Antonín Kostěnec

O vypočítání obsahu komolého jehlance

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 24--28

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121048

Oprava závažnějších tiskových omylů v mém článku: „*Trojí spůsob elementárného odvození vzorce pro obvod ellipsy.*“ Roč. XII. časop. pro pěst. math. a fys.

Str. 267. Řádek 3. Místo: $\cos\,[2m+1]\,.\,\frac{2\pi}{2n}$ čti: $\cos\,(2m+1)\frac{\pi}{2n}$.

— Řádek 4. Místo: $\sin^4\frac{(2m+2)\pi}{4n}$ čti: $\sin^4\frac{(2m+1)\pi}{4n}$.

Str. 271. V řádku 8. vynechán jest prostřední člen $\pi\left\{1-R\right\}$ se znaménkem $<$; dlužno totiž čísti:

$$4n\sin\frac{\pi}{4n}\left\{1-R\right\}<\pi\left\{1-R\right\}<\pi\left\{1-R\right\}+\frac{r}{2a};$$

Str. 273. Řádek 5. Místo: $\frac{21}{34}=\frac{7}{8}$ čti: $\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$.

— Řádek 2. zdola. Místo: provésti čti: převésti neb uvésti.

Str. 275. Řádek 5. zdola. Místo: $a_n - a_{n-1}\,.\,\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n)^2}\varepsilon^2 =$ čti:

$$a_n = a_{n-1}\,.\,\frac{(2n-3)(2n-1)}{(2n)^2}\varepsilon^2 =$$

O vypočítání obsahu komolého jehlance.

Napsal prof. **Ant. Kostěnec.**

Kolbe'ův „Zeitschrift f. d. Realschulwesen“ přináší v letošním ročníku (str. 154) článek*) o stanovení krychlového obsahu komolého jehlance spůsobem geometrickým, v názoru založeným. Tento spůsob řešení úkolu uvedeného záleží krátce v tom, že se nejprve trojboký jehlanec komolý rozdělí dvěma sečnými rovinami ve tři trojboké jehlance tak, aby jsouce s ním téže výšky měly za podstavy jeden jeho spodní, druhý jeho svrchní podstavu, což když jsme učinili, shledáme, že podstava třetího jehlance jest střední měřickou úměrnou obou podstav těchto; posléze pak se ukáže, že každý jehlanec komolý jest roven třem takovým jehlancům.

Týmž spůsobem řešen úkol tento mezi jinými již ve spisech: *Précis élémentaire de mathématiques*, Paris, 1839, p. 256 od *J. Moranda*, dále v *Hoffmannově Mathematisches Wörterbuch*, Berlin, 1861, ve článku Pyramide, p. 333, jakož i v *Lehrbuch der*

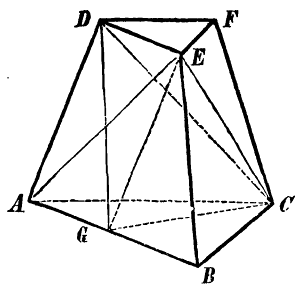
*) Die Berechnung des Rauminhaltes der abgestumpften Pyramide. Von Julius Dupuis in Wien.

Geometrie von Heis u. Eschweiler, 2. díl, 3. opravené a rozmnožené vyd., Kolín nad Rýnem, 1874, pag. 117.

Poněvadž spůsob tento vypočítávání krychlového obsahu komolého jehlance jest názornější a snažší než spůsob obvyklý, dovolujeme si zde o něm promluviti, přidržujíce se v podstatě uvedeného pramene francouzského.

V obrazci 1. představujícím komolý jehlanec trojboký AF, položili jsme první sečnou rovinu hranou AC a bodem E, druhou pak body E, D, C, čímž jsme obdrželi trojboké jehlance $EABC$, $CDEF$ a $EACD$. Pošineme-li nyní vrchol E posledního jehlance rovnoběžně s podstavou jeho ACD do G, učiníme-li tedy $EG \parallel DA$, bude jehlanec $GACD$ čili $DACG =$ jehlanci $EACD$.

Obsah komolého jehlance AF jest tedy roven obsahu jehlanců $EABC$, $CDEF$ a $DACG$.



Obr. 1.

O podstavě jehlance posledního dlužno nyní dokázati, že jest střední měřickou úměrnou obou podstav komolého jehlance.

Především platí úměra

$$\triangle ABC : \triangle AGC = AB : AG = AB : DE$$

neb, položíme-li

$$\triangle ABC = B, \ \triangle DEF = b, \ \triangle ACG = b', \ AB = m, \ DE = n,$$

$$B : b' = m : n,$$

tedy i

$$B^2 : b'^2 = m^2 : n^2;$$

ježto však také

$$B : b = m^2 : n^2,$$

následuje

$$B^2 : b'^2 = B : b$$

neb

$$B : b'^2 = 1 : b,$$

a konečně

$$b' = \sqrt{Bb}.$$

Protož bude hledaný obsah krychlový J komolého jehlance, značí-li v výšku jeho,

$$J = \frac{v}{3}(B + b + \sqrt{Bb}). \qquad (1)$$

Abychom poznali, že pravidlo toto platí vůbec, pomněme, že každý jehlanec n boký, ať plný ať zkomolený, proměniti lze v rovný jemu jehlanec trojboký; neb také, že možno rozděliti n boký jehlanec komolý sečnými rovinami v $\overline{n-2}$ jehlance trojboké, a souditi, že co platí o jehlancích těchto, platí i o jich souhrnu čili o n bokém jehlanci komolém.

Závěr tento možno dokázati spůsobem následujícím:*)

Značí-li i zde B, b spodní a svrchní podstavu daného n bokého jehlance komolého a nazveme-li spodní podstavy oněch $\overline{n-2}$ trojbokých jehlanců, ve které si myslíme, že jest daný jehlanec komolý rozdělen, po řadě B_1, B_2, ..., B_{n-2} a obdobně svrchní podstavy jich písmeny b_1, b_2, ..., b_{n-2}, takže

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_{n-2} = B, \; b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2} = b,$$

bude dle předešlého krychlový obsah komolého jehlance

$$J = \frac{v}{3}(B + b + \sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \ldots + \sqrt{B_{n-2}\, b_{n-2}}).$$

Nyní jest dokázati, že

$$\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \ldots . + \sqrt{B_{n-2}\, b_{n-2}} = \sqrt{Bb}.$$

Poněvadž $B \sim b$, jest též $B_1 \sim b_1$, $B_2 \sim b_2$, ..., $B_{n-2} \sim b_{n-2}$, z čehož následuje

$$\frac{B_1}{b_1} = \frac{B_2}{b_2} = \ldots = \frac{B_{n-2}}{b_{n-2}} = \frac{B}{b}.$$

Znásobivše čítatele i jmenovatele každého zlomku tohoto jmenovatelem jeho, obdržíme

*) Viz: Journal de mathématiques élémentaires, pnblié sous la direction de *M. J. Bourget*, tome 2, Paris, 1878, p. 238.

$$\frac{B_1 b_1}{b_1^2} = \frac{B_2 b_2}{b_2^2} = \ldots = \frac{B_{n-2}\, b_{n-2}}{b_{n-2}^2} = \frac{Bb}{b^2},$$

a odmocníme-li zlomky tyto dvěma,

$$\frac{\sqrt{B_1 b_1}}{b_1} = \frac{\sqrt{B_2 b_2}}{b_2} = \ldots = \frac{\sqrt{B_{n-2}\, b_{n-2}}}{b_{n-2}} = \frac{\sqrt{Bb}}{b},$$

z čehož plyne dále

$$\frac{\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \ldots + \sqrt{B_{n-2}\, b_{n-2}}}{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-2}} = \frac{\sqrt{Bb}}{b},$$

tudíž i

$$\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \ldots + \sqrt{B_{n-2}\, b_{n-2}} = \sqrt{Bb}$$

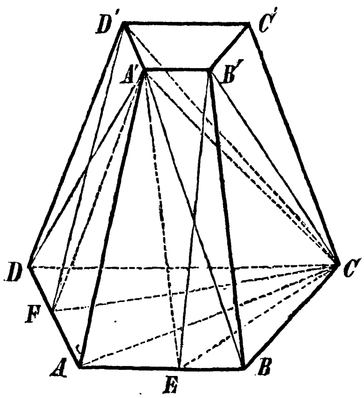
a konečně vzorec (1).

Dodatek. Obsah čtyřbokého jehlance komolého lze určiti též přímo, podobně jako obsah trojbokého jehlance komolého, aniž by bylo třeba rozděliti jej ve dva jehlance trojboké. Stane se to takto: Rozdělíme-li komolý jehlanec AC' — obr. 2. — příslušnými rovinami sečnými ve dva čtyřboké jehlance $A'ABCD$ a $CA'B'C'D'$, zbudou nám ještě dva trojboké jehlance $A'BCB'$ $A'DCD'$, kteréžto poslední třeba proměniti v jiné, by měly touž výšku jako jehlanec komolý. K tomu účelu pošiňme společný jich vrchol A' rovnoběžně s jich podstavami BCB', DCD' do bodů E a F, udělavše $A'E \parallel B'B$, $A'F \parallel D'D$, načež bude

$$A'BCB' = EBCB' = B'EBC$$

a rovněž i

$$A'DCD' = FDCD' = D'DCF.$$



Obr. 2.

Zavedše pak označení

$$ABCD = B,\ A'B'C'D' = b,\ \triangle EBC = b_1,\ \triangle DCF = b_2,$$
$$AB = m,\ A'B' = m_1,\ AD = n,\ A'D' = n_1,$$

budeme míti

$$\triangle EBC : \triangle ABC = EB : AB$$

čili

$$b_1 : \triangle ABC = m_1 : m$$

a podobně

$$b_2 : \triangle ACD = n_1 : n,$$

z kterýchžto úměr následuje

$$b_1 : \triangle ABC = b_2 : \triangle ACD = m_1 : m \qquad (\alpha)$$

neb

$$(b_1 + b_2) : (\triangle ABC + \triangle ACD) = m_1 : m$$

čili

$$(b_1 + b_2) : B = m_1 : m,$$

tedy též

$$(b_1 + b_2)^2 : B^2 = m_1^2 : m^2 = b : B$$

neb

$$(b_1 + b_2)^2 : B = b : 1,$$

tedy

$$b_1 + b_2 = \sqrt{Bb}.$$

Sečteme-li všecky čtyři jehlance, ve které jsme daný jehlanec komolý rozdělili, obdržíme opět vzorec (1).

Byly-li by podstavy komolého jehlance rovnoběžníky, pak by $\triangle ABC = \triangle ACD$ a tudíž dle úměry (α) též $b_1 = b_2$ t. j. oba trojboké jehlance $B'EBC$ a $D'DCF$ jsou si pak rovny, takže jeden i druhý jest $\frac{v}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{Bb} = \frac{v}{6}\sqrt{Bb}$.

Poznámka o trojúhelnících racionálných.

Od **A. Strnada.**

Předpokládejme trojúhelník *abc*, jehož vrcholy určeny jsou v pravoúhlé soustavě *souřadnicemi racionálných hodnot*:

$$a\,(x_1,\ y_1),\ b\,(x_2,\ y_2),\ c\,(x_3,\ y_3).$$

Obsah trojúhelníka toho, jsa vyjádřen vzorcem