Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
O duchu mathematickém a některých jeho zjevech

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 8 (1879), No. 2, 85--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121015

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1879

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O duchu mathematickém a některých jeho zjevech.

Napsal

Dr. F. J. Studnička.

Tento název dal jsem přednášce, kterouž zahájena byla činnost naši Jednoty dne 20. října 1872, kdež jsem trojí zjev vytknul, vyskytující se při mathematickém vyšetřování. V tomto pak pojednání, které dle podstaty své má býti pokračováním řeči uvedené, budiž poukázáno k nové okolnosti, která zajímavým jsouc dokladem zvlášnosti ducha mathematického, zároveň představuje spolehlivého ukazovatele k oborům, v nichž formálně možná nauku zdokonalovati a novými obraty obohacovati. Mám tu na zřeteli postulat každé vědy exaktní, aby vývody čili deddukce její byly *co možná* nejkratší a nejpřesnější.

Velmi zhusta se stává, že jisté algebraické pochody jsou u porovnání s konečným výsledkem velmi složité a že zejména mnoho členů se během počtu krátí, aniž by podstatně přispěly k dosažení výsledku hledaného. Abychom měli určitý případ nějaký před očima, jednejme o řešení rovnic stupně prvního s třemi neznámými

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= n_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= n_2. \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= n_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Všeobecný spůsob řešení nahražuje tuto soustavu tří rovnic o třech neznámých odvozenou soustavou *)

$$\begin{aligned} (a_1 c_2) x + (b_1 c_2) y &= (n_1 c_2), \\ (a_2 c_3) x + (b_2 c_3) y &= (n_2 c_3), \end{aligned} \tag{2}$$

z níž pak vyloučením jedné neznámé, dejme tomu y, přichází se k rovnici jediné, z níž plyne co hodnota pro x

$$x = \frac{(n_1 c_2)(b_2 c_3) - (n_2 c_3)(b_1 c_2)}{(a_1 c_2)(b_2 c_3) - (a_2 c_3)(b_1 c_2)}, \tag{3}$$

s rozvedeme-li čitatele i jmenovatele a *zkrátíme-li, co možná,* konečně

*) Srovnej *Studnička* „Algebra pro vyšší třídy škol středních“ I. vyd. pag. 114. II. vyd. pag. 103.

$$x = \frac{n_1(b_2c_3) + n_2(b_3c_1) + n_3(b_1c_2)}{a_1(b_2c_3) + a_2(b_3c_1) + a_3(b_1c_2)}. \tag{4}$$

Jak patrno, vyvinují se tu i v čitateli i ve jmenovateli dva zbyteční členové, z čehož soudíme, že všeobecný tento způsob řešení není zároveň nejjednodušším a že radno jest hledati jiný, který poskytuje výhradně členy, vyskytující se ve vzorci (4); a způsob tento dokonalejší užívá determinantů, obcházeje zároveň vyvinování vzorců (2) a (3) co zbytečných, jelikož přímo poskytuje řešení soustavy (1) tvary známými *)

$$x = \frac{{}^{a}|^{n}\Delta}{\Delta},\quad y = \frac{{}^{b}|^{n}\Delta}{\Delta},\quad z = \frac{{}^{c}|^{n}\Delta}{\Delta}. \tag{5}$$

Jiný a to ještě poučnější příklad poskytuje nám způsob, jakým se dosud odvozovala základní jedna poučka z nauky o řetězcích; značí-li totiž P_k čitatele a Q_k jmenovatele k-té přibližné hodnoty řetězce

$$\overset{n}{\underset{k=1}{F}} \frac{a_k}{b_k} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right), \tag{6}$$

platí o nich, jak známo,**) relace

$$Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} a_k. \tag{7}$$

Obyčejný důkaz jest tu velmi dlouhý***) a při tom i nepřímý, zakládajíc se na dvojí soustavě vzorců, kdežto způsob přímý, užívající pouhých dvou vzorců pro vyjádření veličiny P_n a Q_n tvarem determinantním, bezprostředně vede k cíli. Jelikož totiž platí pro čitatele

$$P_n = a_1 \begin{vmatrix} b_2, & -1, & 0, \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ a_3, & b_3, & -1, \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_4, & b_4, \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & a_{n-1}, & b_{n-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, \ldots, & 0, & a_n & b_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

a podobně pro příslušného jmenovatele

*) ibid. pag. 116. nebo pag. 104.

**) ibid. pag. 161 „ pag. 145 pro ten případ, že všeobecně $a_k = 1$.

***) Srovnej na př. *Günther*: „Lehrbuch der Determinanten-Theorie" II. Aufl. pag. 129. nebo *Laurent* „Traité d'Algèbre" pag. 344.

$$Q_n = \begin{vmatrix} b_1, & -1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ a_2, & b_2, & -1, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_3, & b_3, & \ldots, & 0, & 0, & 0 \\ \vdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & a_{n-1}, & b_{n-1}, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0 & a_n, & b_n \end{vmatrix} \tag{9}$$

obdržíme podle známého*) vzorce determinantního

$$\varDelta = \frac{A_{11}\,A_{nn} - A_{n1}\,A_{1n}}{(a_{22}\,a_{33}\,\ldots\,a_{n-1,n-1})}, \tag{10}$$

kdež značí determinant tento

$$\varDelta = \Sigma \pm a_{11}\;a_{22}\,\ldots\,a_{nn}, \tag{11}$$

ze vzorce (9) pomocí výrazu (8) napřed

$$Q_n = \frac{a_1}{P_{n-1}}\left(Q_{n-1}\,\frac{P_n}{a_1} - (-1)^{n-1}\,a_2\,a_3\,\ldots\,a_n\right),$$

aneb rozložíme-li přiměřeně, konečně vzorec (7).

Při této příležitosti bychom uvésti mohli jiné upotřebení téhož vzorce (7) k odvození poučky, že symmetralní čili *protiměrný determinant s příčkou prázdnou stupně sudého jest úplným čtvercem,* kteráž se taktéž obyčejně dlouhou cestou odůvodňuje,**) kdežto vzorec (7) přímo k ní vede.

A podobných případů, kde se odvozování děje s velikým nákladem rozumovým, ač výsledek jest jednoduchý, mohli bychom uvésti celou řadu, zejména též i z počtu differencialního a integralního, kde se mi taktéž podařilo mnohé vzorce uvésti na tvar nejjednodušší. Není však zde účelem těchto řádků poskytovati dalších dokladů pro všeobecnou platnosť zjevu dříve vytknutého o jakosti mathematických vývodů a důkazů, nýbrž ukázati při obyčejném dělení algebraickém k téže okolnosti a vyložiti méně užívaný spůsob, jakým se co nejrychleji a bezprostředně přijde k cíli, a podati tak malý doplněk mathematického programu našich škol středních.

---

*) Viz *Studnička* „Beitrag zur Determinantentheorie“ Sitzungsber. d. k. böhm. Ges. d. Wiss. von 23 Februar 1877., kdež ponejprv tento vzorec vyvinut.

**) Viz na př. *Studnička* „O determinantech“ pag. 48 nebo *Mertens* „Über die Determinanten, deren correspondirende Elemente entgegengesetzt gleich sind“ Crelle's Journ. Bd. 82. pag. 207, kde tomuto důkazu věnováno jest skoro pět kvartových stran, ač se několika řádky dá odbýti, jakož jsem v pojednání předposledně jmenovaném ukázal.

Velmi zhusta nutno jest děliti dlouhý algebraický výraz tvaru

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (12)$$

linearním výrazem $x - k$ aneb, což v podstatě k stejnému vede postupu, dosaditi do výrazu tohoto za x hodnotu k a vyčísliti tudy $f(k)$; obyčejné dělení i dosazování jest však zdlouhavé, jakmile n jest veliké, a vyžaduje vyvinování celé řady členů, které se pak v jednodušší výrazy spojují. Nejprospěšnější a nejkratší způsob jest pak tento:

Jak z výrazu (12) jde na jevo, bude zajisté

$$\frac{f(x)}{x-k} = \varphi(x) + \frac{n}{x-k}, \quad (13)$$

kdež značí $\varphi(x)$ podobnou funkci stupně nižšího a n zbytek, takže tu platí s jedné strany pro dělení rozdílem $(x-k)$

$$f(x) = \varphi(x)(x-k) + n, \quad (14)$$

s druhé pak strany pro dosazení veličiny k

$$f(k) = n. \quad (15)$$

Dosadíme-li tedy do vzorce (14)

$$\varphi(x) = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

a znásobíme-li, jak tam naznačeno, obdržíme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n =$$

$$= A_1 x^n + \begin{array}{c|} A_2 \\ -kA_1 \end{array}\, x^{n-1} + \begin{array}{c|} A_3 \\ -kA_2 \end{array}\, x^{n-2} + \dots + \begin{array}{c|} A_n \\ -kA_{n-1} \end{array}\, x + \begin{array}{c} n \\ -kA_n \end{array};$$

porovnáním koefficientů stejně vysokých mocnin veličiny x zjednáme si pro neznámé součinitele podílu $\varphi(x)$ i pro zbytek n vzorce

$$\begin{array}{lll} A_1 & = a_0 & \\ A_2 & = k A_1 & + a_1 \\ A_3 & = k A_2 & + a_2 \\ & \vdots & \\ A_{n-1} & = k A_{n-2} & + a_{n-2} \\ A_n & = k A_{n-1} & + a_{n-1} \\ n & = k A_n & + a_n. \end{array} \quad (16)$$

Ze složení těchto vzorců jde pak na jevo tento mechanismus početní:

Aby se do výrazu (12) dosadila veličina k aneb aby se dělil výrazem $x - k$, sestaví se koefficienty jeho do řady, pod a před niž položí se čára a k levé straně napíše k, takže tu povstane schema, násobíme-li podlé vzorců (16),

	a_0	a_1	a_2	a_3	...	a_n
k	a_0	$kA_1 + a_1$	$kA_2 + a_2$	$kA_3 + a_3$	...	$kA_n + a_n$
	A_1	A_2	A_3	A_4	...	n

kdež v poslední řadě obdržíme i součinitele podílu $\varphi(x)$ i zbytek n, kterýž patrně jest nullou pro ten případ, že polynom $f(x)$ jest dělitelný rozdílem $x - k$ nebo že k jest kořenem rovnice

$$f(x) = 0.$$

Že postup tento se nemění, je-li k negativní, rozumí se samo sebou; nutno jen podlé toho psáti v schematě našem $-k$. Taktéž netřeba připomínati, že scházející v polynomu (12) členy se doplňují tak, jakoby součinitelem jich byla nulla.

Jak v určitých případech vypadá tento postup, poznáme nejlépe na příkladech následujících, jež si každý může podlé libosti rozhojniti.

Dejme tomu, že bychom měli děliti výraz

$$f(x) \equiv 2x^7 - 3x^6 - 2x^5 + x^4 - 12x^2 + 47$$

rozdílem $x - 2$; tu obdržíme schema

	1	−3	−2	1	0	−12	0	47
2	2	1	0	1	2	−8	−16	15

,

takže tu podíl bude

$$2x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 - 8x - 16,$$

zbytek pak $15 : (x - 2)$, což bychom i dlouhým dělením algebraickým obdrželi.

Dejme tomu, že bychom chtěli vyšetřiti, zda-li čísla 3 a 4, obsažená v samostatném členu rovnice

$$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 16x^2 + 19x - 12 = 0$$

co činitel, jsou též její kořenem. Tu nutno patrně dosaditi tam po sobě jedno i druhé číslo, jelikož se hodnota kořenu tím objeví, uvede-li se levá strana této rovnice na nullu; zde obdržíme tedy schema

	1	−6	11	−16	19	−12
3	1	−3	2	−10	−11	−45
4	1	−2	3	−4	3	0

z čehož patrno, že jen celistvé číslo 4 jest tu kořenem, číslo 3 pak byvši dosazeno poskytuje co výsledek — 45, jelikož i ostatní faktory čísla 12, totiž 1, 2, 6, 12 neposkytují co výsledek nullu.

Dejme tomu konečně, že bychom měli provésti dělení

$$(x^7 - x^4 + 1) : (x + 2);$$

tu obdržíme schema

	1	0	0	−1	0	0	0	1
−2	1	−2	4	−9	18	−36	72	−143

takže podlé toho jest

$$\frac{x^7 - x^4 + 1}{x + 2} = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 36x + 72 - \frac{143}{x+2},$$

Namítnouti by tu mohl snadno mnohý čtenář, že i zde nutno vyvinouti všechny koefficienty A nežli se přijde k hledanému zbytku a že tedy se též vyvinují členové zbyteční, jedná-li se jenom o n; a má zajisté v theorii pravdu, ač v praxi věc vypadá předc jinak. Kdybychom chtěli jen pouhé n anebo neodvisle čili independentně hodnotu kteréhokoli A vypočítati, bylo by nutno užíti vzorce

$$A_m = \begin{vmatrix} a_1, & -1, & 0, & 0, \dots, & 0 \\ a_2, & k, & -1, & 0, \dots, & 0 \\ a_3, & 0, & k, & -1, \dots, & 0 \\ a_4, & 0, & 0, & k, \dots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{m-1}, & 0, & 0, & 0, \dots, & k \end{vmatrix} + a_0 k^{m-1}, \qquad (17)$$

kterýž se po jednoduchém rozkladu obdrží ze soustavy (16); jedná-li se pak pouze o n co výsledek substituce, platí

$$A_{n+1} = n. \qquad (18)$$

Jak tedy ze vzorce (17) patrno, možná zcela neodvisle určiti které koli A; zda-li však odvislé jich ustanovování podlé schematu známého jest prospěšnější čili nic, o tom nebude zajisté nikdo v pochybnosti, poněvadž vzorec tento obsahuje pouhou substituci. Jestiť tu

$$\begin{aligned} A_2 &= a_0 k + a_1 \\ A_3 &= a_0 k^2 + a_1 k + a_2 \\ A_4 &= a_0 k^3 + a_1 k^2 + a_2 k + a_3 \qquad (19) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A_m &= a_0 k^{m-1} + a_1 k^{m-2} + a_2 k^{m-3} + \dots + a_{m-1}, \end{aligned}$$

což se ostatně i ze soustavy (16) postupným dosazováním veličin předcházejících do vzorců následujících obdrží; zároveň pak ukazují výrazy soustavy (19), jak složeny jsou koefficienty podílu $\varphi(x)$ ve vzorci (13), o čemž se ostatně taktéž dělením můžeme přesvědčiti.

Platí-li kde vůbec, platí v jistém smyslu i v mathematice „aliter in theoria, aliter in praxi", jedná-li se totiž o úsporu práce hmotné i rozumové, při čemž se vyskytují mnohé zvláštnosti tak zvaného *ducha mathematického.*

Úlohy.*)

Řešení mathematické úlohy 8.

Podal *Karel Mindřík* kandidat professury ve Vídni.

Majíce určiti pravoúhlou trajektorii parabol o společné tečně vrcholové, pro něž platí při proměnném parametru p rovnice

$$y^2 = 2px,$$

dosaďme do známé differencialní rovnice příslušné

$$1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

derivováním zjednanou hodnotu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\eta} = \frac{\eta}{2\xi},$$

načež obdržíme napřed

$$1 + \frac{d\eta}{d\xi}\frac{\eta}{2\xi} = 0,$$

z čehož plyne integrováním, značí-li, K^2 integrační stálou,

$$\frac{\xi^2}{K^2} + \frac{\eta^2}{2K^2} = 1,$$

což značí, soustavu ellips, u nichž se mají poloosy k sobě jako $1 : \sqrt{2}$.

---

*) Mathematickou úlohu 4., 5 a 6. řešil *Jiří Havlíček,* žák VII. tř. č. real. škol v Praze; mimo to řešil i fysikalní úlohu 2. a 4., kteroužto poslední taktéž správně rozřešil i *Karel Choura,* žák téže třídy.