Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Drobnosti z geometrie. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 45 (1916), No. 1, 1–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121032`

Drobnosti z geometrie.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

1. Ellipsu, která v pravoúhlé soustavě souřadnic má rovnici

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

vyjadřme parametricky jednak zavedením úhlu Θ

$$x = a \cos \Theta, \quad y = b \sin \Theta,$$

jednak zavedením parametru racionalisačního

$$t = tx\,\frac{\Theta}{2},$$

tedy

$$x = a\,\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = b\,\frac{2t}{1 + t^2}. \tag{1}$$

Průsečíky ellipsy (1) *s kruhem*

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

určí se dosazením hodnot (1) do této rovnice; výsledek je rovnice 4. stupně

$$(a^2 + n - al)t^4 + 2bm(t^3 + t) + (4b^2 + 2n - 2a^2)t^2$$
$$+ (a^2 + al + n) = 0.$$

Základní souměrné úkony kořenů znamenejme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_1 &= t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \\
\mathfrak{f}_2 &= t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 \\
\mathfrak{f}_3 &= t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 \\
\mathfrak{f}_4 &= t_1t_2t_3t_4,
\end{aligned}$$

takže tyto veličiny t_ν jsou kořeny rovnice

$$t^4 - \mathfrak{f}_1t^3 + \mathfrak{f}_2t^2 - \mathfrak{f}_3t + \mathfrak{f}_4 = 0,$$

jež splývá s napsanou rovnicí stupně 4. V té mají mocnosti t^3 a t stejné činitele, t. j. platí

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3, \tag{2}$$

kterýžto vztah, jinak psán

$$t_1 t_2 t_3 t_4 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + \frac{1}{t_4}\right) = t_1 + t_2 + t_3 + t_4,$$

vyjadřuje podmínku nutnou a zároveň dostatečnou, aby čtyry body ellipsy ležely na kružnici.

Píšeme-li stručně $tg\,\varphi_\nu = t_\nu$, máme postupně

$$tg(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2},$$

$$tg(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = \frac{(t_1 + t_2 + t_3) - t_1 t_2 t_3}{1 - (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)},$$

a zavedeme-li symetrické úkony základní $\mathfrak{f}_\nu$ liter $t_1 \ldots t_4$,

$$tg(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{1 - \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_4}. \tag{3}$$

Podmínka (2) tedy podává

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = k\pi \text{ (}k\text{ celistvé)},$$

t. j. v našem případě

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 2k\pi. \tag{2'}$$

Toť podmínka, aby čtveřina bodů na ellipse *)

$$x_\nu = a \cos \Theta_\nu,\ y_\nu = b \sin \Theta_\nu\ (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

ležela na kruhu.

Je-li dána čtveřina $t_1 t_2 t_3 t_4$ svými souměrnými úkony, $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_3 \mathfrak{f}_4$, a je-li splněna podmínka (2), leží tyto čtyry body na kruhu, jehož rovnice zní

$$x^2 + y^2 - 2p(x + a) - 2qy = a^2 + \frac{4c^2}{\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 - 1}, \tag{4}$$

při čemž $$c^2 = a^2 - b^2,$$

$$p = \frac{c^2}{a} \frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 - 1}, \quad q = -\frac{c^2}{b} \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 - 1}. \tag{4'}$$

*) F. Joachimsthal v Crelleově žurn. sv. 36. (1847).

2. *Komplexní parametr.* Početní výsledky jsou značně jednodušší, užívá-li se na místě $t = tg \frac{\Theta}{2}$ parametru komplexního

$$z = e^{i\Theta} = \cos\Theta + i \sin\Theta,$$

takže parametrické vyjádření bodu na ellipse bude zníti

$$x = a\frac{z^2+1}{2z}, \quad y = b\frac{z^2-1}{2iz}; \tag{5}$$

zejména bude

$$x + iy = a'z + \frac{b'}{z}, \quad x - iy = b'z + \frac{a'}{z}, \tag{5^1}$$

píše-li se

$$a' = \frac{a+b}{2}, \quad b' = \frac{a-b}{2}.$$

Rovnici kruhu možno psáti

$$(x+iy)(x-iy) - 2px - 2qy + n = 0, \tag{6}$$
$$n = p^2 + q^2 - r^2,$$

kde p, q jsou souřadnice středu a r poloměr.

Parametry průsečíků s ellipsou hoví tedy rovnici dle (5) a (5^1)

$$(a'z^2 + b')(b'z^2 + a') - apz(z^2+1)$$
$$+ ibqz(z^2-1) + nz^2 = 0$$

čili

$$a'b'(z^4+1) + (a'^2 + b'^2 + n)z^2 - (ap - ibq)z^3$$
$$-(ap+ibq)z = 0.$$

Znamenáme-li základní souměrné úkony kořenů z_1, z_2, z_3, z_4 opětně literami $\mathfrak{f}_\nu$, takže tyto mají nyní *jiný význam* než v odst. 1., bude

$$a'b'\mathfrak{f}_1 = ap - ibq, \quad a'b'\mathfrak{f}_3 = ap + ibq,$$
$$a'b'\mathfrak{f}_2 = a'^2 + b'^2 + n,$$

a zejména bude

$$\mathfrak{f}_4 = z_1 z_2 z_3 z_4 = 1, \tag{7}$$

čímž podmínka *soukružné* čtveřiny vychází bezprostředně ve tvaru

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = 2k\pi, \quad (k \text{ celistvé}).$$

Znamenáme-li nadále

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad a^2 + b^2 = d^2,$$

bude lze napsané právě vztahy mezi konstantami kruhu a veličinami $\mathfrak{f}_\nu$ psáti takto:

$$p = \frac{c^2}{8a}(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3), \quad q = \frac{c^2 i}{8b}(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3). \tag{8}$$

$$p^2 + q^2 - r^2 = \frac{c^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{d^2}{2} = n, \tag{8'}$$

takže rovnice kruhu vedeného naší čtveřinou zní

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \frac{c^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{d^2}{2} = 0. \tag{8²}$$

Napsané výrazy (8) pro souřadnice středu jsou svojí jednoduchostí a při našem postupu nejvhodnější k výpočtům. Nicméně stůj zde jednoduchý realní jich tvar, který vychází z rovnice (7), t. j.

$$e^{i(\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3)} = e^{-i\Theta_4} \quad \text{a t. d.},$$

podle čehož bude

$$\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = 2\sum_{\nu=1}^{4} \cos\Theta_\nu$$

$$\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = 2i\sum_{\nu=1}^{4} \sin\Theta_\nu,$$

takže *)

$$p = \frac{c^2}{4a}\sum_{\nu=1}^{4} \cos\Theta_\nu, \quad q = -\frac{c^2}{4b}\sum_{\nu=1}^{4} \sin\Theta_\nu. \tag{8³}$$

Ve výrazu

$$\mathfrak{f}_2 = \Sigma\, z_\alpha z_\beta$$

vypadne pomyslná část na základě vztahů

$$\Theta_1 + \Theta_2 = 2k\pi - (\Theta_3 + \Theta_4), \text{ atd.}$$

*) Těžiště (hmotný střed) čtyř bodů Θ_ν má souřadnice

$$X = \frac{1}{4}\Sigma x_\nu = \frac{a}{4}\Sigma\cos\Theta_\nu$$

$$Y = \frac{1}{4}\Sigma y_\nu = \frac{b}{4}\Sigma\sin\Theta_\nu,$$

tedy platí v našem případě vztahy

$$p = \frac{c^2}{a^2}X, \quad q = -\frac{c^2}{b^2}Y.$$

a zůstane po dělení dvěma

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\mathfrak{f}_2 &= cos(\Theta_1 + \Theta_2) + cos(\Theta_2 + \Theta_3) + cos(\Theta_3 + \Theta_1) \\ &= cos(\Theta_1 + \Theta_2) + cos(\Theta_1 + \Theta_3) + cos(\Theta_1 + \Theta_4) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Je-li kruh dán třemi body o parametrech úhlových Θ_1, Θ_2, Θ_3, připojíme čtvrtý bod o parametru $-(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$, načež budou konstanty kruhu zníti:

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2}{4a}\left[\sum_{\nu=1}^{3} cos\,\Theta_\nu + cos(\Sigma\,\Theta_\nu)\right] \\ q &= -\frac{c^2}{4b}\left[\sum_{\nu=1}^{3} sin\,\Theta_\nu - sin(\Sigma\,\Theta_\nu)\right] \\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{f}_2 &= cos(\Theta_1 + \Theta_2) + cos(\Theta_2 + \Theta_3) + cos(\Theta_3 + \Theta_1). \end{aligned}\right\} \tag{8^4}$$

---

3. *Plocha trojúhelníka,* jehož vrcholy leží na ellipse a mají úhlové parametry Θ_1, Θ_2, Θ_3.

Pro ploský obsah Δ našeho trojúhelníka máme výraz ve zkráceném psaní determinantu

$$2\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix}, \quad x = a\frac{z^2+1}{2z}, \quad y = b\frac{z^2-1}{2iz},$$

tedy

$$2\Delta = \frac{ab}{4iz_1z_2z_3}\begin{vmatrix} z^2+1, & z^2-1, & z \end{vmatrix};$$

odečteme-li druhý sloupec od prvního, vyjme se z prvního sloupce činitel 2, načež lze potlačiti v druhém sloupci členy -1; přehodíme-li ještě sloupec druhý a třetí, zůstane

$$-4\Delta i = \frac{ab}{z_1z_2z_3}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2 \\ 1, & z_2, & z_2^2 \\ 1, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}.$$

Pro plochu trojúhelníka $z_1z_2z_3$ máme tedy výraz

$$\Delta = \frac{abi}{4}\frac{(z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)}{z_1z_2z_3}. \tag{9}$$

Poněvadž

$$\frac{(z_2-z_1)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} - 2 = -2\,(1-\cos\,(\Theta_2-\Theta_1))$$
$$= -4\,\sin^2\frac{\Theta_2-\Theta_1}{2},$$

můžeme na místě (9) psáti

$$\varDelta = \pm\, 2ab\,\sin\frac{\Theta_1-\Theta_2}{2}\,\sin\frac{\Theta_2-\Theta_3}{2}\,\sin\frac{\Theta_3-\Theta_1}{2}. \quad (9^*)$$

---

4. *Rovnostranná hyperbola* vedená čtyřmi body na ellipse. Obecná rovnice rovnostranné hyperboly zní

$$a_{11}(x^2-y^2) + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Jejím průsekům s ellipsou odpovídají parametry $z = e^{i\Theta}$, pro něž

$$x = a\,\frac{z^2+1}{2z}, \quad y = b\,\frac{z^2-1}{2iz},$$

a tedy hoví rovnici stupně 4.

$$a_{11}\left[a^2(z^2+1)^2 + b^2(z^2-1)^2\right] - 2a_{12}abi\,(z^4-1)$$
$$+ 4a_{13}az\,(z^2+1) - 4a_{23}biz\,(z^2-1) + 4a_{33}z^2 = 0.$$

Píšeme-li ji

$$A_0\,z^4 + A_1z^3 + A_2z^2 + A_3z + A_4 = 0,$$

bude vzhledem k definicím $a^2 - b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 = d^2$

$$\begin{aligned} A_0 &= a_{11}d^2 - 2a_{12}abi,\\ A_4 &= a_{11}d^2 + 2a_{12}abi,\\ A_2 &= 2a_{11}c^2 + 4a_{33},\\ A_1 &= 4a_{13}a - 4a_{23}bi,\\ A_3 &= 4a_{13}a + 4a_{23}bi; \end{aligned}$$

z těchto rovnic vycházejí rovnice rovnomocné

$$A_1 + A_3 = 8a_{13}a, \qquad A_1 - A_3 = -8a_{23}bi,$$
$$A_4 + A_0 = 2a_{11}d^2, \qquad A_4 - A_0 = 4a_{12}abi,$$
$$4a_{33} = A_2 - \frac{A_0 + A_4}{d^2}\,c^2.$$

Znamenáme-li kořeny rovnice této opět $z_1z_2z_3z_4$ a jich souměrné úkony $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4$, bude

$$A_1 = -A_0\mathfrak{f}_1, \qquad A_2 = A_0\mathfrak{f}_2, \qquad A_3 = -A_0\mathfrak{f}_3, \qquad A_4 = A_0\mathfrak{f}_4,$$

takže nalezneme pro konstanty rovnostranné hyperboly vedené čtyřmi body $z_1 \dots z_4$ výrazy

$$a_{11} = A_0 \frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{2d^2}, \qquad 2a_{12} = A_0 \frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{2abi},$$

$$2a_{13} = -A_0 \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4a}, \qquad 2a_{23} = A_0 \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4bi},$$

$$a_{33} = \frac{1}{4} A_0 \mathfrak{f}_2 - A_0 \frac{c^2}{4d^2} (\mathfrak{f}_4 + 1),$$

t. j. *rovnostranná hyperbola vedená čtyřmi body na ellipse* $z_1 z_2 z_3 z_4$ $(z_\nu = e^{i\Theta_\nu})$ *má rovnici*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{2d^2}(x^2 - y^2) + \frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{2abi}\, xy - \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4a}\, x + \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4bi}\, y \\ &\qquad + \frac{\mathfrak{f}_2}{4} - \frac{c^2}{4d^2}(\mathfrak{f}_4 + 1) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

---

5. *Rovnostranná hyperbola čtveřiny kruhové.* Leží-li body z_1, z_2, z_3, z_4 na kruhu, jest $\mathfrak{f}_4 = 1$ a rovnice (10) se zjednoduší takto:

$$\frac{x^2 - y^2}{d^2} - \frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4a}\, x + \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4bi}\, y + \frac{1}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{c^2}{2d^2} = 0. \quad (11)$$

Při tom jest, značí-li p, q souřadnice středu kruhu, dle (8)

$$\frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4a} = \frac{2p}{c^2}, \qquad \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4bi} = -\frac{2q}{c^2},$$

takže rovnice (11) se může psáti

$$x^2 - y^2 - 2\frac{d^2}{c^2}(px + qy) + \left(\frac{d^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{c^2}{2}\right) = 0. \quad (11^*)$$

Znamenáme-li stálý člen

$$\frac{d^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{c^2}{2} = n',$$

máme vzhledem k hodnotě stálého členu v rovnici kruhu

$$\frac{c^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{d^2}{2} = n$$

vztah

$$c^2 n' - d^2 n = \frac{d^4 - c^4}{2} = 2a^2 b^2. \quad (11^1)$$

Současně vyjde sečtením a odečtením obou rovnic

$$\frac{1}{2}\mathfrak{k}_2 - 1 = \frac{n' + n}{a^2}, \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{k}_2 + 1 = \frac{n' - n}{b^2}. \qquad (11^2)$$

Kruh

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + n = 0$$

a hyperbola rovnostranná

$$x^2 - y^2 - 2\frac{d^2}{c^2}(px + qy) + n' = 0$$

protnou ellipsu (a, b) *v týchž bodech, je-li splněna podmínka* (11^1).

Osy hyperboly (11*) jsou rovnoběžny s osami ellipsy (a, b), a její střed má souřadnice

$$x_0 = \frac{d^2}{c^2}p, \qquad y_0 = -\frac{d^2}{c^2}q. \qquad (12)$$

Rovnici hyperboly naší možno psáti

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 - n',$$

i je zřejmo, že se hyperbola rozpadne ve dvě (na sobě kolmé) přímky, je-li

$$x_0^2 - y_0^2 = n';$$

přímky ty svírají s osami ellipsy úhly $\pm 45^0$.

Vyjádřena v souřadnicích středu p, q zní tato podmínka

$$n' = \frac{d^4}{c^4}(p^2 - q^2).$$

Avšak dle (11^1) máme vzhledem k hodnotě $n = p^2 + q^2 - r^2$:

$$c^2 n' = 2a^2b^2 + d^2(p^2 + q^2 - r^2);$$

tedy máme po vyloučení n' vztah

$$\frac{d^4}{c^2}(p^2 - q^2) = 2a^2b^2 + d^2(p^2 + q^2 - r^2)$$

čili

$$d^2(p^2 - q^2) = \frac{2a^2b^2c^2}{d^2} + c^2(p^2 + q^2 - r^2)$$

aneb po redukci

$$b^2p^2 - a^2q^2 + \frac{c^2}{2}r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{d^2}. \qquad (13)$$

Této rovnici musí hověti střed (p, q) a poloměr r kruhu, mají-li jeho průsečné body s ellipsou (a, b) ležeti na dvou na sobě kolmých tětivách.

Je zřejmo, že kruhům této vlastnosti, leží-li kromě toho jejich středy na hyperbolách,

$$b^2x^2 - a^2y^2 = konst.,$$

příslušejí stejné poloměry, a naopak.

Zejména úhlopříčny obdélníka vrcholového čili *hlavní příčky*

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

tvoří takovou hyperbolu, a příslušné kruhy mají poloměr

$$r = \frac{ab}{d}\sqrt{2}:$$

Kruhy poloměru $\frac{ab}{d}\sqrt{2}$ *mající středy na jedné z hlavních příček protínají ellipsu* (a, b) *ve čtyřech bodech, jichž dvě tětivy svírají s osami ellipsy úhly* $\pm 45^0$ *a protínají se na druhé hlavní příčce v bodě na poloměru kruhovém, jenž stojí kolmo na první hlavní příčce.*

Dodatek uvedený se dokáže takto: Souřadnice průseku tětiv znějí dle (12)

$$x_0 = \frac{d^2}{c^2}p, \qquad y_0 = -\frac{d^2}{c^2}q,$$

a poněvadž střed (p, q) je na příčce

$$\frac{q}{p} = \varepsilon\frac{b}{a}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

má poloměr vedený průsekem tětiv směrnici

$$\frac{y_0 - q}{x_0 - p} = -\frac{d^2 + c^2}{d^2 - c^2}\frac{q}{p} = -\frac{a^2}{b^2}\frac{q}{p} = -\varepsilon\frac{a}{b},$$

t. j. stojí kolmo na příčce hlavní.

Obrácená věta:

Šine-li se pravý úhel tak, aby jeho ramena svírala s osami ellipsy úhly 45^0 *a jeho vrchol probíhal jednu z hlavních příček* *této ellipsy, protínají jeho ramena ellipsu ve čtyřech bodech ležících na kruhu stálého poloměru* $\frac{ab}{d}\sqrt{2}$ *a jeho střed splývá s pravoúhlým průmětem pohyblivého vrcholu do druhé hlavní příčky.*

Jsou-li l, l' délky tětiv na ramenech pravého úhlu, r stálý poloměr $\frac{ab}{d}\sqrt{2}$, nalezneme snadno vztah

$$\frac{4r^2-l^2}{4r^2-l'^2}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

Znamenejme

$$K_\nu = x^2+y^2-2p_\nu x-2q_\nu y+n_\nu,$$

$$H_\nu = x^2-y^2-2\frac{d^2}{c^2}(p_\nu x+q_\nu y)+n'_\nu,$$

$$c^2n'_\nu-d^2n_\nu=2a^2b^2, \qquad (\nu=1,\ 2).$$

Kruhům svazku

$$K_1+\lambda K_2=0$$

odpovídají rovnostranné hyperboly spolusečné, jež tvoří taktéž svazek

$$H_1+\lambda H_2=0;$$

jeho dva vrcholy leží v nekonečně vzdálených bodech přímek $x\pm y=0$.

Chordála svazku kruhů má rovnici

$$(p_1-p_2)\,x+(q_1-q_2)\,y=\frac{n_1-n_2}{2},$$

chordála svazku hyperbol pak

$$\frac{d^2}{c^2}\,[(p_1-p_2)\,x+(q_1-q_2)\,y]=\frac{n'_1-n'_2}{2}.$$

Poněvadž

$$c^2\,(n'_1-n'_2)=d^2\,(n_1-n_2),$$

splývají obě rovnice; tedy

Rovnostranné hyperboly určené čtveřinami bodů na ellipse, v nichž tato protíná kruhy libovolného svazku, tvoří rovněž svazek. Jeho dva vrcholy jsou v nekonečnu a druhé dva leží na chordále svazku kruhového.

Střed kruhu $K_1 + \lambda K_2$ má souřadnice

$$p = \frac{p_1 + \lambda p_2}{1 + \lambda}, \qquad q = \frac{q_1 + \lambda q_2}{1 + \lambda},$$

a probíhá přímku; střed hyperboly má souřadnice

$$x_0 = \frac{d^2}{c^2} p, \qquad y_0 = -\frac{d^2}{c^2} q$$

a probíhá rovněž přímku, která je s přímkou předešlou vůči ose Ox symetricky nakloněna.

Hyperbola naše (11*)

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = x_0^2 - y_0^2 - n'$$

má ohniska

$$y = y_0, \qquad x = x_0 \pm \sqrt{2(x_0^2 - y_0^2 - n')},$$

pokud výraz x je reálný. Avšak

$$2(x_0^2 - y_0^2 - n') = \frac{2}{c^4}\left[d^4(p^2 - q^2) - c^2(d^2 n + 2a^2b^2)\right]$$

$$= \frac{2d^2}{c^4}\left[d^2(p^2 - q^2) - c^2(p^2 + q^2 - r^2) - \frac{2a^2b^2c^2}{d^2}\right]$$

$$= \frac{4d^2}{c^4}\left[b^2p^2 - a^2q^2 + \frac{c^2r^2}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{d^2}\right],$$

t. j. ohniska hyperboly příslušné ke kruhu (p, q, r) jsou buď

$$y = -\frac{d^2}{c^2} q, \quad x = \frac{d^2}{c^2} p \pm \frac{2d}{c^2}\sqrt{b^2p^2 - a^2q^2 + \frac{c^2r^2}{2} - \frac{a^2b^2c^2}{d^2}} \tag{14a}$$

aneb

$$x = \frac{d^2}{c^2} p, \quad y = -\frac{d^2}{c^2} q \pm \frac{2d}{c^2}\sqrt{a^2q^2 - b^2p^2 - \frac{c^2r^2}{2} + \frac{a^2b^2c^2}{d^2}} \tag{14b}$$

podle toho, která odmocnina je reálná.

Zvolíme-li r stálé a dáme-li středu kružnice (p, q) probíhati hyperbolu

$$a^2q^2 - b^2p^2 = konst.,$$

budou rovnostranné hyperboly příslušné k těmto kružnicím míti stálou výstřednost.

Souřadnice ohniska v případě (14^a) jsou pak

$$y = -\frac{d^2}{c^2}\,q, \qquad x = \frac{d^2}{c^2}\,p + \frac{2dab}{c^2}\,\varkappa,$$

kde

$$\varkappa^2 = \frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} + \frac{c^2r^2}{2a^2b^2} - \frac{c^2}{d^2}$$

je stálé. Dosadíme-li sem

$$p = \frac{c^2}{d^2}\left(x - \frac{2abd}{c^2}\,\varkappa\right), \qquad q = -\frac{c^2}{d^2}\,y,$$

vyjde

$$\frac{c^4}{d^4}\left[\left(\frac{x}{a} - \frac{2bd\varkappa}{c^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2}\right] + \frac{c^2r^2}{2a^2b^2} - \frac{c^2}{d^2} = \varkappa^2.$$

Ohniska hyperbol probíhají tedy hyperboly různostranné

$$\left(\frac{x}{a} \pm \frac{2bd\varkappa}{c^2}\right)^2 - \frac{y^2}{b^2} = \frac{d^2}{c^2}\left(\frac{d^2\varkappa^2}{c^2} - \frac{d^2r^2}{2a^2b^2} + 1\right).$$

Podobný výsledek podá případ (14^b).

---

6. *Skupiny* $\mathfrak{k}_4 = -1$.

Čtveřina, pro niž $z_1z_2z_3z_4 = -1$, čili

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4 = (2k+1)\,\pi, \qquad (k \text{ celistvé})$$

nemůže náležeti témuž kruhu. Pro tyto skupiny se rovnice rovnostranné hyperboly (10) zvláště zjednoduší:

$$\frac{xy}{ab} + i\,\frac{\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3}{4}\,\frac{x}{a} - \frac{\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3}{4}\,\frac{y}{b} = \frac{i}{4}\,\mathfrak{k}_2. \tag{15}$$

Rovnostranné hyperboly mají v tomto případě asymptoty rovnoběžné s osami ellipsy.

Vztahy

$$z_1z_2z_3 = -\frac{1}{z_4} \quad \text{atd.}$$

podávají

$$\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3 = 2i\sum_{\nu=1}^{4} sin\,\Theta_\nu$$

$$\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3 = 2\sum_{1}^{4} cos\,\Theta_\nu$$

dále

$$z_1 z_2 = -\frac{1}{z_3 z_4}, \quad \ldots$$

a tedy

$$\mathfrak{f}_2 = 2i\,[sin\,(\Theta_1 + \Theta_4) + sin\,(\Theta_2 + \Theta_4) + sin\,(\Theta_3 + \Theta_4)]$$

čili

$$\mathfrak{f}_2 = 2i\,[sin\,(\Theta_1 + \Theta_2) + sin\,(\Theta_2 + \Theta_3) + sin\,(\Theta_3 + \Theta_1)].$$

Rovnici (15) lze psáti

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4}\right)\left(\frac{y}{b} + i\,\frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4}\right) = \frac{i}{4}\,\mathfrak{f}_2 - i\,\frac{\mathfrak{f}_1^2 - \mathfrak{f}_3^2}{16}. \quad (15')$$

Střed hyperboly má tedy souřadnice

$$x_0 = a\,\frac{\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3}{4} = \frac{a}{2}\sum_1^4 cos\,\Theta_\nu,$$

$$y_0 = -\,bi\,\frac{\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3}{4} = \frac{b}{2}\sum_1^4 sin\,\Theta_\nu.$$

Znamenáme-li jej C, hmotný střed (těžiště) bodů $z_1 z_2 z_3 z_4$ pak S, máme barycentrickou rovnici

$$C + O = 2S,$$

t. j. *hmotný střed bodů* $z_1 z_2 z_3 z_3$ *leží uprostřed mezi středem ellipsy a středem rovnostranné hyperboly.*

Podmínkou zde jest, aby $\Sigma\,\Theta_\nu = (k + 1)\,\pi$, k celistvé.

Je-li z'_4 bod diametrálně protější k z_4, bude

$$\Theta'_4 = \Theta_4 \pm \pi, \qquad z'_4 = -\,z_4,$$

a tedy

$$z_1 z_2 z_3 z'_4 = +\,1,$$

t. j. *diametrální protějšek* z'_4 *bodu* z_4 *leží s ostatními třemi body skupiny na kruhu.*

Obráceně: *Leží-li 4 body ellipsy na kruhu, tvoří diametrální protějšek jednoho z nich na ellipse s ostatními čtyřúhelník, jehož vrcholové těžisko leží uprostřed mezi středem ellipsy a středem rovnostranné hyperboly tomuto čtyřúhelníku opsané. Její asymptoty jsou rovnoběžny s osami ellipsy.*

Buďtež M_ν čtyři soukružné body na ellipse (a, b), body M'_ν protilehlé s M_ν, pak je vektor

$$OM'_\nu = - OM_\nu,$$

čili barycentricky

$$M_\nu + M'_\nu = 2O. \qquad (\alpha_\nu)$$

Pro těžiště S_4 a S čtveřin uvažovaných platí rovnice

$$M_1 + M_2 + M_3 + M'_4 = 4S_4 \qquad (\beta)$$
$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 4S, \qquad (\gamma)$$

z nich plyne pak kombinací $(\gamma) - (\beta) + (\alpha_4)$ vztah:

$$M_4 + 2S_4 = O + 2S,$$

a značí-li C_4 střed rovnostranné hyperboly $(M_1 M_2 M_3 M'_4)$, jest

$$2S_4 = O + C_4,$$

tedy

$$M_4 + C_4 = 2S:$$

Těžiště čtyř bodů soukružných $M_1 M_2 M_3 M_4$ na ellipse leží uprostřed mezi jedním z nich M_4 a středem rovnostranné hyperboly, která prochází ostatními třemi body M_1, M_2, M_3 a má asymptoty rovnoběžné s osami ellipsy. Hyperbola ta obsahuje též bod M'_4 diametrálně protilehlý bodu M_4.

Tímto způsobem, dáme-li za M_4 postupně všecky body skupiny, obdržíme 4 hyperboly se středy C_1, C_2, C_3, C_4; z rovnic

$$M_\nu + C_\nu = 2S$$

pak plyne sečtením

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4S,$$

t. j. *středy čtyř rovnostranných hyperbol, k nimž kruhová čtveřina na ellipse dá tímto způsobem podnět, mají totéž těžiště jako daná čtveřina.*

---

7. *Oskulační kruh a tětiva.*

Nechť ze čtyř průseků ellipsy s kruhem tři splynou s daným bodem z; čtvrtý průsek z_0 je pak zcela určitý a je dán vztahem

$$z_0 z^3 = 1 \qquad (z = e^{i\Theta},\ z_0 = e^{i\Theta_0}),$$

čili v úhlech vyjádřeno

$$3\Theta + \Theta_0 = 0.$$

Kruh sluje oskulační kružnice v bodě z, jeho střed je střed křivosti a přímka $\overline{zz_0}$ je *tětiva oskulační**) bodu z, bod z její *pata*.

Rovnice kruhu oskulačního v bodě z zní dle (8[2])

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \frac{c^2}{4}\mathfrak{f}_2 - \frac{d^2}{2} = 0,$$

kde (8[4])

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{c^2}{4a}(\cos 3\Theta + 3\cos\Theta) = \frac{c^2}{a}\cos^3\Theta \\ q &= \frac{c^2}{4b}(\sin 3\Theta - 3\sin\Theta) = -\frac{c^2}{b}\sin^3\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\mathfrak{f}_2 = 6\cos 2\Theta.$$

Výrazy (16) podávají souřadnice středu křivosti příslušného k bodu $z = e^{i\Theta}$ na ellipse a rovnice oskulačního kruhu jest

$$x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \frac{3}{2}c^2\cos 2\Theta - \frac{d^2}{2} = 0.^{**)} \qquad (16^1)$$

Výraz pro poloměr křivosti ϱ, který odtud vychází dle rovnice

$$p^2 + q^2 - \varrho^2 = \frac{3}{2}c^2\cos 2\Theta - \frac{d^2}{2},$$

t. j.

$$\varrho^2 = \frac{d^2}{2} + p^2 + q^2 - \frac{3}{2}c^2\cos 2\Theta \qquad (16^2)$$

není tak jednoduchý jako***)

$$\varrho = \frac{(a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad (17)$$

---

*) Tyto přímky uvažoval A. del Re, Giornale di Mat. 22 (1884).

**) Poláry oskulačních kruhů pro pól O obalují čáru, pro niž nalezneme vyjádření souřadnic

$$x = x_0 - \frac{g^2}{x_0}, \quad y = y_0 + \frac{g^2}{y_0}, \quad g = \frac{ab}{c},$$

při čemž x_0, y_0 je bod ellipsy, v němž uvažujeme oskulační kruh.

***) Buď N bod o souřadnicích

$$\xi = b\cos\Theta, \qquad \eta = a\sin\Theta;$$

přímka ON je kolmá na tečnu a má délku

$$l = \sqrt{a^2\sin^2\Theta + b^2\cos^2\Theta}.$$

Pro vzdálenost tečny od středu δ a poloměr křivosti ϱ máme

$$\delta = \frac{ab}{l}, \quad \varrho = \frac{l^3}{ab}, \quad \varrho\delta = l^2.$$

který vychází přímo z obecného vzorce

$$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}, \qquad x = a \cos \Theta, \qquad y = b \sin \Theta,$$

při čemž d je symbol differenciační.

Tětiva spojující body $z_1\,(\Theta_1)$ a $z_2\,(\Theta_2)$. Souřadnice daných bodů jsou

$$(\Theta_1) \qquad x = a\,\frac{z_1^2+1}{2z_1}, \qquad y = b\,\frac{z_1^2-1}{2iz_1},$$

$$(\Theta_2) \qquad x = a\,\frac{z_2^2+1}{2z_2}, \qquad y = b\,\frac{z_2^2-1}{2iz_2}$$

a tedy rovnice přímky $\overline{z_1 z_2}$ zní

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{iy}{b}, & 1 \\ z_1^2+1, & z_1^2-1 & 2z_1 \\ z_2^2+1, & z_2^2-1 & 2z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Odečteme-li druhý řádek od třetího a dělíme $z_2 - z_1$, vyjde na místě dvou posledních řádků

$$\begin{vmatrix} z_1^2+1, & z_1^2-1, & 2z_1 \\ z_1+z_2, & z_1+z_2, & 2 \end{vmatrix};$$

tu odečtěme od druhého řádek třetí násobený z_1 a obdržíme hledanou rovnici ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a}, & \frac{iy}{b}, & 1 \\ 1 - z_1 z_2, & -1 - z_1 z_2, & 0 \\ z_1 + z_2, & z_1 + z_2, & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

aneb po rozvinutí determinantu

$$(1 + z_1 z_2)\,\frac{x}{a} + (1 - z_1 z_2)\,\frac{iy}{b} = z_1 + z_2. \tag{18}$$

Plückerovy souřadnice tětivy $\overline{z_1 z_2}$ jsou tedy

$$u = -\frac{1}{a}\,\frac{1 + z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \qquad v = -\frac{i}{b}\,\frac{1 - z_1 z_2}{z_1 + z_2}, \tag{18'}$$

$(z_\nu = e^{i\Theta_\nu})$.

Pro tětivu oskulační třeba dosaditi $z_1 = z$, $z_2 = \frac{1}{z^3}$, tedy

$$z_1 z_2 = \frac{1}{z^2}, \qquad z_1 + z_2 = \frac{z^4 + 1}{z^3}$$

a odtud

$$\frac{1 + z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z^3 + z}{z^4 + 1}, \qquad \frac{1 - z_1 z_2}{z_1 + z_2} = \frac{z^3 - z}{z^4 + 1},$$

tedy pro hledané *souřadnice* u, v *oskulační tětivy bodu* z rovnice

$$-au = \frac{z^3 + z}{z^4 + 1}, \qquad -bv = i\,\frac{z^3 - z}{z^4 + 1}, \tag{19}$$

aneb ve tvaru reálném

$$au = -\frac{\cos\Theta}{\cos 2\Theta}, \qquad bv = \frac{\sin\Theta}{\cos 2\Theta}, \tag{19^0}$$

takže tangenciální rovnice obalové čáry zní

$$(a^2u^2 - b^2v^2)^2 = a^2u^2 + b^2v^2.$$

Rovnice oskulační tětivy bodu Θ tedy zní

$$\frac{x\cos\Theta}{a} - \frac{y\sin\Theta}{b} = \cos 2\Theta, \tag{19^1}$$

kdežto rovnice tečny v témž bodě jest

$$\frac{x\cos\Theta}{a} + \frac{y\sin\Theta}{b} = 1.$$

Porovnáním těchto rovnic vychází, že *směrnice oskulační tětivy se liší od směrnice tečny pouze znamením,* takže *oskulační tětiva bodu Θ jest rovnoběžna s tečnou v bodě* $-\Theta$ s předešlým vůči ose Ox symetricky položeným.

Značí-li x, y souřadnice bodu na ellipse, y' směrnici tečny (derivaci), možno rovnici oskulační tětivy též psáti

$$Y - y + y'(X - x) = 0.$$

Rozvinutý tvar plyne přímo z (19^1)

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{19^2}$$

Vzdálenost středu od tečny δ a od tětivy oskulační δ' hoví rovnici $\delta' = \delta\cos 2\Theta$.

(Pokračování.)