Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Cornelius Plch

Poznámky k nekonečným řadám

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 18--23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121045

A podlé vzorce (13) bude tu podobně

$$\int x^n \cos x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos x \left[1 - \frac{x^2}{(n+2)^{2,1}} + \frac{x^4}{(n+2)^{4,1}} - \ldots\right]$$
$$+ \frac{x^{n+2}}{(n+1)^{2,1}} \sin x \left[1 - \frac{x^2}{(n+3)^{2,1}} + \frac{x^4}{(n+3)^{4,1}} - \ldots\right],$$

z čehož taktéž plyne pro $n = o$

$$\int \cos x\, dx = \cos x \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$$
$$+ \sin x \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots\right] = \sin x.$$

Že poslední vzorce pro celistvé a positivní n poskytují řady zcela jiného rázu nežli vzorce předcházející, kde fakulty mají negativní inkrementy, poznává se velmi snadno. Zároveň pak tu viděti, jak rozmanité tvary se vyskytují v těchto řadách, jakmile rozličným spůsobem provádíme tak zvaná integrování po částech tam, kde gonimetrické funkce jsou obsaženy v differencialním výrazu. Konečně však jde z tohoto stručného výkladu na jevo, jak opatrně nutno zacházeti s nekonečnými řadami, má-li se obdržeti výsledek nejen formálně, nýbrž i realně správný, což zde vystopovati ponecháváme bedlivosti čtenářstva.

Poznámky k nekonečným řadám.

Studujícím napsal

P. Cornelius Pich, T. J. v Bohosudově (Mariaschein).

I. Značiž α úhel na podstavě daného *trojúhelníku rovnoramenného*, k_1 příslušnou výšku čili kolmici s vrcholu na podstavu spuštěnou, a pokládejmež podstavu jakožto první rameno daného úhlu α.

Vedeme-li z paty kolmice k_1 na druhé rameno úhlu α kolmici k_2, z paty kolmice k_2 na podstavu kolmici k_3, z paty kolmice k_3 na druhé rameno kolmici k_4, a postupujeme-li tímto spůsobem aspoň v myšlénkách tak dlouho, jak jen libo, vedouce totiž pokaždé z paty poslední přímky, na jednom rameně úhlu α kolmo stojící, ještě jinou kolmici na druhé rameno téhož úhlu, tož tvoří poměrná čísla oněch n buď skutečně, buď jen v myšlénkách sestrojených kolmic k_1, k_2, k_3, ..., k_n *geometrickou posloupnost*, jejížto stálý podíl

$$p = \frac{k_2}{k_1} = \frac{k_3}{k_2} = \ldots\ldots = \frac{k_n}{k_{n-1}} = \cos\alpha.$$

Pročež bude součet

$$k_1 + k_1 \cos\alpha + k_1 \cos^2\alpha + \ldots\ldots + k_1 \cos^{n-1}\alpha = \frac{k_1 - k_1 \cos^n\alpha}{1 - \cos\alpha},$$

odkudž pak jde

$$\frac{1}{1-\cos\alpha} = \{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots + \cos^{n-1}\alpha\} + \frac{\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}. \quad (1)$$

Poněvadž ale za příčinou nerovností

$$0 < \cos\alpha < 1$$

proměnná veličina $\cos^n\alpha$ při rostoucím n ustavičně se přibližuje k *nulle* jakožto své *stálé mezi* (*limitě*), jestiť tedy

$$0 = \lim \frac{\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad (2)$$

a tudíž

$$\frac{1}{1-\cos\alpha} = \lim \{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots\ldots + \cos^{n-1}\alpha\}. \quad (3)$$

Píšeme-li, jak obyčejno*), zkrátka

$$\frac{1}{1-\cos\alpha} = 1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots\ldots \quad (4)$$

neznačí již znaménko „$=$“: *„rovná se“, nýbrž asi: „rovná se téměř“, protože doplněk* $\frac{\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}$ *v rovnici* (1) *ani pro sebe větší hodnotu čísla n zmizeti nemůže.*

Důkaz. Snažíce se naznačené dělení $\frac{1}{1-\cos\alpha} = 1 : (1-\cos\alpha)$ provésti, dostaneme sice postupně členy $1, \cos\alpha, \cos^2\alpha, \ldots, \cos^{n-1}\alpha$, *avšak nikdy nebudeme hotovi* s vyvinováním těchto částečných podílů, protože toto dělení pro žádnou hodnotu čísla n beze zbytku nepojde, a poněvadž z každého zbytku od nully se lišícího nový částečný podíl vyvoditi lze.

Neboť kdy by pro jistou hodnotu čísla n byl zbytek

$$\cos^n\alpha = 0 = z - z,$$

*) Viz na př. *Dr. F. J. Studnička „Všeobecné tvarosloví algebraické“* pag. 92 a násled., kdež původ nekonečných řad velmi pěkně se vykládá.

musilo by též býti

$$cos^{n-1}\alpha = \frac{cos^n \alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0}{cos\,\alpha} = 0,$$

$$cos^{n-2}\alpha = \frac{cos^{n-1}\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0}{cos\,\alpha} = 0,$$

. . . .

$$cos\,\alpha = \frac{cos^2 \alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0}{cos\,\alpha} = 0,$$

což patrně *býti nemůže*, protože jest daný úhel $\alpha < 90^0$ a tudíž $cos\,\alpha > 0$. *Jestiť tedy pro každou hodnotu čísla n zbytek* $cos^n\alpha > 0$ *a musí tudíž i doplněk* $\frac{cos^n \alpha}{1 - cos\,\alpha} > 0$ býti.

Sbíhavá řada na pravé straně relace (4) *slove řadou nekonečnou, protože počet její členův, aniž by kdy nekonečně velkým* (∞) *se stal, libovolně velkým státi se má**), *aby rozdíl pravé a levé strany, aniž by kdy zmizel, libovolně malým státi se mohl.*

Naproti tomu *jest a slove tatáž sbíhavá řada* v rovnici (1) *řadou konečnou, ačkoli počet její členů libovolně velkým státi se může*, protože pravá strana této rovnice pro každou *konečnou* hodnotu čísla *n* levé straně se rovná. *Vynechá-li se* však na pravé straně *doplněk* $\frac{cos^n \alpha}{1 - cos\,\alpha}$, *stane se tato konečná řada* ve smyslu právě vytknutém *řadou nekonečnou.*

II. Je-li daný *trojúhelník rovnostranný*, bude $cos\,\alpha = \frac{1}{2}$, a tudíž dle rovnice (1)

$$2 = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right\} + \frac{1}{2^{n-1}}, \quad (5)$$

kteréžto rovnici každá hodnota čísla *n* vyhovuje, jak se snadno přesvědčiti můžeme obyčejným sečítáním, dosadíce dříve místo *n* ledakterou z hodnot: 1, 2, 3, 4, ...

*) Srovnej *Friedrich Meyer* „*Zu den Kleinigkeiten in der Schulstube*“ v „*Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht*“ von *J. C. V. Hoffmann* Jahrg. XIII. pag. 114 dole, pak *Dr. Handl* „*Nochmals die Physik von Koppe*“ tamtéž pag. 141 nahoře. Jiného náhledu jest *Dr. Gutberlet* „*Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet*“ pag. 106 a násled, Mainz, 1878, G. Faber.

Kdyby však pro jistou hodnotu čísla n byl uzávorkovaný řadový člen

$$\frac{1}{2^{n-1}} = 0 = z - z,$$

musel by též každý předcházející člen rovnati se nulle, poněvadž každý předcházející člen je dvakráte větší než následující, a protože

$$2.0 = 2\,(z - z) = 2z - 2z = 0.$$

Bylo by tudíž *nezbytně* dle rovnice (5)

$$2 = \{0 + 0 + 0 + 0 + \ldots . + 0 + 0\} + 0,$$

což pro $n = \infty$ *rovněž tak nemožné jest jako pro* $n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$ *jelikož součet všech těchto null rovná se nulle.*

Leží tedy na bíledni, že i doplněk $\frac{1}{2^{n-1}}$ v rovnici (5) s posledním členem řadovým $\frac{1}{2^{n-1}} > 0$ stejný, *pro žádnou hodnotu čísla* n *zmizeti nemůže, ani pro* $n = \infty$.

III. Kdybychom součet

$$S = \left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right\} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

teprv ustanoviti měli, mohli bychom S určiti buď *pouhým sečtením* z rovnice

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{n-1}} = 2,$$

anebo hromadným přechodem k mezním hodnotám z rovnice

$$s_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \text{ čili } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{s_n},$$

kdežto proměnné veličiny s_n, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ při rostoucím n k svým stálým mezím S, $(1 - 0)$ ustavičně se přibližují.

Pročež bude *dle základní věty*) hromadného* (pro každou hodnotu čísla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ dovoleného) *přechodu k mezním hodnotám*

$$S = \frac{1-0}{1-\frac{1}{2}} = 2 \text{ čili } 1 - \frac{1}{2} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{s_n} = \frac{1}{S},$$

z čehož taktéž plyne $S = 2$.

Hromadným přechodem k mezním hodnotám proměnných veličin přijdeme tudíž k stejnému výsledku jako přičtením doplňku k součtu sbíhavé řady konečné.

IV. Stejným spůsobem lze dokázati, že v následujících (a podobných) rovnicích, jimž každá hodnota čísla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ vyhovuje, *doplňky* uzávorkovaných řad sbíhavých *pro žádnou* (ani pro sebe větší) *hodnotu čísla n zmizeti nemohou*, ačkoli se při rostoucím n ustavičně přibližují k nulle jakožto své stálé mezi.

Jak mile tedy tyto *doplňky* z rovnic *vypustíme*, podržíce dřívější znaménko „=“, *stanou se* všecky uzávorkované *řady konečné* ve smyslu svrchu vyloženém *řadami nekonečnými*.

$$1 = \left\{\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right\} + \frac{1}{n+1} \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right\} + \frac{1}{2(2n+1)} \tag{7}$$

$$\frac{1}{4} = \left\{\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \tag{8}$$

$$1 = \left\{\frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.3.1}{2.4.6} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.8} + \ldots + \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3).1}{2.4.6.8\ldots(2n-2)2n}\right\} + \frac{1.3.5.7\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6.8\ldots(2n-2)2n} \tag{9}$$

*) Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, roč. XII. pag. 25 dole.

$$1-\frac{2}{\pi}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2$$
$$+\ldots\ldots [\textit{nekonečná řada}] \qquad (10)$$

$$\frac{1}{3}=\left\{\frac{1}{2^1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots.+(-1)^{n-1}.\frac{1}{2^n}\right\}$$
$$+(-1)^n.\frac{1}{3.2^n} \qquad (11)$$

$$\frac{1}{3}=\left\{\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots.+\frac{1}{4^n}\right\}+\frac{1}{3.4^n}$$
$$=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4^{n+1}}+\frac{1}{4^{n+1}}}{1-\frac{1}{4}} \qquad (12)$$

$$\frac{1}{3}=\left\{\frac{1}{5^1}+\frac{2^1}{5^2}+\frac{2^2}{5^3}+\frac{2^3}{5^4}+\ldots.+\frac{2^{n-1}}{5^n}\right\}+\frac{1}{3}.\left(\frac{2}{5}\right)^n$$
$$+\frac{\frac{1}{5}-\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2^n}{5^{n+1}}}{1-\frac{2}{5}} \qquad (13)$$

$$\frac{1}{3}=\left\{\frac{3}{10^1}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots.+\frac{3}{10^n}\right\}+\frac{1}{3.10^n}$$
$$=\frac{\frac{3}{10}-\frac{3}{10^{n+1}}+\frac{3}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} \qquad (14)$$

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10^1}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\ldots.=0{\cdot}3333\ldots.=0{\cdot}\dot{3}$$
$$[\textit{nekonečná řada}] \qquad (15)$$

Snažíce se totiž naznačené dělení $\frac{1}{3}=1:(2+1)$, $\frac{1}{3}=1:(4-1)$, $\frac{1}{3}=1:(5-2)$ provésti, obdržíme rovnice (11), (12), (13). Že podobným spůsobem ze zlomku $\frac{1}{3}$ a z každého jiného ryzího zlomku *nesčíslné množství konečných i nekonečných řad* vyvinouti lze, samo sebou se rozumí.