K, pohybuje se zároveň průsek n kolmic $N_b \equiv bn$ a $N_s \equiv sn$ v jistém směru a s jistou rychlostí. Abychom stanovili tuto rychlost a její směr, určíme si rychlost, s jakou se pohybuje průsek n v jedné i druhé přímce (N_b, N_s). Výslednice těchto rychlostí bude nám udávati pohyb průseku n co do směru i co do rychlosti.*)

Rychlost průseku n v kolmici N_s obdržíme takto: Průsek b paprsku M s přímkou P pohybuje se (jak jsme nahoře poznali) s rychlostí $bu \perp bn$ a proto kolmice N_b se s touže rychlostí pohybujíc, určuje v přímce N_s rychlost nv, s jakou se průsek n v přímce této pohybuje. Podobně určíme rychlost průseku n v kolmici N_b. Jelikož se otáčení děje s rychlostí rovnou jednotce, bude rychlost bodu toho $nx \perp ns$, a rychlost jeho ny v přímce N_b obdržíme vedouce xy stejnoměrně s N_s. Úhlopříčna nz v rovnoběžníku rychlostí $nvzy$ sestrojená, udává nám směr i rychlost, s jakou se okamžitý střed otáčení n pohybuje. Rychlost bodu tohoto n ve směru $nq \perp N$ obdržíme, jest-li bodem z vedeme rovnoběžku ku normale N_a.

Normala N_a pohybuje se tedy tak, že bod a se otáčí s rychlostí at a bod n s rychlostí nq a proto střed zakřivení o obdržíme jako průsek přímky tq s normalou N_a.

---

*) „*Lehrbuch der Kinematik*" von Dr. L. Burmester, I. Band. 1888. Pag. 61, 67.