Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 34--41

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121042

Že stopou oněch hyperboloidů největšího spádu na rovině M jest kružnice, vychází na jevo z toho, že hyperboloid mimosměrek a jeho řídící plocha kuželová proťaty jsou každou rovinou ve křivkách podobných.

Z věty této vyplývá známá vlastnosť kosoúhlé plochy šroubové, že totiž plocha největšího spádu podél libovolné její povrchové přímky na proti rovině M, kolmé na ose té plochy, jest hyperboloidem mimosměrek, jehož stopou na rovině M jest kružnice. Procházejí tudíž všecky roviny centralné kosoúhlé plochy šroubové osou její a rovina M, kolmá na její ose, jest následkem toho kolma na všech těch rovinách centrálných.

Dokázána-li jest tato vlastnosť kosoúhlé plochy šroubové, může z ní býti odvozena věta všeobecná v tomto článku dokázaná, poněvadž podél každé přímky povrchové plochy mimosměrek dotýká se jí nekonečně mnoho kosoúhlých ploch šroubových, které mají osy v rovině centrálné plochy mimosměrek příslušné k oné přímce povrchové.

Geometrická úloha.

Napsal prof. **Karel Pánek.**

Má se sestrojiti čtyrúhelník, dány-li jsou jedna strana a přilehlé k ní úhly a, α, β, mimo to další podmínka, že zbývající tři neznámé strany jsou si rovny.

Rozbor. Budiž čtyrúhelník $ABCD$ žádaný:

$$AB = a, \ \sphericalangle A = \alpha, \ \sphericalangle B = \beta, \ BC = CD = DA.$$

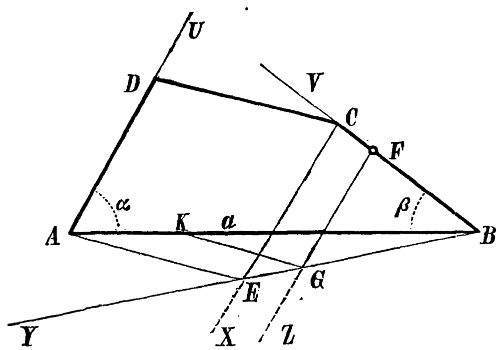
Veďme $CX \parallel DA$, $AE \parallel DC$, čímž obdržíme kosočtverec $AECD$; spojme dále bod B s bodem E, tu jest $\triangle EBC$ takto povstalý rovnoramenný, neboť $BC = CD = DA = CE$. Úloha by se dala snadno sestrojiti, kdybychom znali bod E. K tomu konci veďme z libovolného bodu F: $FG \parallel CE$ a $GK \parallel EA$ i bude platiti úměra

$$BC : CE : EA = BF : FG : GK.$$

Ježto však $BC = CE = EA$, musí $BF = FG = GK$, t. j. $\triangle GBF$ jest též rovnoramenný a přímka GK rovná se jeho rameni. Tím jest směr přímky GK určen a poněvadž $AE \parallel KG$, ustanoven i žádaný bod E.

Sestrojení. Učiňme $AB = a$, $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$ a veďme z libovolného bodu F na přímce BV rovnoběžku ku UA a odřízněme z ní $FG = FB$. Spojíce bod B s bodem G, obdržíme rovnoramenný $\triangle GBF$; z G pak nanesme $GK = GF$, z bodu A veďme $AE \parallel KG$, z bodu E pak $EC \parallel AU$ a z bodu C konečně $CD \parallel EA$, i jest $ABCD$ čtyrúhelník žádaný, neboť z rovnoběžnosti stran plyne tato úměra

$$BF : FG : GK = BC : CE : EA.$$



Ježto dle konstrukce $BF = FG = GK$, také $BC = CE = EA$. Mimo to jest čtyrúhelník $AECD$ rovnoběžník, tudíž jsou protější strany rovny, $AE = DC$, $EC = AD$.

Poslední tři výsledky shrnouce a píšíce je jak následuje

$$\begin{array}{ccccc} BC & = & EA & = & CE \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & CD & & DA \\ \hline BC & = & CD & = & DA \end{array}$$

obdržíme $BC = CD = DA$, t. j. neznámé tři strany čtyrúhelníka jsou si rovny.

Úlohy.

Řešení úlohy 22. z roč. XII.

(Zaslal p. *Al. V. Michna*, technik v Curychu.)

Jsou-li poloměry komolého kužele R a r, výška v, bude

$$D = \pi v R^2 - \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi v}{3}(2R + r)(R - r),$$

$$d = \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2) - \pi v r^2 = \frac{\pi v}{3}(R + 2r)(R - r).$$

Z těchto dvou vztahů a jelikož $D+d$ dá válcovou rouru, máme:

$$\frac{D}{d}=\frac{2R+r}{2r+R},\quad \frac{D+d}{\pi v}=R^2-r^2.$$

Pomocí těchto rovnic obdržíme

$$K_1=\frac{(2D-d)^2}{3(D-d)}=75 \text{ dm}^3,\quad K_2=\frac{(2d-D)^2}{3(D-d)}=27 \text{ dm}^3,$$

$$K=K_2+d=\frac{D^2-dD+d^2}{3(D-d)}=49 \text{ dm}^3.$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Jindřich Schulhof*, z VIII. tř. g. v Kr. Hradci, *Ant. Pleskot*, z VI. tř. g. v Chrudimi, *Vl. J. Novák*, ze VII. tř. r. v Litomyšli, *Frant. J. Kočí*, ze VII. tř. g. v Jičíně, *Jar. Mašek a Karel Špaček*, ze VII. třídy r. městského r. g. v Praze, *Ant. Klír*, ze VI. tř. r. v Praze, *Moric Hirsch*, ze VI. tř. r. g. v Chrudimi, *Fr. Fišer*, ze VII. g. v Roudnici.

Řešení úlohy 23. z roč. XII.

(Podal p. *Frant. Kočí*, stud. VII. tř. gym. v Jičíně.)

Podstava úseku bude ellipsa o poloosách a, b, a znamená-li v jeho výšku, jest $k=\frac{\pi}{3}abv$, a nazveme-li p parametr ellipsy, $k=\frac{\pi}{3}av\sqrt{ap}$. Pro a, p uvádí Močník-Hora, Geometrie, str. 284. hodnoty

$$a=\frac{s\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)},\quad p=s\sin\alpha\, tg\frac{\beta}{2},\quad v=S\sin(\alpha-\beta),$$

které dají

$$k=\frac{\pi}{3}S s^2\frac{\sin\beta}{2}\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta\, tg\frac{\beta}{2}}{2\sin(\alpha-\beta)}}.$$

Z obrazce příslušného lze vyjádřiti snadně tyto goniometrické funkce hodnotami danými, takže konečně

$$k=\frac{\pi v}{3}R^2\sqrt{\frac{s^3}{S^3}}=K\sqrt{\left(\frac{s}{S}\right)^3}$$

a tedy $$k=400 \text{ cm}^3.$$

Tutéž úlohu řešil p. *Vl. J. Novák*, ze VII. tř. r. v Litomyšli.

Řešení úlohy 24. z roč. XII.

(Zaslal p. *Vl. J. Novák*, stud. VII. tř. r. v Litomyšli.)

Obrazec budiž osovou průsečí kužele i obou kulí. Má-li lichoběžník $ABCD$ strany $AB = a$, $DC = b$, $AD = BC = c$, bude poloměr R kružnice kolem něho opsané

$$R = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c^2 + ab}{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}}.$$

z čehož dostaneme, je-li r poloměr vepsané koule,

$$R = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{c^2 + 4}{4r^2}} \quad \text{nebo} \quad 4r^2 = \frac{c^4}{4R^2 - c^2}.$$

Násobíme-li celou rovnici a pak i jmenovatel i čítate zlomku číslem π, obdržíme

$$4\pi r^2 = \frac{\pi^2 c^2}{4\pi R^2 - \pi c^2} \text{ nebo konečně } p = \frac{S^2}{P - S} = 9{\cdot}4 \,\mathrm{dm}^2.$$

Tutéž úlohu řešili pp. *Václ. Spěvák*, z VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, *Frt. J. Kočí*, ze VII. tř. g. v Jičíně, *Ant. Pleskot*, ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 25. z roč. XII.

(Zaslal p. *Jaroslav Mašek*, ze VII. tř. r. měst. r. g. v Praze.)

Ze tří po sobě jdoucích čísel jest vždy jedno dělitelno třemi; není-li žádné krajní dělitelno třemi, musí to platiti o prostředním. Jsou-li zároveň krajní čísly lichými, musí být prostřední sudé a tudíž dělitelno šesti. Obě supposice a tedy i závěrek patrně platí v našem případu.

Tutéž úlohu řešili pp. *Ant. Pleskot*, ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Vl. J. Novák*, ze VII. tř r. v Litomyšli, *Ant. Klír*, ze VI. tř. r. v Praze a *Karel Špaček* ze VII. tř. r. měst. r. g. v Praze.

Řešení úlohy 26. z roč. XII.

(Zaslal pan *Ant. Pleskot*, ze VI. tř. g. v Chrudimi.)

Číslo $abcd$ se rovná $100 . ab + 2 . ab$ t. j. $102 . ab$ t. j. $4 . 17 . ab$ a jest tedy dělitelno sedmnácti.

Obdobně

$cdab = 100 . cd + ab = 200 . ab + ab = 201 . ab = 3 . 67 . ab$ pročež je dělitelno 67.

Tutéž úlohu řešili pp. *Václ. Spěvák*, z VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, *Frt. Kočí*, ze VII. tř. g. v Jičíně, *Vl. Novák*, ze VII. tř.

r. v Litomyšli, *Moric Hirsch*, ze VI. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Klír*, ze 6. tř. r. v Praze, *Karel Čermák*, ze VI. tř. g. v Něméckém Brodě, *Jar. Mašek, Karel Špaček* a *Ladislav Korejs*, ze VII. tř. r. městského r. g. v Praze.

Řešení úlohy 27. z roč. XII.

Položme $N = p(p^{12} - 1)$.

N jest dělitelno 13; je-li p dělitelno 13, je věc patrna, není-li p dělitelno 13, pak jest dle věty *Fermatovy* $p^{12} - 1$ dělitelno 13 a výrok opět dokázán.

Pišme nyní

$$N = p(p^6 - 1)(p^6 + 1),$$

tu shledáme zcela obdobně, že $p(p^6 - 1)$ jest vždy dělitelno sedmi, tedy platí totéž o N.

Pišme dále

$$N = p(p^4 - 1)(p^8 + p^4 + 1);$$

tu plyne obdobně, že $p(p^4 - 1)$ a tedy i N jest dělitelno pěti.

Píšeme-li

$$N = p(p^2 - 1)(p^2 + 1)(p^8 + p^4 + 1),$$

vidíme, že $p(p^2 - 1)$, tedy i N jest dělitelno třemi. Konečně ukazují v N se vyskytující faktory $p(p - 1)$, že je N dělitelno dvěma.

Nalezené divisory čísla N jsou nesoudělné, jest tedy N dělitelno jich součinem

$$2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 13 = 2730.$$

Řešení podali pp. *Vl. J. Novák*, ze VII. tř. r. v Litomyšli, *Ant. Pleskot*, ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 28. z roč XII.

(Řešení zaslal p. *Vl. J. Novák*, ze VII. tř. real. v Litomyšli.)

První parabola měj rovnici

$$y^2 = 2px$$

a druhá

$$x^2 = 2qy.$$

Buď bod x_1, y_1 na první parabole a bod x_2, y_2 na druhé, tedy

$$y_1^2 = 2px_1; \quad x_2^2 = 2qy_2. \qquad (\alpha)$$

Tečny v těchto bodech k parabolám sestrojené mají rovnice

$$yy_1 = p(x + x_1); \quad xx_2 = q(y + y_2), \qquad (\beta)$$

v nichž x, y jsou běžné souřadnice na tečnách. Směrnice těchto přímek jsou $\frac{p}{y_1}$ a $\frac{x_2}{q}$. Budou tedy sestrojené tečny k sobě kolmy, jestliže

$$\frac{px_2}{qy_1}+1=0. \qquad (\gamma)$$

Platí-li rovnice (α), (β), (γ) současně, jest patrně x, y průsečík dvou kolmých tečen a jde o to, stanoviti jeho geom. místo, čili relaci mezi x a y. Tuto obdržíme eliminací čtyř hodnot x_1, y_1, x_2, y_2 z rovnic (α), (β), (γ). — Dělíme-li rovnice (β), máme

$$\frac{xx_2}{yy_1}=\frac{q}{y}\,\frac{y+y_2}{x+x_1}$$

t. j. vůči (γ)

$$-\frac{x}{y}=\frac{y+y_2}{x+x_1}. \qquad (1)$$

Dělíme-li rovnice (α), máme

$$\left(\frac{x_2}{y_1}\right)^2=\frac{q}{p}\,\frac{y_2}{x_1}$$

t. j. vzhledem ku (γ)

$$\frac{q^2}{p^2}=\frac{q}{p}\,\frac{y_2}{x_1} \quad \text{t. j.} \quad \frac{y_2}{x_1}=\frac{q}{p}. \qquad (2)$$

Rovnice (1) a (2) jsou vzhledem ku x_1 a y_2 linearné a podávají, byvše řešeny,

$$x_1=-p\,\frac{x^2+y^2}{px+qy}; \quad y_2=-q\,\frac{x^2+y^2}{px+qy}. \qquad (A)$$

Vloživše tyto hodnoty do rovnic (β) obdržíme

$$y_1=p\,\frac{qx-py}{px+qy}; \quad x_2=-q\,\frac{qx-py}{px+qy}. \qquad (B)$$

Rovnice (A), (B) podávají souřadnice dotyčných bodů vyjádřené souřadnicemi x, y průsečíku kolmých tečen. Užijeme-li nyní jedné rovnice (α) na př. $y_1{}^2=2px_1$, obdržíme dosazením hodnot x_1, y_1 hledané geometrické místo

$$2\,(px+qy)\,(x^2+y^2)+(qx-py)^2=0. \qquad (C)$$

Jest to čára třetího stupně, jež má v počátku bod úvratu, v němž tečna jest dána rovnicí

$$qx-py=0.$$

Tím zodpověděna otázka první. V příčině druhé vidíme, že bodu x, y hovícímu rovnici (C) přísluší dle jednoznačných výrazů (A) a (B) na každé parabole jediný bod dotyčný *kolmých* tečen. Aby se vyskytly dva páry kolmých tečen, nutno, by výrazy

(A) a (B) se staly neurčitými, což jen při $x = 0$, $y = 0$ se stane, který případ však postrádá patrně geom. interesu.

Mimo počátek souřadnic neexistují tedy body, jež druhá otázka vytýká.

Abychom nalezli společnou tečnu obou parabol, stotožněme rovnice (β), t. j. položme

$$x_2 x - qy - qy_2 \equiv \lambda (px - y_1 y + px_1)$$

t. j. $\qquad x_2 = \lambda p; \; -q = -\lambda y_1; \; -q = \lambda p,$

z čehož jde $\qquad x_2 = -q; \; y_1 = -p,$

načež z rovnic parabol vypočteme

$$y_2 = \frac{q}{2}; \quad x_1 = \frac{p}{2}.$$

Jest tedy rovnice $yy_1 = p(x + x_1)$ společné tečny

$$x + y + \frac{p}{2} = 0,$$

z níž poloha její patrna.

Řešení úlohy 29. z roč. XII.

Budiž $\qquad A + B = A + C.$

β libovolná částka z B; tu existuje patrně také částka $\bar{\beta}$ z B, kde $\bar{\beta} > \beta$. Budiž $\bar{\beta} - \beta = \varepsilon$, tu lze vyjmouti z A částku α takovou, že *)

$$A = \alpha + A_1 \quad \text{a} \quad A_1 < \varepsilon.$$

$\alpha + \bar{\beta}$ jakožto částka z $A + B$ jest také částkou $A + C$. Tedy $\alpha + \bar{\beta} = \alpha_1 + \bar{\beta}_1$, kde α_1 je částkou z A, $\bar{\beta}_1$ částkou z C. Patrně tu platí

$$\bar{\beta}_1 > \beta.$$

Tedy: libovolná částka β z B jest částkou řady C. Opak zrovna tak platí, čímž dokázáno, že $B = C$. Dr. *K.*

Úloha 1.

Dokažte o kuželi o danou kouli opsaném a dvakráte tak vysokém jako koule:

a) že jest povrch jeho dvojnásobné povrchu koule,

b) že jest krychlový obsah jeho dvojnásobné obsahu koule a konečně

*) Místo tohoto výroku můžeme říci: Volíme částku α tak, že $\alpha + \varepsilon$ není více částkou řady A. Že takové částky existují, jde z definice řad na jevo.

c) že jest kužel tento nejmenší ze všech o kouli opsaných kuželů.

Ant. Kostěnec.

Úloha 2.

Úsek kruhový, jehož tětiva má danou délku t, otáčí se kolem průměru svírajícího s tětivou určitý úhel α; jak velký jest kr. obsah tělesa takto vzniklého?

Týž.

Úloha 3.

Jak velký jest kr. obsah K pravoúhlého rovnoběžnostěnu o pobočné hraně $c = 30$ cm., jest-li jeho úhlopříčná osa s pobočnými stěnami svírá úhly $\alpha = 24^\circ + 20'$ a $\beta = 45^\circ + 30'$?

Prof. *Vavř. Jelínek.*

Úloha 4.

Pobočnými stěnami jehlanu jsou čtyry shodné trojúhelníky o stranách $a = 11{\cdot}3$ cm., $b = 26{\cdot}5$ cm. a $c = 24{\cdot}7$ cm. Udejte jeho kr. obsah K, jsou-li strany a podstavnými jeho hranami!

Týž.

Úloha 5.

Kruhový válec jest o $D = 39\ dm^3$ větší, než rovně vysoký elliptický, má-li jeho delší osu průměrem, avšak o $d = 26\ dm^3$ menší, je-li jeho průměrem kratší osa ellipsy. Jak velký jest kr. obsah K prvního a k druhého válce kruhového i obsah ε elliptického?

Týž.

Úloha 6.

Otočí-li se prav. pětiúhelník kolem své výšky $v = 45$ cm., jak velkou plochu P opíše jeho obvod a jak velké těleso K jeho plocha?

Týž.

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

V letošních programech českých škol středních setkáváme se s několika mathematickými články, o nichž tuto stručně chceme promluviti.

Sedmá zpráva c. k. I. českého realného a vyššího gymnasia v Praze obsahuje články takové dva a sice:

1. *K nauce o determinantech.* Podává ředitel *J. Valenta.* (4 strany.) Pan spisovatel uvádí tu dva velmi praktické návody, jimiž lze determinant o stupeň snížiti a takto postupným snižováním až na druhý stupeň svésti, dodávaje k tomu, kterak lze zkoušeti správnost počtu. Za příklad uvedeno jest řešení soustavy rovnic prvého stupně o 5ti neznámých.