Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 23 (1894), No. 4, 258--272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121050

přistupuje ještě ta, že diamantové hroty stále se ulamují. Z té příčiny prof. Rowland zhotovil pouze 3 skleněné mříže . . . Dvou užil Dr. Bell k určení absolutní délky vlny čar D".

Řešení úloh.

Úloha 17.

Sestrojiti rovnoramenný lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou kolmé k ramenům, dána-li jeho střední příčka a výška.

Řešení.

(Zaslala slč. *Marie Šmelíkova*, chov. II. roč. učit. ústavu v Olomouci).

Vedeme-li v lichoběžníku $abcd$ výšku $v = ck \perp ab$, a je-li

$\overline{ak} = m$, $\overline{bk} = n$, jest $\overline{ab} = m + n$, $\overline{cd} = m - n$,

tedy
$$m = \frac{ab + cd}{2}$$

rovná se dané střední příčce p lichoběžníka. Učiňme tedy

$$\overline{ak} = p, \quad kc \perp ab, \quad kc = v, \quad cb \perp ac;$$

body a, b, c jsou 3 vrcholy žádaného lichoběžníka.

Úloha 18.

V trojúhelníku, jehož vrcholy jsou

$$a(2, 5), \quad b(8, 1), \quad c(6, 7)$$

ustanoviti bod m tak, aby

$$\triangle abm : \triangle bcm : \triangle cam = 3 : 4 : 5 .$$

Řešení.

(Zaslal p. *Tobiáš Kudela*, stud. VII. tř. g. v Opavě.)

Jsou-li x, y souřadnice bodu m, jest

$$\triangle\, abm = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 2x + 3y - 19$$

$$\triangle\, bcm = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = -3x - y + 25$$

$$\triangle\, cam = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + 8.$$

Dle úlohy má býti

$$(2x + 3y - 19) : (-3x - y + 25) : (x - 2y + 8) = 3 : 4 : 5;$$

odtud vypočítáme souřadnice $x = 5\frac{1}{2}$, $y = 3\frac{5}{6}$ náležející bodu m jakožto průsečíku přímek

$$\overline{am} \equiv x + 3y - 17 = 0,$$
$$\overline{bm} \equiv 17x + 15y - 151 = 0,$$
$$\overline{cm} \equiv 19x - 3y - 93 = 0.$$

Úloha 19.

Vyšetřiti geom. místo bodu, jehož vzdálenost od přímky

$$A \equiv x + y - 2 = 0$$

jest střední měř. úměrnou vzdáleností jeho od přímek

$$B \equiv x - 3y + 10 = 0, \quad C \equiv 3x - y - 10 = 0.$$

V které poloze jsou dané přímky ku hledanému místu geometrickému?

Řešení.

(Zaslal p. *Vinc. Sura*, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové.)

Libovolný bod hledaného geom. místa budiž $m(x, y)$. Vzdálenosti jeho od daných přímek jsou, nehledíme-li ku znaménku jich,

$$v_1 = \frac{x + y - 2}{\sqrt{2}}, \quad v_2 = \frac{x - 3y + 10}{\sqrt{10}}, \quad v_3 = \frac{3x - y - 10}{\sqrt{10}}.$$

Dle podmínky má býti

$$v_1^2 = \mp v_2 v_3.$$

a) Při hořejším znaménku obdržíme po náležité úpravě rovnici

$$x^2 + y^2 = 10,$$

kteráž značí kružnici poloměru $r = \sqrt{10}$ a mající střed v počátku.

Přímka A protíná tuto kružnici v bodech $(-1, 3)$, $(3, -1)$, ve kterých jsou přímky B, C tečnami.

b) Při spodním znaménku vyjde rovnice

$$x^2 + 10xy + y^2 - 20x - 20y + 60 = 0.$$

Přeložíme-li počátek do bodu $s\left(1\frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}\right)$ a otočíme-li soustavu o úhel -45^0, nabude rovnice tvaru

$$6x^2 - 9y^2 = 40,$$

z něhož zřejmo, že značí hyperbolu. Jako v případě *a*) jest přímka A polárou průšečíku přímek B, C.

Úloha 20.

Ke kružnici $x^2 + y^2 - 20x - 10y + 100 = 0$ vedeny počátkem tečny. Stanoviti kružnici, která se dotýká kružnice dané i obou těchto tečen.

Řešení.

(Zaslal p. *Alois Greipel*, stud. VII. tř. r. v Prostějově.)

K dané kružnici procházejí počátkem dvě tečny, totiž

$$T_1 \equiv y = 0, \qquad T_2 \equiv y - \frac{4}{3}x = 0.$$

Střed kružnice hledané $s(x, y)$ bude ležeti na spojnici počátku se středem (10, 5) kružnice dané; souřadnice jeho vyhoví proto rovnici

$$y = \frac{1}{2}x,$$

Poloměr r kružnice hledané bude $r = y$; má-li se kružnice ta dotýkati kružnice dané, jejíž poloměr jest 5, nutno učiniti zadost podmínce

$$(x-10)^2+(y-5)^2=(r+5)^2,$$

která užitím obou předcházejících nabývá podoby

$$r+5=\pm(r-5)\sqrt{5}.$$

Odtud ustanovíme $\quad r_{1,2}=\frac{5}{2}(3\pm\sqrt{5})$

jakožto poloměry dvou kružnic úloze vyhovujících.

Úloha 21.

K logarithmování upraviti výraz

$$(a)\qquad \sin\alpha+\frac{(1-\cos\alpha)\left(\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$(b)\qquad \sin\alpha-\frac{(1+\cos\alpha)\left(\cos\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Petr Krupař*, stud. VII. tř. g. v Jičíně.)

a) První z výrazů daných, A, přetvoříme užitím vzorců

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4},$$

$$\cos\alpha-\cos\frac{\alpha}{2}=-2\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4},$$

na tvar tento

$$A=\sin\alpha-\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{4}}{\sin\frac{3\alpha}{4}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{3\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{3\alpha}{4}},$$

z čehož vyplývá

$$A = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{3\alpha}{4}},$$

b) Podobně upravíme druhý výraz, B, hledíce ku vzorci

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Jestiť

$$B = \sin \alpha + \frac{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{4}}{\cos \frac{3\alpha}{4}}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{4}\right)}{\cos \frac{3\alpha}{4}},$$

a proto

$$B = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{4}}{\cos \frac{3\alpha}{4}}.$$

Úloha 22.

Rozdíl čtverců kterýchkoli dvou čísel trojúhelníkových 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... rovná se součtu trojmocí vycházejících z rozdílů jednotlivých po sobě jdoucích mezičlenů, na př. $36^2 - 10^2 = 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$. Podati obecný důkaz.

Řešení.

(Zaslal p. *Aug. Haas*, stud. VIII. tř. č. g. v Opavě.)

Obecný tvar čísla trojúhelníkového jest

$$a_n = (n + 1)_2,$$

rozdíl čtverců dvou takých čísel

$$a_n^2 - a_m^2 = (n + 1)_2^2 - (m + 1)_2^2,$$

kde $n > m$. Rozdíly mezičlenů pro tato místa jsou

$$m+1,\quad m+2,\quad m+3,\quad \ldots,\quad n$$

a součet jich trojmocí

$$S = (m+1)^3 + (m+2)^3 + \ldots + n^3.$$

Jelikož součet trojmocí čísel přirozené řady

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = (k+1)_2^2,$$

jest $\qquad S = (n+1)_2^2 - (m+1)_2^2,$

tudíž $\qquad a_n^2 - a_m^2 = S,$

což bylo dokázati.

Úloha 23.

Kterak lze ku každému celému číslu rychle udati dvě jiná čísla tak, aby čtverec jednoho z nich rovnal se součtu čtverců obou ostatních?

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Hýbl,* stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

a) Je-li dané číslo a liché, zdvojmocněme je a rozložme dvojmoc ve dva sčítance o 1 rozdílné; pak a^2 rovná se rozdílu dvojmocí obou těchto čísel

$$x + y = a^2. \qquad x - y = 1,$$

$$\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = a^2.$$

b) Je-li dané číslo a sudé, rozložme poloviční jeho dvojmoc ve dvě čísla o 2 rozdílná; tato úloze vyhovují.

$$x + y = \frac{a^2}{2}, \qquad x - y = 2, \qquad \left(\frac{a^2+4}{4}\right)^2 - \left(\frac{a^2-4}{4}\right) = a^2,$$

Úloha 24.

Řešiti soustavu rovnic

$$\sqrt{\frac{x+y}{2a}} - \sqrt{\frac{x-y}{2b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{2b}} + \sqrt{\frac{x-y}{2a}} = \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}$$

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Ševčík*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Daným rovnicím dáme nejprve podobu

$$\sqrt{b(x+y)} - \sqrt{a(x-y)} = (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})\sqrt{2},$$
$$\sqrt{a(x+y)} + \sqrt{b(x-y)} = (a\sqrt{a} + b\sqrt{b})\sqrt{2};$$

snadnou eliminací obdržíme

$$\sqrt{x+y} = a\sqrt{2}, \qquad \sqrt{x-y} = b\sqrt{2}$$

a odtud

$$x = a^2 + b^2, \qquad y = a^2 - b^2.$$

Úloha 25.

Řešiti soustavu rovnic

$$x(2x^2+3) + y(2y^2+3) = 287$$
$$x(3x^2-2) + y(3y^2-2) = 385.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Adolf Ottis*, stud. VI. tř. g. v Plzni.)

Uspořádejme dané rovnice takto:

$$2(x^3+y^3) + 3(x+y) = 287$$
$$3(x^3+y^3) - 2(x+y) = 385$$

a položme

$$x + y = u, \qquad x^3 + y^3 = v.$$

Tím obdržíme

$$2v + 3u = 287$$
$$3v - 2u = 385,$$

odkud vypočítáme

$$u = 7, \qquad v = 133.$$

Daná úloha převedena tudíž na řešení soustavy

$$x + y = 7, \qquad x^3 + y^3 = 133;$$

známým spůsobem najdeme

$$x = 2,\ 5;$$
$$y = 5,\ 2.$$

Úloha 26.

Které úhly v mezích od 0 do 360^0 vyhovují rovnici

$$\sin x + 2 \sin 2 x + \sin 3 x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Köhler*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích.)

Položme dle známých vzorců

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x,$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x;$$

tím přejde rovnice daná v tuto:

$$2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = 1 + \cos x$$

čili

$$(1 + \cos x)(2 \sin 2x - 1) = 0.$$

Jest tedy buď

$$1 + \cos x = 0, \qquad x_1 = 180^0$$

aneb

$$2 \sin 2x - 1 = 0, \quad x_2 = 15^0, \quad x_3 = 75^0, \quad x_4 = 195^0, \quad x_5 = 255^0.$$

Úloha 27.

V trojúhelníku ABC jsou spuštěny s vrcholů A, B na protilehlé půdice výšky AD, BE. Dokázati jest, že trojúhelník ABC jest rovnoramenný, je-li

$$AE \,.\, EC = BD \,.\, DC.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Frant. Beran*, stud. VI. tř. r. v Pardubicích.)

Z podobných trojúhelníků ADC a BEC plyne

$$\frac{AE + EC}{DC} = \frac{BD + DC}{EC}, \tag{1}$$

čili

$$AE \,.\, EC + EC^2 = BD \,.\, DC + \overline{DC}^2,$$

a že dle podmínky

$$AE \,.\, EC = BD \,.\, DC,$$

jest $\overline{EC}^2 = \overline{DC}^2$,
tedy též $EC = DC$,
pročež z rovnice (1) plyne

$$AC = BC,$$

i jest tedy trojúhelník ABC rovnoramenný.

Úloha 28.

V trojúhelníku pravoúhlém buďtež dány na přeponě AB body M, N, které jsou souměrně sdruženy dle středu přepony

$$(AM = BN = m, \; AN = BM = n).$$

Tvoří-li příčky CM a CN s odvěsnou úhly φ_1 a φ_2 jest

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Tomáš*, stud. VII. tř. g. v Kroměříži.)

Spusťme s bodů M, N kolmé úsečky MP a NQ na odvěsnu AC. Znamenáme-li $BC = a$, $AC = b$, jest

$$\frac{PM}{a} = \frac{m}{c}, \quad \frac{CP}{b} = \frac{n}{c},$$

tedy
$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{PM}{CP} = \frac{am}{bn}. \tag{1}$$

Podobně obdržíme

$$\frac{QN}{a} = \frac{n}{c}, \quad \frac{CQ}{b} = \frac{m}{c},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{QN}{CN} = \frac{an}{bm}. \tag{2}$$

Dělením rovnic (1) a (2) vyjde

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{m^2}{n^2},$$

a násobením bude $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Úloha 29.

Do trojúhelníka abc vepsán jest lichoběžník $mnpq$, jehož půdice np, mq jsou rovnoběžny s těžnicí cc' a jehož vrcholy m, n leží v půdici ab tohoto trojúhelníka. Průsečíkem u úhlopříček mp, nq vedená rovnoběžka s těžnicí cc' protíná půdici ab v bodu v. Je-li $\overline{mn} = \frac{ab}{2}$, jest dokázati, že

$$am = mv, \quad bn = nv.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Ant. Vyhlídal*, stud. VI. tř. g. v Přerově.)

Ježto $mq \parallel uv \parallel np$, jest

$$\frac{mv}{vn} = \frac{mu}{up} = \frac{mq}{np},$$

a přičteme-li ku členům spodním úměry této členy horní, bude

$$\frac{mv}{mv + vn} = \frac{mq}{mq + np},$$

$$\frac{mv}{mn} = \frac{mq}{mq + np}. \qquad (1)$$

Dále jest $am + mc' = mc' + c'n = \frac{ab}{2}$, tedy $am = c'n$.

Veďme v trojúhelníku abc příčku $pq_1 \parallel ba$, a budiž r průsečíkem příčky této s těžnicí cc' i jest potom

$$q_1r = rp = c'n', \quad \text{pročež} \quad am = q_1r.$$

Ve shodných trojúhelnících amq, q_1rc jest $mq = rc$, tedy též

$$mq + np = rc + c'r = cc'.$$

Úměru (1) lze nyní upraviti takto:

$$mv : \frac{ab}{2} = mq : cc'$$

Ježto $\triangle\, amq \sim \triangle\, ac'c$,

jest

$$am : \frac{ab}{2} = mq : cc'.$$

Protože poslední dvě rovnice shodují se ve třech členech jest $$am = mv.$$

Podobně lze dokázati že
$$bn = nv.$$

Úloha 30.

V trojúhelníku abc buďtež dány ve straně ab dva isotomické body a_1, b_1 ($ab_1 = a_1b = b'$, $aa_1 = b_1b = a'$). Znamenáme-li strany a úhly trojúhelníka abc obvyklým spůsobem, a je-li $ca_1 = a_1$, $cb_1 = b_1$, $\sphericalangle a_1cb_1 = \gamma_1$, dokažte, že
$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 + a^2 + b^2 - c^2,$$
$$a_1b_1 \cos\gamma_1 = a'b' + ab\cos\gamma.$$

Řešení.

(Zaslal p. *Leopold Šauer*, stud. VIII. tř. g. v Truhlářské ulici v Praze.)

V trojúhelnících aa_1c, ab_1c jest dle věty Carnotovy
$$a_1^2 = a'^2 + b^2 - 2a'b\cos\alpha$$
$$b_1^2 = b'^2 + b^2 - 2b'b\cos\alpha.$$

Součet těchto rovnic jest
$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 + 2b^2 - 2b(a' + b')\cos\alpha,$$
a že $a' + b' = c$, bude
$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 + 2b^2 - 2bc\cos\alpha$$

Dle věty Carnotovy jest v $\triangle\, abc$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Z posledních dvou rovnic vylučme α, čímž přijdeme k první relaci
$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 + a^2 + b^2 - c^2 \qquad (1)$$

V druhém případě jest
$$\overline{a_1b_1}^2 = (a' - b')^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos\gamma_1,$$
z rovnice této a předešlé vylučme $(a_1^2 + b_1^2)$, tím odpadne též $(a'^2 + b'^2)$, a výsledek eliminace po náležitém upravení bude
$$2a_1b_1\cos\gamma_1 = a^2 + b^2 - c^2 + 2a'b'.$$

Větou Carnotovou přijdeme ku

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma,$$

pročež z rovnice předešlé obdržíme

$$a_1 b_1 \cos \gamma_1 = a'b' + ab \cos \gamma. \qquad (2)$$

Zvláštní případy. a) Je-li trojúhelník abc pravoúhlý ($\gamma = 90^0$) obdržíme ze vzorců (1) a (2)

$$a_1^2 + b_1^2 = a'^2 + b'^2 \qquad (3)$$

$$a_1 b_1 \cos \gamma_1 = a'b'. \qquad (4)$$

b) Pro $\gamma' = 0$, jest $a_1 = b_1 = t_c$, $a' = b' = \frac{c}{2}$, kdež t_c znamená délku těžnice straně c příslušné. I jest tedy dle vzorce(1)

$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4},$$

kterýžto povzorec dává známý vztah mezi stranami a těžnicí trojúhelníka.

Úloha 31.

Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, γ úhel stranami a, b sevřený, v výška slušící ku straně c a m, n úseky, ve které výška ta stranu c rozděluje, jest

$$v^2 = mn + ab \cos \gamma,$$

$$a^2 = mc + ab \cos \gamma, \qquad b^2 = nc + ab \cos \gamma.$$

Dokázati tyto relace.

Řešení.

[Zaslal p. *Václav Libenský*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.)

Budiž dán trojúhelník ABC; úhly jeho nechť jsou α, β, γ, strany a, b, c. Výška CD $\perp$ AB dělí základnu AB na části AD $= m$, BD $= n$; úhel pak γ rozděluje na části

$$\sphericalangle \mathrm{ACD} = \gamma_1, \quad \sphericalangle \mathrm{BCD} = \gamma_2.$$

O těchto veličinách platí patrně rovnice

$$m = b \sin \gamma_1, \quad n = a \sin \gamma_2,$$

$$v = b \cos \gamma_1 = a \cos \gamma_2,$$

z nichž vyplývá

---

*) Vzorec tento plyne též z úl. 9. „Časopisu pro pěstování math. a fisiky" roč. XXII, str. 79 a str. 219.

$$mn = ab \sin \gamma_1 \sin \gamma_2,$$
$$v^2 = ab \cos \gamma_1 \cos \gamma_2.$$

Odtud nabudeme relace

$$v^2 - mn = ab (\cos \gamma_1 \cos \gamma_2 - \sin \gamma_1 \sin \gamma_2)$$

čili

$$(1) \qquad v^2 = mn + ab \cos \gamma.$$

Z trojúhelníků ACD, BCD plyne dále

$$a^2 = n^2 + v^2, \qquad b^2 = m^2 + v^2;$$

dosadíme-li za v^2 hodnotu z rovnice (1), obdržíme

$$a^2 = n(m+n) + ab \cos \gamma, \qquad b^2 = m(m+n) + ab \cos \gamma$$

čili

$$(2) \qquad a^2 = mc + ab \cos \gamma, \qquad b^2 = nc + ab \cos \gamma.$$

Poznámka. Je-li $\gamma = 0$, promění se rovnice (1) a (2) v tyto jednodušší

$$v^2 = mn, \qquad a^2 = mc, \qquad b^2 = nc,$$

vyjadřující známé poučky o trojúhelníku pravoúhlém.

Úloha 32.

Otáčeje se kolem svých stran a, b, c vytvořuje trojúhelník tři tělesa, jichž obsah jest po řadě

$$A = 3142\,cm^3 \quad B = 2356\,cm^3, \quad C = 1885\,cm^3.$$

Vypočítati délky stran a, b, c.

Řešení.

(Zaslal p. *Josef Hájíček*, učitel v Grygově u Olomouce).

Jsou-li a, b, c strany, v_a, v_b, v_c příslušné k nim výšky a Δ obsah trojúhelníka, jest

$$av_a = bv_b = cv_c = 2\Delta.$$

Mimo to jest

$$A = \frac{1}{3}\pi v_a \Delta = \frac{2}{3}\pi \frac{\Delta^2}{a},$$
$$B = \frac{1}{3}\pi v_b \Delta = \frac{2}{3}\pi \frac{\Delta^2}{b},$$
$$C = \frac{1}{3}\pi v_c \Delta = \frac{2}{3}\pi \frac{\Delta^2}{c}.$$

Vyjádříme-li odtud $a = \frac{2}{3}\pi \frac{\Delta^2}{A}$

a obdobně i b, c a dosadíme-li do vzorce Heronova

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

obdržíme

$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi^2\sqrt{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)}}}$$

a tedy

$$a = \frac{2}{A}\sqrt[3]{\frac{3}{\pi\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)}}.$$

K číselným výpočtům výhodno jest položiti

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=2S,$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi S\left(S-\frac{1}{A}\right)\left(S-\frac{1}{B}\right)\left(S-\frac{1}{C}\right)}}=T,$$

načež bude $a=\frac{T}{A}$, $b=\frac{T}{B}$, $c=\frac{T}{C}$.

Při daných hodnotách jest:

$\frac{1}{A}=0{\cdot}000318$	$S-\frac{1}{A}=0{\cdot}000318$
$\frac{1}{B}=0{\cdot}000424$	$S-\frac{1}{B}=0{\cdot}000212$
$\frac{1}{C}=0{\cdot}000530$	$S-\frac{1}{C}=0{\cdot}000106$
$S=0{\cdot}000636$	$T=\quad 47184.$

Hodnota T vypočítána logarithmicky užitím tabulek 5místných; taktéž vypočítáme přesně až na millimetr

$$a = 11{\cdot}9\,cm,\quad b = 15{\cdot}9\,cm,\quad c = 19{\cdot}8\,cm.$$

Správné řešení úloh zaslali pp.:

František Balada, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 17.
František Beran, stud tř. r. v Pardubicích, úl. 26., 27., 31.
Frant. Bílovský, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 18., 19., 20„ 25.
Alois Greipel, stud. VII. tř. r. v Prostějově, úl. 17., 18., 20., 21.
Aug. Haas, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 17. až 32.
Josef Hájíček, učitel v Grygově u Olomouce úl. 17. až 32.

František Hýbl, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 17. až 23., 25. až 29., 31.
Josef Kincl, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 17. až 21.
František Köhler, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 17., 26., 30., 31.
František Kosyna, stud. VIII. tř. akad. g. v Praze, úl. 27.
Hugo Kröhn, stud. VII. tř. r. v Hradci Králové, úl. 17., 21.
Jan Kroupa, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 17., 18., 20.
František Kroutil, stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí, úl. 25., 26., 27., 31.
František Kroužil, stud. V. tř. r. v Pardubicích, úl. 17.
Petr Krupař, stud. VII. tř. g. v Jičíně, úl. 17., 21.
Josef Kučera, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 24.
Tobiáš Kudela, stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 17., 18., 20., 21.
Josef Langr, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 17. až 21.
Václav Libenský, stud. VII tř. akad. g. v Praze, úl. 18., 20., 25., 31.
Josef Materna, stud. VIII. tř. g. ve Spálené ul. v Praze, úl. 21.
Josef Matoušek, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 17. až 26., 31., 32.
Stanislav Mikyska, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 18., 24., 25., 26.
Frant. Miláček, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 17. až 21., 23. až 28., 31., 32.
Adolf Ottis, stud. VI. tř. g. v Plzni, úl. 25., 27., 31.
Václav Posejpal, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 18., 21., 25., 26., 27.
Josef Půček, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 17., 18., 19.
František Slavík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 18., 19., 21., 24., 25., 26., 31.
Vinc. Sura, stud. VII. tř. r. v Král. Hradci, úl. 17., 19., 20.
Pantaleon Synek, stud VI. tř. r. v Prostějově, úl. 26., 27., 31.
Leopold Šauer, stud. VIII. tř. g. v Truhlářské ul. v Praze, úl. 20., 24., 25., 31.
František Ševčík, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 18. až 21., 24., 25., 26., 31.
Slč. *Marie Šmelíkova*, chov. II. roč. učit. ústavu v Olomouci, úl. 17., 27., 29.
Josef Tomáš, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 17. až 22., 24. až 28.
Jaroslav Tomaštík, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 17. až 21., 25., 26.
Antonín Vyhlídal, stud. VI. tř. g. v Přerově, úl. 18. až 20., 22. až 32.
Josef Znojemský, stud. VIII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 17. 21.
Nepodepsaný z Vysokého Mýta, úl. 24., 25., 26., 31.
Nepodepsaný z Olomouce, úl. 17. až 23., 25. až 31.