Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 30 (1901), No. 4, 306--340

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121018`

na škole střední jakožto nápadné ukázky interference světla v rozměrech velkých, alespoň co do stránky povšechné, třeba bez věcného vysvětlení, k doplnění pravidelného ač velmi drobounkého zjevu na skle Newtonově, k čemuž se snadností demonstrace ještě zvlášť doporučuje.

Úlohy.

Úloha 36.

$$\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{b}{\sqrt{x^2-b^2}}+\frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}=\frac{abc}{\sqrt{(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)}}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 37.

Ustanoviti jest dvě čísla, jichž největší společná míra jest 360 a nejmenší společný násobek 32400.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 38.

V zahradě vysázena řada stromků, z nichž jeden od druhého 5 m vzdálen. V prodloužení této řady stojí nádržka vodní. Zahradník zalévaje stromky a chodě po zalití každého stromku zase k nádržce zpět, ušel těmito cestami po zalití všech stromků, vrátiv se od posledního též zpět k nádržce, celkem 13750 m. Víme-li, že od posledního stromku k nádržce jest 260 m, jest vypočítati: kolik stromů jest v řadě a v jaké vzdálenosti jest první stromek od nádržky.

Stud. techn. *Vlad. Ibl.*

Úloha 39.

V trojúhelníku abc vésti jest příčky

$$a_1a_2 \parallel cb,\quad b_1b_2 \parallel ac,\quad c_1c_2 \parallel ba$$

tak, aby šestiúhelník $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ *byl rovnostranný. Jsou-li a, b, c strany trojúhelníka, x strana šestiúhelníka, jest dokázati, že*

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 40.

Dokažte, že v šestiúhelníku $a_1a_2b_1b_2c_1c_2$ předešlé úlohy spojnice a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 protínají se v jediném bodě, jehož vzdálenosti od stran a, b, c původního trojúhelníka jsou v poměru

$$(b+c):(c+a):(a+b).$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 41.

Každý vrchol čtverce spojen jest s body půlícími protější strany; spojnice tyto omezují rovnostranný čtyrosý osmiúhelník. Vypočísti jest obsah mnohoúhelníka a poloměr vepsané jemu kružnice, dána-li strana čtverce.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 42.

Přímky půlící vnitřní úhly nerovnostranného rovnoběžníka omezují rovnoběžník pravoúhlý. Jest dokázati, že úhlopříčky tohoto rovnoběžníka jsou rovnoběžny ku stranám původního a jest ustanoviti jich délku.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 43.

Úhlopříčky pravidelného osmiúhelníka omezují dva menší pravidelné osmiúhelníky. Je-li A obsah největšího, B prostředního a C nejmenšího, jest dokázati, že

$$B=\frac{1}{2}(A+C).$$

Posl. fil. *Inocenc Hanzlík.*

Úloha 44.

V trojúhelníku jest

$$tg\,\alpha : tg\,\beta : tg\,\gamma = 1:2:3;$$

v kterém poměru jsou a) jeho strany, b) jeho výšky, c) svrchní části výšek, d) spodní části výšek? Řed. *A. Strnad.*

Úloha 45.

Sestrojte trojúhelník, dána-li strana a, protilehlý úhel α a poloměr ρ kružnice vně vepsané a strany a se dotýkající.

Prof. *Jindř. Muk* v Rychnově n. K.

Úloha 46.

Řešiti jest rovnici

$$\cos^4 x\,(\sin^3 x + \sin 3x - \cos 3x) - \sin^4 x\,(\cos^3 x + \sin 3x - \cos 3x)$$
$$= \sin^7 x - \cos^7 x.$$

Prof. *Jindřich Muk* v Rychnově n. K.

Úloha 47.

Úhlopříčky pravidelného pětiúhelníka o straně a tvoří hvězdovitý pětiúhelník 2. řádu. Tvoří-li tento pětiúhelník síť jehlanu, jest určiti povrch i obsah jehlanu, poloměr koule vepsané a opsané, stěnové úhly jehlanu.

Frant. Jirsák, učitel v Dobřenicích.

Úloha 48.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány body

$$a\,(-5, b),\ b\,(0, 5),\ c\,(4, 3),\ d\,(3, -4).$$

Dokažte, že body ty leží na kružnici; ustanovte rovnici této kružnice; vypočítejte strany, úhlopříčky a obsah čtyrúhelníka abcd.

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Úloha 49.

Do ellipsy vepsati jest kosočtverec, jehož strany délka jest dána.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 50.

Do kuželosečky dané v pravoúhlé soustavě rovnicí

$$y^2 = x\,(12 - x) - 11$$

vepsán jest šestiúhelník abcdef, jehož vrcholy mají úsečky

$$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 6,\ x_4 = 10,\ x_5 = 9,\ x_6 = 2;$$

z příslušných pořadnic jsou y_5 a y_6 záporné. Jest dokázati, že *průsečíky protějších stran tohoto šestiúhelníka leží v jedné přímce, a rovnici této přímky jest vyvoditi.*

Posl. fil. *Jan Schüller.*

Upozornění. Lhůta k zaslání řešení úl. 25. až 50. prodlužuje se do 31. dubna r. 1901.

Řešení úloh.

Úloha 1.

Řešiti jest rovnici

$$(4x^2-11)(4x^3-11)=105.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Hulla,* stud. VIII. tř. gym. v Olomouci.)

Anullujeme-li danou rovnici, obdržíme rovnici převratnou 5. stupně

$$4x^5-11x^3-11x^2+4=0,$$

jejíž jeden kořen jest patrně

$$x_1=-1.$$

Dělíme-li rozdílem kořenovým $x+1$, dospějeme k převratné rovnici 4. stupně

$$4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$$

čili

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)=7.$$

Tuto řešíme známou substitucí

$$x+\frac{1}{x}=y;$$

bude pak

$$4y^2-4y-15=0,$$

$$y_1=\frac{5}{2}, \quad y_2=-\frac{3}{2}.$$

Z rovnic

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}, \quad x+\frac{1}{x}=-\frac{2}{3}$$

čili

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \qquad 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

ustanovíme

$$x_2 = 2, \qquad x_3 = \frac{1}{2}, \qquad x_{4,5} = -\frac{1}{4}(3 \pm i\sqrt{7}).$$

Úloha 2.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\frac{x^5 - a}{x - b} = y^4,$$

$$\frac{y^5 - a}{y - b} = x^4.$$

Řed. *A. Strnad*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Valach,* stud. VIII. tř. gym. v Kroměříži.)

Pišme rovnice dané ve tvaru

$$x^5 - xy^4 = a - by^4$$

$$y^5 - x^4y = a - bx^4.$$

Vyloučíme-li konstantu b, obdržíme rovnici

$$x^4(x^5 - xy^4) - y^4(y^5 - x^4y) = a(x^4 - y^4)$$

čili

$$(x^5 + y^5)(x^4 - y^4) = a(x^4 - y^4);$$

prostým odečtením vyloučíme a, i bude

$$(x + y)(x^4 - y^4) = b(x^4 - y^4).$$

Oběma posledním rovnicím vyhoví se, bude-li

$$x^4 - y^4 = 0$$

čili se zřetelem k rovnicím původním

$$x^5 - a = x^4(x - b);$$

odtud vyplývá

$$bx^4 - a = 0,$$

tudíž

$$x = y = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

Po odstranění činitele $x^4 - y^4$ přechází pak soustava rovnic v jednodušší

$$x^5 + y^5 = a$$
$$x + y = b,$$

kterou známým způsobem řešiti lze.

Úloha 3.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341,$$
$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Karel Rychlík,* stud. V. tř. akad. g. v Praze.)

K první rovnici přičtouce trojnásobnou druhou obdržíme

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 1331,$$

tudíž

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11,\ 11\alpha,\ 11\alpha^2,$$

kdež

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^3 = 1.$$

Ze druhé rovnice dané jde pak

$$\sqrt{xy}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 330$$

čili

$$\sqrt{xy} = 30,\ 30\alpha^2,\ 30\alpha.$$

a) Je-li

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11,\qquad \sqrt{xy} = 30,$$

jsou $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$ kořeny rovnice

$$u^2 - 11u + 30 = 0,$$

tudíž

$$u = \frac{11 \pm 1}{2},$$

$$x_1 = y_2 = 36,\qquad x_2 = y_1 = 25.$$

b) Je-li

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11\alpha, \qquad \sqrt{xy} = 30\alpha^2,$$

jsou $\sqrt{x}$ a $\sqrt{y}$ kořeny rovnice

$$u^2 - 11\alpha + 30\alpha^2 = 0,$$

$$u = \frac{11\alpha \pm \alpha}{2},$$

$$x_3 = y_4 = 36\alpha^2 = -18(1 + i\sqrt{3}),$$

$$x_4 = y_3 = 25\alpha^2 = -\frac{25}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

c) Je-li

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11\alpha^2, \quad \sqrt{xy} = 30\alpha = 30\alpha^4,$$

užijme rovnice

$$u^2 - 11\alpha^2 + 30\alpha^4 = 0,$$

z níž ustanovíme

$$u = \frac{11\alpha^2 \pm \alpha^2}{2},$$

$$x_5 = y_6 = 36\alpha = -18(1 - i\sqrt{3}),$$

$$x_6 = y_5 = 25\alpha = -\frac{25}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$\frac{x - 12}{x^2} = \frac{15 - (x + 1)^2}{x - 2}.$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Řešení. (Zaslal p. *Lad. Seifert,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.) Anullované rovnici

$$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$$

lze dáti podobu

$$x^2(x^2 + 2x + 1) - 14x(x + 1) + 24 = 0;$$

substitucí

$$x(x + 1) = y$$

obdržíme rovnici

$$y^2 - 14y + 24 = 0,$$

z níž ustanovíme
$$y = 7 \pm 5.$$
Jest tedy buď
$$x^2 + x - 12 = 0,$$
$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -4,$$
aneb
$$x^2 + x - 2 = 0,$$
$$x_3 = 1, \qquad x_4 = -2.$$

Úloha 5.

Které kořeny má soustava rovnic
$$x^2 + xy + y^2 = 7$$
$$x + x^2y^2 + y = 7?$$

Posl. techniky *Jaroslav Milbauer.*

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Kadeřábek,* stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech.)

Odečteme-li první rovnici od druhé, nabudeme rovnice
$$x^2(y^2 - 1) - x(y - 1) - y(y - 1) = 0,$$
která rozpadá se v
$$y - 1 = 0, \qquad x^2 + x^2y - x - y = 0.$$
Hodnota
$$y_{1,2} = 1$$
vede k rovnici
$$x^2 + x - 6 = 0,$$
z níž
$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3.$$
Rovnice
$$x^2 + x^2y - x - y = 0$$
čili
$$x(x - 1) + y(x^2 - 1) = 0$$
poskytuje řešení
$$x_{3,4} = 1,$$
$$y^2 + y - 6 = 0, \qquad y_3 = 2, \qquad y_4 = -3;$$
mimo to pak z rovnic
$$x^2 + xy + y^2 = 7,$$
$$x + xy + y = 0$$

vychází

$$(x+y)^2+(x+y)-7=0,$$

tedy

$$x+y=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}=-xy.$$

Z rovnice

$$x^2-\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}x-\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}=0$$

jde

$$x=\frac{1}{4}[-1+\sqrt{29}\pm\sqrt{22+6\sqrt{29}}],$$

kdež $\sqrt{29}$ vzíti jest v obou členech současně buď kladnou neb zápornou.

Obdržíme tak další kořeny

$$x_5=y_6,\ x_6=y_5,\ x_7=y_8,\ x_8=y_7.$$

Úloha 6.

Budiž dokázána věta:

Je-li

$$b=\prod_{k=1}^{n}b_k,$$

jest

$$\frac{1}{lg_b a}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{lg_{b_k} a}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Hanus*, stud. VIII. tř. gym. v Litomyšli.)

Budiž

$$\lg_{b_k} a=c_k,$$

tedy

$$\lg_{b_1} a=c_1,\quad \lg_{b_2} a=c_2,\ \ldots,\ \lg_{b_n} a=c_n:$$

pak jest

$$b_1^{c_1}=b_2^{c_2}=b_3^{c_3}=\ldots=b_n^{c_n}=a$$

čili

$$b_1 = a^{\frac{1}{c_1}}, \quad b_2 = a^{\frac{1}{c_2}}, \quad \ldots, \quad b_n = a^{\frac{1}{c_n}}.$$

Součin těchto rovnic dává

$$b = b_1 b_2 b_3 \ldots b_n = a^{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}},$$

$$b^{\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n}}} = a.$$

Odtud vychází

$$\lg_b a = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \cdots + \frac{1}{c_n}},$$

tudíž

$$\frac{1}{\lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lg_{b_k} a}.$$

Úloha 7.

Ustanoviti obecný člen a součet řady, ve které

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Emil Schoenbaum*, stud. VIII. tř. g. v Benešově u Prahy.)

Jelikož

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2},$$

jest

$$a_{n-1} = a_{n-2} - a_{n-3};$$

součtem obou rovnic vychází

$$a_n = -a_{n-3}.$$

Jest tedy

$$a_4 = -a_1, \quad a_5 = -a_2, \quad a_6 = -a_3,$$

$$a_7 = -a_4 = a_1, \quad a_8 = -a_5 = a_2, \quad a_9 = -a_6 = a_3,$$

to jest: členy řady se periodicky opakují. Jest-li

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = a_2 - a_1 = c,$$

jest řada následující:

$$a,\ b,\ c,\quad -a,\ -b,\ -c,\quad a,\ b,\ c,\ -a,\ -b,\ -c, \text{ a t. d.}$$

Je-li

$$n = 3p + q, \qquad q = 1,\ 2,\ 3,$$

jest obecně

$$a_n = (-1)^p . a_q .$$

Z rovnic

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - a_{n-2} \\ a_{n-1} &= a_{n-2} - a_{n-3} \\ a_{n-2} &= a_{n-3} - a_{n-4} \\ &\vdots \\ a_3 &= a_2 - a_1 \\ a_2 &= a_2 \\ a_1 &= a_1 \end{aligned}$$

vychází součet

$$s_n = a_{n-1} + a_2 .$$

Jest tedy na př.

$$\begin{aligned} a_{23} &= (-1)^7 . a_2 = -b, \\ s_{23} &= a_{22} + a_2 = (-1)^7 . a_1 + a_2 = b - a; \\ a_{24} &= (-1)^7 . a_3 = a - b, \\ s_{24} &= a_{23} + a_2 = -b + b = 0. \end{aligned}$$

Poznámka redakce. Řada, jejíž členy vyhovují relaci

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

jest při

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Podíly

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \ldots$$

jsou přibližné hodnoty periodického řetězce

$$z = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots \text{ in inf.},}}}$$

jehož mezná hodnota jest

$$z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Úloha 8.

Zvětší-li se každý rozměr obdélníka o 3 cm, zvětší se jeho úhlopříčka o 4 cm a jeho obsah o 60 cm². Které rozměry má obdélník?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Honzák*, stud. VI. tř. gym. ve Vys. Mýtě.)

Rozměry obdélníka buďtež x, y; potom jsou podmínky úlohy vyjádřeny rovnicemi

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}=4+\sqrt{x^2+y^2},$$
$$(x+3)(y+3)=xy+60.$$

Z druhé rovnice plyne

$$x+y=17,$$

čímž prvá rovnice nabývá tvaru

$$\sqrt{x^2+y^2+120}=4+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Položíme-li

$$x^2+y^2=z,$$

přijdeme k rovnici

$$\sqrt{z+120}=4+\sqrt{z},$$

z níž vypočítáme

$$z=169.$$

Z rovnic

$$x+y=17,$$
$$x^2+y^2=169$$

najdeme rozměry obdélníka

$$x=5, \quad y=12.$$

Úloha 9.

Do rovnostranného trojúhelníka vepsána jest kružnice, do zbylých částí vepsány kružnice, do částí při vrcholech trojúhelníka opět kružnice a t. d.

V kterém poměru jest součet všech těchto kruhů k ploše kruhu opsaného?

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Zdeněk Laštovka,* stud. VII. tř. r. v Č. Budějovicích.)

Vepsané kruhy jsou

$$K_1,\quad 3K_2,\quad 3K_3,\quad 3K_4,\quad \ldots$$

a poloměry jejich

$$r_1 = \frac{v}{3},\quad r_2 = \frac{v}{9},\quad r_3 = \frac{v}{27},\quad \ldots$$

Obsahy tvoří tudíž řadu nekonečnou geometrickou

$$\delta = K_1 + K_2 + K_3 + \cdots,$$

ve které

$$K_1 = \frac{\pi v^2}{9},$$

podíl

$$q = \frac{1}{9}$$

a součet

$$S = \frac{K_1}{1-q} = \frac{\pi v^2}{8}.$$

Součet veškerých kruhů

$$\Sigma = 3S - 2K_1 = \frac{3\pi v^2}{8} - \frac{2\pi v^2}{9} = \frac{11\pi v^2}{72}.$$

Plocha kruhu opsaného jest

$$K = \pi\left(\frac{2v}{3}\right)^2 = \frac{4\pi v^2}{9};$$

tudíž

$$\Sigma : K = \frac{11}{72} : \frac{4}{9}$$

čili

$$\Sigma : K = 11 : 32.$$

Úloha 10.

Dán jest obdélník abcd; strana ab spatřuje se ze středu m protější strany cd v úhlu α, strana ad ze středu n protější strany bc v úhlu β.

V kterém poměru jsou rozměry obdélníka, je-li

$$\alpha = 2\beta?$$

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Vlad. Polák,* stud. VII. tř. g. v Přerově.) Dle podmínky v úloze dané jest

$$\sphericalangle\, amb = \alpha, \quad \sphericalangle\, and = \beta.$$

Označíme-li

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b,$$

jest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}.$$

Jelikož

$$\alpha = 2\beta,$$

jest

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}$$

čili

$$\frac{a}{2b} = \frac{4ab}{4a^2 - b^2}.$$

Odtud vyplývá

$$4a^2 - b^2 = 8b^2,$$
$$4a^2 = 9b^2,$$

tudíž

$$a : b = 3 : 2.$$

Úloha 11.

Obdélník rozdělen jest úhlopříčkou a osou souměrnosti kolmou k delší straně ve dva trojúhelníky a dva lichoběžníky.

a) Jest určiti podmínku, kdy lze lichoběžníkům kružnici vepsati.

b) Jest dokázati, že pak středy těchto kružnic se středy kružnic vepsaných v oba trojúhelníky tvoří vrcholy čtverce.

Učitel *Fr. Jirsák* v Dobřenicích.

Řešení. (Zaslal p. *Eduard Pleva,* stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře.)

V obdélníku *abcd* veďme úhlopříčku *ac* a osu *mn* kolmou k $ab > bc$. Obě příčky protínají se v bodě *s*. Vzniknou trojúhelníky *ams, cns* a lichoběžníky *adns, bcsm*; do trojúhelníka *ams* vepišme kružnici středu o_1 a poloměru ϱ, dotýkající se osy *mn* v bodě f; lichoběžníku *bcsm* vepišme kružnici středu o_2, poloměru r a dotýkající se osy v bodě g.

Označme

$$\overline{ab} = a, \quad \overline{bc} = b, \quad \overline{ac} = c;$$

potom jest

$$r = \frac{a}{4} = \frac{ab}{a+b+c},$$

pročež

$$a + b + c = 4b,$$
$$a^2 + b^2 = (3b - a)^2,$$

z čehož podmínka

$$a : b = 4 : 3.$$

Poloměr ϱ stanoví pak vzorec

$$\varrho = \frac{ab}{2(a+b+c)} = \frac{r}{2} = \frac{a}{8}.$$

Že středy vepsaných kružnic jsou vrcholy čtverce, stvrdíme takto:

Předně jest $so_1 \perp so_2$, neboť přímky tyto půlí dva vedlejší úhly. Mimo to jest

$$\overline{so}_1^2 = \overline{o_1f}^2 + \overline{sf}^2 = \varrho^2 + (\frac{b}{2} - \varrho)^2 = \frac{a^2}{64} + \frac{a^2}{16},$$

$$\overline{so}_1 = \frac{a}{8}\sqrt{5},$$

$$\overline{so}_2^2 = \overline{o_2g}^2 + \overline{sg}^2 = r^2 + (\frac{b}{2} - r)^2 = \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{64},$$

$$\overline{so}_2 = \frac{a}{8}\sqrt{5}.$$

Jest tudíž také $\overline{so}_1 = \overline{so}_2$ a tedy o_1 o_2 vrcholy čtverce o středu s.

Úloha 12.

Vypočítati a sestrojiti jest úhel ostrý vyhovující rovnici

$$7 \lg \cos x + 3 \lg \sin x = 13 \lg \operatorname{tg} x.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jiří Šír,* stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě.)

Z dané rovnice jde

$$7 \lg \cos x + 3 \lg \sin x = 13 \lg \sin x - 13 \lg \cos x,$$
$$20 \lg \cos x = 10 \lg \sin x,$$

z čehož

$$\cos^2 x = \sin x$$

čili

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Odtud ustanovíme pro ostrý úhel

$$\sin x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{\cdot}61803 \ldots$$
$$x = 38^0 10' 22''.$$

Je-li $\overline{ab} = 2r = 1$ průměr kružnice a rozdělíme-li jej dle zlatého řezu, bude větší díl

$$\overline{bc} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Sestrojíme-li tedy v kruhu tětivu

$$\overline{bd} = \overline{bc},$$

bude

$$\sphericalangle bad = x.$$

Poznámka redakce. Z rovnice

$$\cos^2 x = \sin x$$

jde na jevo, že při tomto úhlu jest

$$\cos x = \operatorname{tg} x.$$

Úhlu toho užil již Simon a Quercu (1588) k přibližné rektifikaci kružnice; jestiť

$$\operatorname{tg} x = 0{\cdot}786 \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 0{\cdot}785 \ldots,$$

tedy přibližně

$$\operatorname{tg} x \doteq \frac{\pi}{4}.$$

Úloha 13.

Sestrojiti jest pětiúhelník abcde, ve kterém každá z úhlopříček jest rovnoběžná s jednou stranou. Vrcholy a, b, c jsou dány.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák,* stud. VIII. tř. g. v Brně.)

V pětiúhelníku *abcde* protínejtež se úhlopříčky

ac, be v bodě m,
bd, ce v bodě n,
ad, ce v bodě p.

Jest-li každá úhlopříčka rovnoběžná s příslušnou stranou, jest $\triangle ame \sim \triangle bde$ a proto

$$am : me = de : be$$

čili

$$am : mc = cd : be.$$

Jest však také $\triangle ben \sim \triangle cdn$, tudíž

$$cd : be = cn : en;$$

poněvadž pak

$$\triangle bcn \cong \triangle aep,$$
$$cn = ep, \qquad cp = en,$$

jest také

$$cd : be = ep : cp = de : ac$$

čili

$$cd : be = mc : ac.$$

Z úměry této a ze druhé úměry při počátku položené plyne

$$am : mc = mc : ac,$$

t. j. průsečík m dělí úhlopříčku ac dle zlatého řezu. Dle obdoby soudíme, že každé dvě úhlopříčky předpokládaného pětiúhelníka dělí se navzájem dle zlatého řezu.

Odtud pak vyplývá toto sestrojení:

Rozdělíme-li ac v bodě m dle zlatého řezu ($am < mc$) a prodloužíme bm k průsečíku s rovnoběžkou $cp \parallel ab$, obdržíme vrchol e; podobně vrchol d.

Poznámka redakce. 1. Že jest vůbec možným pětiúhelník, ve kterém každá strana jest rovnoběžná s jednou úhlopříčkou, vysvítá z toho, že tuto vlastnost má pravidelný pětiúhelník a tudíž také jeho rovnoběžný (šikmý neb pravoúhlý) průmět.

Naopak lze dokázati, že pětiúhelník, jehož úhlopříčky jsou rovnoběžny ku stranám, možno vždy pokládati za průmět pětiúhelníka pravidelného. Jsouť oba tyto pětiúhelníky útvary afinními na základě poměru, v kterém úhlopříčky vzájemně se dělí.

2. Budiž ještě připomenuto, že lze též sestrojiti hvězdovitý pětiúhelník $abcde$ dle udaných podmínek. Rozdělme ab bodem k dle zlatého řezu ($ak < kb$), veďme ck a prodlužme k průsečíku s rovnoběžkou jdoucí bodem a ku bc; tím obdržíme vrchol d a obdobně též vrchol e.

Jest tedy daná úloha dvojznačnou.

Úloha 14.

Dána jest plocha trojúhelníka $\Delta = 6\ cm^2$, součet výšek $2\sigma = 9{\cdot}4\ cm$ a průměr kružnice opsané $2r = 5\ cm$. Určiti obvod a strany.

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Frant. Ogoun*, bohoslovec v Olomouci.)

Vyjádříme-li dané veličiny stranami a, b, c, obdržíme:

$$(1)\qquad \Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) = s[s^3 - (a+b+c)s^2 + (ab+ac+bc)s - abc],$$

$$(2)\qquad 2\sigma = \frac{2\Delta}{a} + \frac{2\Delta}{b} + \frac{2\Delta}{c} = \frac{2\Delta}{abc}(ab+ac+bc),$$

$$(3)\qquad 4\Delta r = abc,$$

$$(4)\qquad a+b+c = 2s.$$

Dosadíme-li hodnoty

$$abc = 4\Delta r$$
$$ab + ac + bc = 4r\sigma$$

do (1), dostaneme

$$\Delta^2 = s\,[s^3 - 2s^3 + 4r\sigma s - 4\Delta r].$$

Přeměňme tuto rovnici na tvar

$$s^4 - 4r\sigma s^2 + 4\Delta rs + \Delta^2 = 0$$

a dosaďme hodnoty dané, tím nabude podoby

$$s^4 - 47s^2 + 60s + 36 = 0.$$

Úloze vyhovuje jediný kořen $s = 6$, neboť druhý positivní kořen jsa menší než 4 nevyhovuje úloze, která žádá, aby $2s > 2\sigma$.

Známe-li obvod, určíme snadno strany z rovnic

$$a + b + c = 12,$$
$$ab + ac + bc = 47,$$
$$abc = 60.$$

Kořeny rovnice

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

určují strany

$$a = 3\ cm,\ b = 4\ cm,\ c = 5\ cm.$$

Poznámka. Z rovnice

$$s^4 - 4\sigma rs^2 + 4\Delta rs + \Delta^2 = 0$$

plynou některé důsledky, týkající se velikosti veličin s, Δ, σ, r.

Jest totiž, má-li s býti positivní, kterýkoli kladný člen na levé straně rovnice menší než záporný člen $4\sigma rs^2$, tudíž

$$s^2 < 4\sigma r, \quad \Delta < \sigma s, \quad \Delta^2 < 4\sigma rs^2.$$

Z první a třetí z těchto nerovnic plyne $\Delta < 4\sigma r$; jelikož pak $s > \sigma$, jest dle nerovnice druhé $\sigma^2 < \Delta < s^2$.

Úloha 15.

Obvod trojúhelníka $2s = 24$, poloměr kružnice opsané $r = 2{\cdot}1\sqrt{5}$, vepsané $\varrho = \sqrt{5}$. Které jsou strany?

P. *Marian Haas*, kněz na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Leopold Šrámek*, stud. VIII. tř. g. v Olomouci.)

Dané veličiny vyjádříme stranami a, b, c a plochou trojúhelníka Δ; tím nabudeme známých vztahů

$$2s = a + b + c$$
$$4\Delta r = abc$$
$$\Delta = s\varrho$$
$$\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

čili rozvinuto

$$\Delta^2 = s[s^3 - s^2(a+b+c) + s(ab+ac+bc) - abc].$$

Tato rovnice se promění dosazením hořejších hodnot na tvar

$$s\varrho^2 = -s^3 + s(ab+ac+bc) - 4\Delta r,$$

tak že máme

$$ab + ac + bc = s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho.$$

Ježto

$$a + b + c = 2s$$
$$abc = 4r\varrho s,$$

značí kořeny rovnice

$$x^3 - 2sx^2 + (s^2 + \varrho^2 + 4r\varrho)x - 4r\varrho s = 0$$

čili

$$x^3 - 24x^2 + 191x - 504 = 0$$

hledané strany

$$a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9.$$

Úloha 16.

Z kruhu o poloměru $r = 85\,cm$ vyřízli jsme plášť a ze dvou kruhů o poloměru $\varrho = 26\,cm$ základny rovnoběžnostěnu pravoúhlého, jehož povrch $P = 15792\,cm^2$.

Které jsou rozměry rovnoběžnostěnu?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Antonín Lochmann*, stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi.)

Buďtež x, y, z hrany rovnoběžnostěnu.

Potom jest

$$(2x + 2y)^2 + z^2 = (2r)^2$$
$$x^2 + y^2 = (2\varrho)^2$$
$$2xy + 2yz + 2xz = P.$$

Položíme-li

$$x + y = u,$$

přijdeme k rovnicím

$$4u^2 + z^2 = 4r^2$$
$$u^2 + 2uz = 4\varrho^2 + P,$$

z nichž vyplývá vyloučením z

$$17u^4 - 2(P + 4\varrho^2 + 8r^2)\,u^2 + (P + 4\varrho^2)^2 = 0.$$

Dosadíme-li dané hodnoty číselné, dojdeme rovnice

$$u^4 - 8976u^2 + 20123648 = 0,$$

z níž

$$u^2 = 4488 \pm 136.$$

a) Je-li

$$u^2 = 4624,$$

jest

$$u = x + y = 68$$
$$x^2 + y^2 = 4\varrho^2 = 2704,$$

tedy

$$x = 48,\ y = 20$$

a k tomu

$$z = \frac{P - 2xy}{2u} = 102.$$

b) Je-li

$$u^2 = 4352,$$

jest

$$u = x + y = 16\sqrt{17}$$
$$x^2 + y^2 = 4\varrho^2 = 2704,$$

z čehož

$$x = 8\sqrt{17} + 2\sqrt{66}$$
$$y = 8\sqrt{17} - 2\sqrt{66}$$
$$z = 26\sqrt{17}.$$

Úloha 17.

Kolmému kruhovému kuželi o straně $s = 169$ cm vepsána polokoule, která se plášťě dotýká. Jak velký jest povrch a obsah kužele, je-li poloměr polokoule $\varrho = 60$ cm?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Grössl*, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech.)

Je-li r poloměr základny, v výška kužele, jest

$$r^2 + v^2 = s^2$$
$$rv = \varrho s,$$

tudíž

$$v + r = \sqrt{s(s + 2\varrho)} = 17 \,.\, 13$$
$$v - r = \sqrt{s(s - 2\varrho)} = 7 \,.\, 13,$$

z čehož

$$v = 156, \; r = 65.$$

Jest tedy povrch kužele

$$P = \pi r(r + s) = 15210\pi$$

a obsah jeho

$$K = \frac{1}{3}\pi r^2 v = 219700\pi.$$

Úloha 18.

a) Dán jest čtyrboký jehlan, jehož podstavou jest různoběžník abcd, vrchol v, a kdekoli v prostoru bod m. Bodem m proložiti jest rovinu σ, která by jehlan proťala v rovnoběžníku.

b) Dán jest různoběžník abcd v rovině ϱ jakožto podstava jehlanu. Které jest geometrické místo vrcholu jehlanu, jejž rovinami protínati lze ve čtvercích?

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Kálal,* stud. VII. tř. r. v Písku.)

a) Rozbor. Aby rovina σ proťala protější stěny jehlanu abv, cdv v úsečkách rovnoběžných, musí býti rovnoběžna se společnou průsečnicí P rovin (abv), (cdv); aby pak protínala i stěny bcv, adv v rovnoběžkách, musí býti rovnoběžna s průsečnicí R rovin (bcv), (adv). Rovina σ bude tudíž rovnoběžna s rovinou (PR).

Sestrojení. Prodlužme podstavné hrany $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ k společnému průsečíku x, hrany $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ k průsečíku y, spojme $\overline{xv} \equiv$ P, $\overline{yv} \equiv$ R, proložme přímkami (PR) rovinu τ a bodem m rovinu $\sigma \parallel \tau$.

Omezení. Úloha jest možná, seče-li rovina σ veškeré pobočné hrany jehlanu mezi podstavou a vrcholem; seče-li podstavu, má pronik tvar jiný. Úloha je možná bez výjimky, myslíme-li si jehlanovou plochu neomezenou, za podstavu i vrchol v do nekonečna prodlouženou.

b) *Rozbor*. Buď jako nahoře průsečík $(\overline{ab}, \overline{cd}) \equiv x$, $(\overline{bc}, \overline{ad}) \equiv y$, spojnice $\overline{xv} \equiv P$, $\overline{yv} \equiv R$, rovina $\sigma \cdot \tau \equiv (PR)$ protínej jehlan v rovnoběžníku $\alpha\beta\gamma\delta$. Aby bylo $\alpha\beta \perp \beta\gamma$, musí býti $P \perp R$ čili $\sphericalangle xvy = 90^0$, jelikož $\overline{\alpha\beta} \parallel P$, $\overline{\beta\gamma} \parallel R$. Geometrické místo vrcholů v pravých úhlů v prostoru, jichž ramena procházejí pevnými body x, y, jest plocha kulová K, daná průměrem $\overline{xy}$. To jest podmínka, aby průsek byl pravoúhelníkem. Aby však byl také rovnostranný, musí i úhlopříčny $\overline{\alpha\gamma} \perp \overline{\beta\delta}$. Protínají-li prodloužené úhlopříčky podstavy $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ spojnici $\overline{xy} \equiv S$ v bodech ξ, η, jest $\overline{\alpha\gamma} \parallel \overline{\xi v}$, $\overline{\beta\delta} \parallel \overline{\eta v}$, $\overline{\alpha\gamma} \perp \overline{\beta\delta}$, tedy i $\overline{\xi v} \perp \overline{\eta v}$ čili $\sphericalangle \xi v \eta = 90^0$. Geom. místo vrcholů v pravých úhlů, jichž ramena probíhají pevnými body ξ, η, jest druhá plocha kulová L, daná průměrem $\overline{\xi\eta}$. Společný pronik obou ploch kulových K, L, *kružnice* Σ, jejíž rovina $\perp S$ a střed leží na S, jest žádaným místem vrcholu jehlanu.

Sestrojení. Podlužme podstavné hrany $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ k průsečíku x, hrany $\overline{bc}$, $\overline{ad}$ k průsečíku y, spojme $\overline{xy} \equiv S$, prodlužme úhlopříčny $\overline{ac}$, $\overline{bd}$ do ξ, η na S, v rovině $(abcd) \equiv \varrho$ opišme kružnici K_1 nad průměrem $\overline{xy}$ a kružnici L_1 nad průměrem $\overline{\xi\eta}$, a nad společnou chordálou kružnic K_1, L_1 jakožto průměrem opišme kružnici Σ v rovině $\perp \varrho$. Vytkneme-li na Σ kdekoli vrchol jehlanu v, protne každá rovina $\parallel (xvy) \equiv \tau$ jehlan $v(abcd)$ ve čtverci, ač seče-li všecky jeho pobočné hrany mezi podstavou a vrcholem.

Úloha 19.

Sestrojiti jest vrchol plochy kuželové v, dána-li její řídící křivka druhého stupně K a tři body na ploše m, n, p mimo rovinu křivky K.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Ladislav Seifert,* stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Rozbor. Povrchová přímka plochy, jež prochází bodem m, seče křivku K a jest tedy také povrchovou přímkou plochy kuželové, jejíž řídící křivka jest K a vrchol m. Vrchol v bude tudíž na ploše kuželové (mK). Z téhož důvodu bude v i na ploše kuželové, jejíž vrchol jest n a řídící křivka K, jakož i na ploše kuželové, jejíž vrchol jest p a řídící křivka K.

Sestrojení. Žádaný vrchol v je společným průsečíkem kuželových ploch (mK), (nK), (pK). Každé dvě z těchto tří ploch druhého stupně pronikají se v křivce K a tudíž v další kuželosečce Σ. Sestrojíme tedy proniky $\Sigma_{\overline{mn}}$, $\Sigma_{\overline{mp}}$, $\Sigma_{\overline{np}}$ a vyhledáme společný jejich průsečík v. Výsledky jsou dva, protože dvě rovinné křivky na téže ploše kuželové 2. stupně ležící mají toliko dva body společné.

Dodatek. Novější geometrie prostorová řeší úlohu takto. Rovina $(mnp) \equiv \sigma$ seče plochu kuželovou v křivce druhého stupně L a rovinu ϱ křivky K v přímce S. Křivka K seče přímku S ve dvou bodech x, y (ať realných či imaginarných), jimiž také křivka L procházeti musí. Sestrojme tedy v bodě m tečnu T ke křivce L určené pěti body m, n, p, x, y (což i bez křivky vykonati lze), průsečíkem q tečny T na přímce S veďme tečnu T_1 ke křivce K a dotyčný bod m_1 spojme s bodem m. Spojnice $\overline{m_1 m}$ jest povrchovou přímkou žádané plochy kuželové, podél níž se plochy dotýká tečná rovina ($\mathrm{T}q\mathrm{T}_1$). Rovněž tak sestrojíme povrchovou přímku $\overline{n_1 n}$ procházející bodem n a průsečík přímek $\overline{m_1 m}$, $\overline{n_1 n}$ dá vrchol plochy v. Že však z bodu q sestrojiti lze ke křivce K tečny *dvě*, dostaneme dvě plochy kuželové úloze hovící.

Úloha 20.

V prostoru buďtež dány tři paprsky A, B, C týmž bodem v procházející a čtvrtý D, který prvé tři neseče. Sestrojiti jest plochu kulovou, která daných čtyř paprsků se dotýká.

Řed. *Vinc. Jarolímek.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Fiala,* stud VII. tř. r. v Písku.)

Rozbor. Paprsky A, B, C určena jest rotační plocha kuželová, do níž plocha kulová K bude vepsána. Rovina ϱ, položená vrcholem v a paprskem D, seče plochu kuželovou ve dvou přímkách E, F a plochu kulovou v kružnici L, která přímek D, E, F bude se dotýkati. Střed žádané plochy kulové bude tedy jednak na ose O plochy kuželové, jednak na ose U kružnice L.

Sestrojení. Osu O kuželové plochy (ABC) sestrojíme buď spojnicí vrcholu v se středem kružnice $(abc) \equiv$ M, jejíž tři body obdržíme, učiníce na paprscích A, B, C úsečky $\overline{va} = \overline{vb} = \overline{vc}$; anebo průsečnicí rovin, jež kolmo rozpolují úhly AvB, AvC. Rovina $(v\text{D}) \equiv \varrho$ seče plochu kuželovou v přímkách E, F, jež dostaneme, vyhledáme-li průsečíky roviny ϱ s kružnicí M a spojíme-li je s vrcholem v. Do trojúhelníka, jenž omezen jest přímkami D, E, F, vepišme kružnici L, a v středu jejím postavme osu $\text{U} \perp \varrho$; průsečík os O, U dá střed s, úsečka $\overline{sm} \perp$ A poloměr žádané plochy kulové. Výsledky jsou dva.

Úloha 21.

Trať železniční má od místa A do B stoupání $tg\alpha = 0{\cdot}0262$, od B do C stoupání $tg\,\alpha_1 = 0{\cdot}0349$. Jak dlouhé jsou tratě AB, BC, má-li C od A vodorovnou vzdálenost 10 km a je-li 280 m nad A?

Prof. *Th. Schulz.*

Řešení. (Zaslal p. *František Dvořák*, stud. VIII. tř. g. v Brně.)

Pokládejme A za počátek pravoúhlé soustavy souřadnic. Potom má přímka $\overline{\text{AB}}$ rovnici

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

a rovnice přímky $\overline{\text{BC}}$ jest

$$y - 280 = (x - 10000) \operatorname{tg} \alpha_1 ;$$

10000, 280 jsou souřadnice bodu C. Souřadnice x, y bodu B oběma přímkám společného vypočítáme z obou rovnic; obdržíme tak

$$x \operatorname{tg} \alpha - 280 = x \operatorname{tg} \alpha_1 - 349,$$

$$x = \frac{690000}{87} \doteq 7931, \quad y = \frac{69 \,.\, 262}{87} \doteq 207.$$

Potom bude

$$\overline{AB} = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{7931}{0\cdot99966} = 7934.$$

$$\overline{BC} = \frac{10000 - x}{\cos\alpha_1} = \frac{2069}{0\cdot99939} = 2070.$$

Úloha 22.

Dány jsou body

$$a\,(1,\ 2),\quad b\,(2,\ 4),\quad c\,(5,\ 3).$$

a) Ustanoviti jest body d, e tak, aby v pětiúhelníku abcde každá ze čtyř stran $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$ byla rovnoběžná s jednou úhlopříčkou;

b) dokázati, že též pátá strana $\overline{ea}$ jest s příslušnou úhlopříčnou rovnoběžná.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Zahradníček*, stud. VIII. tř. g. v Třebíči.)

a) Souřadnice hledaných vrcholů buďtež

$$d\,(x_1,\ y_1),\quad e\,(x_2,\ y_2).$$

Úloha vyžaduje, aby bylo

$$\overline{ab} \parallel \overline{ce},\quad \overline{bc} \parallel \overline{ad},\quad \overline{cd} \parallel \overline{be},\quad \overline{de} \parallel \overline{ac}.$$

Podmínky tyto vyjadřují se analyticky rovnicemi

$$\frac{x_2 - 5}{y_2 - 3} = \frac{1}{2} \text{ čili } 2x_2 - y_2 = 7,$$

$$\frac{x_1 - 1}{y_1 - 2} = -3 \text{ čili } x_1 + 3y_1 = 7,$$

$$\frac{x_1 - 5}{y_1 - 3} = \frac{x_2 - 2}{y_2 - 4},\quad \frac{x_1 - y_2}{y_1 - y_2} = 4.$$

Vyjádříme-li z prvních dvou rovnic

$$y_1 = \frac{7 - x_1}{3},\quad y_2 = 2x_2 - 7$$

a dosadíme do druhých dvou, obdržíme

$$5x_1 + 4x_2 - x_1x_2 = 23$$
$$x_1 + 3x_2 = 16.$$

Z rovnic těchto vypočítáme

$$x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \quad x_1' = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2' = \frac{9 + \sqrt{5}}{2},$$

k čemuž dle rovnic dřívějších příslušejí hodnoty

$$y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad y_1' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$
$$y_2 = 2 - \sqrt{5}, \quad y_2' = 2 + \sqrt{5}.$$

Tím našli jsme body

$$d\,(x_1\, y_1) \quad d'\,(x_1'\, y_1')$$
$$e\,(x_2\, y_2) \quad e'\,(x_2'\, y_2'),$$

kteréž jsou vrcholy dvou pětiúhelníků

abcde, *abcd'e'*

vyhovujících úloze. Snadně lze se přesvědčiti prostým náčrtem, že pětiúhelník první jest tvaru obyčejného, druhý pak jest hvězdovitý.

b) Že jest $\overline{ae} \parallel \overline{bd}$, $\overline{ae'} \parallel \overline{bd'}$,
stvrzují rovnice

$$\frac{x_2 - 1}{y_2 - 2} = \frac{x_1 - 2}{y_1 - 4} = \frac{5 - 7\sqrt{5}}{10},$$
$$\frac{x_2' - 1}{y_2' - 2} = \frac{x_1' - 2}{y_1' - 4} = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{10},$$

o jichž správnosti se přesvědčíme dosadivše hodnoty dříve vypočítané.

Poznámka redakce. Jak z úlohy 13. na str. 322. a 323. vysvítá, dělí se úhlopříčky pětiúhelníka *abcde* navzájem dle zlatého řezu a souhlasí také poměr strany k příslušné úhlopříčce s tímto rozdělením.

Tak na př. v naší úloze jest

$$\overline{de} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot \sqrt{17}$$
$$\overline{ac} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{17},$$

tudíž

$$\overline{de} : \overline{ac} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Rovněž jest

$$\overline{cd} = \sqrt{(x_1-5)^2+(y_1-3)^2} = \sqrt{21-6\sqrt{5}}$$

$$\overline{be} = \sqrt{(x_2-2)^2+(y_2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{66+6\sqrt{5}},$$

z čehož

$$\overline{cd} : \overline{be} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Úloha 23.

V pravoúhlé soustavě souřadnic dány jsou přímky

$$M \equiv 4x + 3y - 15 = 0,$$
$$N \equiv 7x - 24y + 3 = 0;$$

jest ustanoviti body, které jsou co nejblíže průsečíku daných přímek a mají od nich součet neb rozdíl vzdáleností $k = 117$.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Sukdol,* stud. VIII. tř. g. v Čes. Budějovicích.)

Geometrické místo bodů, které mají od daných přímek daný součet neb rozdíl vzdáleností, vyjádřeno jest rovnicí

$$\pm \frac{4x+3y-15}{5} \pm \frac{7x-24y+3}{25} = 117.$$

Kombinujíce znaménka $\pm$ shledáme, že toto místo rozpadá se ve čtvero přímek

$$P_1 \equiv 3x - y - 21 = 0$$
$$P_2 \equiv 3x - y + 5 = 0$$
$$P_3 \equiv x + 3y - 15 = 0$$
$$P_4 \equiv x + 3y + 3 = 0.$$

Průsečík přímek M, N jest bod $s\,(3, 1)$ a body hledané isou paty kolmic s tohoto průsečíku k přímkám P_1, P_2, P_3, P_4 spuštěných. Rovnice těchto kolmic, kteréž jsou zároveň osami obdélníka přímkami P omezeného, jsou

$$O_1 \equiv x + 3y - 6 = 0$$
$$O_2 \equiv 3x - y - 8 = 0.$$

Průsečíky jich s přímkami P jsou body hledané:

$$p_1 \equiv (O_1P_1) \equiv (\ \ 6\cdot 9, -0\cdot 3)$$
$$p_2 \equiv (O_1P_2) \equiv (-0\cdot 9, \ \ 2\cdot 3)$$
$$p_3 \equiv (O_2P_3) \equiv (\ \ 3\cdot 9, \ \ 3\cdot 7)$$
$$p_4 \equiv (O_2P_4) \equiv (\ \ 2\cdot 1, -1\cdot 7).$$

Úloha 24.

Která jest podmínka, při které přímka

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

jest normálou ellipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Drastich*, stud. VII. tř. g. v Opavě.)

Normála ellipsy v bodě $(x_1\, y_1)$ má rovnici

$$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = e^2 x_1 y_1.$$

Aby tato normála byla totožna s přímkou

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

k tomu jest třeba, aby bylo

$$m = \frac{e^2 x_1}{a^2}, \ n = -\frac{e^2 y_1}{b^2}.$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic a z rovnice

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

souřadnice bodu $(x_1 y_1)$, obdržíme žádanou podmínku, nutnou i dostatečnou, ve tvaru

$$a^2 m^2 + b^2 n^2 = e^4.$$

Poznámka redakce. Pokládáme-li úseky m, n, způsobené normálou ellipsy na osách, za souřadnice bodu, jest geom. místo těchto bodů ellipsa určená rovnicí

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = e^4.$$

Správná řešení úloh v tomto ročníku Časopisu obsažených zaslali pp.:

Albini Fedor, stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 5., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 24.
Bartošek Jul., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 12.
Barvík Jindřich, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 12., 14. až 17., 21., 23., 24.
Bezloja Alois, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 17., 21., 23., 24.
Binko Em., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12., 15., 17., 21., 24.
Brzobohatý Břetislav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 6., 8. až 11., 13. až 17., 21. až 24.
Břeský František, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12., 14. až 17.
Cenek Miloš, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 12., 17., 21.
Czwetler Frant., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12., 17., 21.
Čihák Hugo, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 8., 10., 13.
Čupr Karel, stud. V. tř. ve Vys. Mýtě, 1. až 17., 21. až 24.
Dědouch Lud., stud. VIII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21., 22., 24.
Dolák Alois, bohoslovec v Olomouci, úl. 1., 4.
Drastich Frant., stud. VII. tř. g. v Opavě, úl. 1. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Duchek Frt., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8., 10., 11., 21.
Dusl K., stud. VI. tř. v Rakovníku, úl. 1. až 5., 7. až 15., 17., 21.
Dvořák Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21., 23., 24.
Dvořák Jan, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1. až 4., 8., 12., 17., 21.
Fiala C., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 12., 15., 21.
Fiala Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 15., 16., 17., 20. až 23.

Filípek Miloš, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 12., 15., 17., 21.
Fink Hugo, stud. VII. tř. g. v Jindřichově Hradci, úl. 1., 3., 8., 12.
Foltynovský Josef, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 12., 14., 15., 17., 21.
Franěk Frt., stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 10.
Grössl Václav, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 20. až 24.
Habrich Alois, stud. VI. tř. r. v Prostějově, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14., 15., 21.
Hac Rudolf, stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8., 9., 12., 17.
Hanosek Bohumír, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8. až 12., 15., 17., 21.
Hanus Josef, stud. VIII. g. v Litomyšli, úl. 1. až 24.
Hanuš Jos., stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8.
Hanuš Rudolf, posluchač vyšší lesnické školy v Písku, 1., 3., 10.
Hegner Václav, stud. V. tř. r. v Plzni, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 15.
Heisler Robert, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 8., 10.
Henšlík Ant., stud. VI. tř. r. v Plzni, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 20.
Herlinger A., stud. VII. tř. g. v Táboře, úl. 1. až 6., 8., 9., 10., 12., 14., 15.
Hnilička Miloslav, stud. VII. tř. r. v Praze-III., úl. 1., 3., 4., 8., 9., 10., 12.
Honzák Josef, stud. VI. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1. až 24.
Horák Alois, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 8., 10., 11.
Hrubý T., stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 17., 21.
Hruška Miloslav, stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8., 10., 11.
Hujer Zdeněk, stud. VII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 5., 8., 12., 15., 17., 21.
Hulla Karel, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 24.
Chadim Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4, 5., 8. až 12., 14., 15., 17.
Jahn Rudolf, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8. až 12., 15., 17., 21.
Janáček Jan, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21., 23., 24.

Jechoutek F., stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 13., 15., 16., 17., 19. až 24.

Kadeřábek František, stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 10., 12., 15., 17., 21.

Kálal Josef, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 24.

Keclík Tomáš, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 8. až 17., 20. až 24.

Klíma Rudolf, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 20., 21.

Kocian Dominik, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 11., 12., 17., 21.

Kopeček O., stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 17., 21., 22., 23.

Korber Augustin, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 5., 8., 11., 12., 16., 17., 21., 24.

Koreček Frant., stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 5., 8. až 13., 17., 18., 20., 21.

Koza Frant., stud. VII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1., 8., 9., 17.

Kratochvíl Frant., stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21., 22., 24.

Kraus Jos., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 9., 10., 12., 17.

Krištof Antonín, stud. VIII. tř. g. v Domažlicích, úl. 1., 7. až 10., 12., 17., 21., 24.

Krýže Bohumír, stud. VIII. tř. g. na Král. Vinohradech, úl. 1. 3., 4., 5., 7. až 10., 12., 15., 16., 17., 21., 22., 24.

Kubis Jan, stud. VIII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 3., 4., 8.

Kulhánek Silvestr, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 17., 21. až 24.

Láska Arnošt, stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1., 4., 8.

Laštovka Zdeněk, stud. VII. r. v Českých Budějovicích, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 16., 17., 19., 21.

Lochmann Ant., stud. VIII. tř. g. v Ml. Boleslavi, úl. 1. až 5., 7. až 13., 16., 17., 21. až 24.

Louda Jos., stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 1., 3., 4., 8., 9., 16., 17.

Macháč František, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 4., 8., 17.

z Maillardů Moric, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 3., 6., 8., 10., 13., 21.
Malý Jan, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 5., 8. až 17., 21.
Mathesius Vilém, stud. VIII. tř. g. v Kolíně, úl. 3., 4., 8., 9., 12., 17., 21.
Matoušek Maxmilian, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 23.
Merz Antonín, stud. VI. tř. v Lounech, úl. 1., 2., 4., 8.
Mikyna Josef, stud. VII. tř. g. ve Dvoře Králové n. L., úl. 1. až 6., 8. až 12., 17., 21.
Mráz Josef, stud. VIII. tř. g. na Smíchově, úl. 1. až 6., 8. až 17., 21. až 24.
Navrátil Ant., stud. VII. tř. r. v Hodoníně, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 20. až 24.
Nigrin Otakar, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1. až 5., 8. až 14., 21.
Novák Josef, stud. VI. tř. g. v Jičíně, úl. 8., 10., 16., 17., 21.
Ogoun Frant., bohoslovec v Olomouci, úl. 1. až 5., 7. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Pauzar Filip, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4., 8. až 12., 17., 21., 22.
Perutz Hugo, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 12., 21.
Petz Leopold, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 8., 12., 15., 17., 21.
Pleva Eduard, stud. VI. tř. r. v Kutné Hoře, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 16., 21.
Polák Vlad., stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 1. až 24.
Ponec Karel, stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3.
Pospíšil Bohumil, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 3. až 6., 8. až 13., 17., 21.
Procházka Frant., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 11., 17., 21.
Procházka Václav, stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 1., 5., 8., 12.
Ptáček Adolf, stud. V. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1., 8., 11.
Racek Aurelius, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl. 1., 3., 8., 10., 13.

Rozsíval Petr, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1., 4., 8. až 11., 12., 13., 15., 17., 21.
Růžek Ant., stud, VIII. tř. g. v Táboře, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 11., 15., 21., 24.
Rybář Emil, stud. VIII. tř. g. v Opavě, úl. 1.
Rychlík Karel, stud. V. tř. akad. g. v Praze, úl. 1. až 24.
Sedláček Frant., stud. VII. tř. g. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 12., 16., 17., 20., 21.
Schoenbaum Emil, stud. VIII. tř. g. v Benešově, úl. 1. až 24.
Seifert Lad., stud. VII. tř. r. v Karlíně, úl. 1. až 24.
Seitz Alf., stud. VII. tř. r. v Plzni, úl. 1. až 5., 8. až 12., 16., 21., 22.
Slovák Josef, stud. VII. tř. g. v Přerově, úl. 1., 3., 4., 8.
Skalecký Jan, stud. VII. tř. r. v Brně, úl. 1., 3., 4., 6., 8. až 13., 17., 18., 20., 21., 24.
Sklenička Frant., stud. VI. tř. r. na Král. Vinohradech, úl. 1., 3., 8.
Sládek Alois, stud. V. tř. r. v Uherském Brodě, úl. 1., 4., 8.
Soldát Jan, stud. V. tř. r. v Písku, úl. 1., 4., 8., 21.
Sperling Frant., stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 8., 12., 17.
Sudek V., stud. VIII. tř. g. v Táboře, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 11., 15., 21.
Sukdol Václav, stud. VIII. tř. g. v Českých Budějovicích, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21. až 24.
Surka Leopold, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 1., 8., 9.
Svěda Otakar, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 4., 12., 21.
Sýkora Jan, stud. VII. tř. r. v Písku, úl. 1., 3., 4., 5., 7. až 12., 16., 17., 20. až 23.
Szalaÿ Josef, stud. VI. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 5., 7., 8., 9., 11., 12.
Šilhán Ludvík, stud. VI. tř. g. v Třebíči, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 17.
Šír Jiří, stud. VII. tř. r. v Novém Městě na Moravě, úl. 1. až 24.
Šňupárek Richard, stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 17., 21.
Špíšek J., stud. V. tř. r. v Uh. Brodě, úl. 1., 4., 8.
Šrámek Leopold, stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 6., 8. až 17., 20., 21., 22., 24.

Táborský Frant., stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 22., 23.
Tereba Viktor, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 1. až 24.
Uchytil Alois, stud. VII. tř. g. v Jindřich. Hradci, úl. 1., 3., 8., 12.
Valach Frant., stud. VIII. tř. g. v Kroměříži, úl. 1. až 24.
Velísek Ignát, bohoslovec v Olomouci, úl. 1., 3. až 6., 8. až 12., 14. až 17., 21., 24.
Vermousek Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1. až 5., 8. až 13., 17.
Veselá Emilie, stud. gymn. na Král. Vinohradech, úl. 1. až 5., 10. až 17.
Veselý Frant., stud. VII. tř. g. v Olomouci, úl. 1. až 4., 8., 9., 10., 12., 14., 15., 16., 21.
Vilíta Jan, stud. VI. tř. r. v Písku, úl. 1. až 5., 7. až 12., 15., 16., 17., 20., 21.
Višinka Frant., stud. VIII. tř. g. v Brně, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 12., 17., 21., 24.
Vodička Karel, stud. VIII. tř. g. v Jindř. Hradci, úl. 1. až 5., 7. až 17., 21. až 24.
Vondráček Frant., stud. VI. tř. r. v Jičíně, úl. 1., 4., 8., 9., 11., 21.
Votrubová Žofie, stud. VIII. tř. střední školy dívčí v Praze, úl. 1. až 5., 8. až 11., 17., 21.
Vrbický Hynek, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 12., 21.
Wald J., stud. VI. tř. r. v Praze-I., úl. 1., 3., 5., 8., 12., 13.
Weissenstein Rudolf, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 1., 3., 4., 5., 8. až 12., 15., 17., 21.
Zahradníček Josef, stud. VIII. tř. g. v Třebíči, úl. 1. až 17., 21., 24.
Závada Bohuslav, stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1. až 21.
Zavadil Stan., stud. VI. tř. r. v Lipníku, úl. 1., 3., 4., 5., 8., 9., 10., 13. až 17., 21.
Nepodepsaný, dle pošt. razítka z Plzně, úl. 8., 9., 12., 15., 16.
J. T. z Prahy, úl. 1. až 6., 8., 12., 14. až 17., 21., 22., 24.