Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

Příspěvek k teorii normál kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 69 (1940), No. Suppl., D141--D161

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120968

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Příspěvek k teorii normál kuželoseček.

Jan Schuster, Praha.

(Dokončení.)

5. Nyní uvažujme případ, že z O vycházejí tři dané normály a jedna tečna. Uplatní se tedy především rovnice (3b):

$$LB_1^2 + 2MB_1 + N = 0. \tag{22}$$

Vyloučíme pak z rovnic (17a) směrnici A_4, která je neznáma:

$$A_4 = K_1 - (A_1 + A_2 + A_3).$$

Když označíme k_1, k_2, k_3 kombinace veličin A_1, A_2, A_3 v kombinační součty sočinů tříd 1, resp. 2 a 3, bude

$$A_4 = K_1 - k_1,$$
$$A_4k_1 + k_2 = K_2,\ A_4k_2 = K_3 - k_3,\ A_4k_3 = K_4.$$

Vyloučení směrnice A_4 dá tedy:

$$K_1k_1 - K_2 = k_1^2 - k_2,\ K_1k_2 - K_3 = k_1k_2 - k_3,\ K_1k_3 - K_4 = k_1k_3.$$

Sem dosadíme hodnoty K_1 z rovnic (17a), čímž vznikne:

$$\begin{aligned} &-(2bL - 2aM)\,k_1 - L\,(2a - c) - N\,(2c - a) - 2fD = \\ &\qquad = (k_1^2 - k_2)\,(cN - 2bM + fD), \\ &-(2bL - 2aM)\,k_2 - 2cM + 2Nb = (k_1k_2 - k_3)\,(cN - 2bM + fD), \\ &-(2bL - 2aM)\,k_3 - aL + 2Mb - fD = k_1k_3\,(cN - 2bM + fD). \end{aligned}$$

Uspořádáním obdržíme rovnice:

$$\left.\begin{aligned} &L\,(-2bk_1 - 2a + c) + M\,(2ak_1 + 2b\,[k_1^2 - k_2]) + \\ &+ N\,(-2c + a - c\,[k_1^2 - k_2]) + fD\,(-2 - k_1^2 + k_2) = 0 \\ &-L2bk_2 + M\,(2ak_2 - 2c + 2b\,[k_1k_2 - k_3]) + \\ &+ N\,(2b - c\,[k_1k_2 - k_3]) - fD\,(k_1k_2 - k_3) \doteq 0 \\ &L\,(-2bk_3 - a) + M\,(2ak_3 + 2b + 2bk_1k_3) - Nck_1k_3 - \\ &\qquad - fDk_1k_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

Vyloučení veličin L, M, N, fD dá determinantní rovnici

$$\begin{vmatrix} B_1^2, & B_1, & 1, & 0 \\ -2bk_1 - 2a + c, & ak_1 + b(k_1^2 - k_1), & -2c + a - c(k_1^2 - k_2), & -2 - k_1^2 + k_2 \\ -2bk_2, & ak_2 - c + b(k_1k_2 - k_3, & 2b - c(k_1k_2 - k_3), & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & ak_3 + b + bk_1k_3, & -ck_1k_3, & -k_1k_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Přičteme-li čtvrtý sloupec b-násobný ke druhému, a zase $-c$-násobný ke třetímu, obdržíme:

$$\begin{vmatrix} B_1^2, & B_1 & 1, & 0 \\ -2bk_1 - 2a + c, & ak_1 - 2b, & a, & -2 - k_1^2 + k_2 \\ -2bk_2, & ak_2 - c, & 2b, & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & ak_3 + b, & 0, & -k_1k_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (23)$$

Rovnice (22) a poslední ze (22a) dovolují určit zase poměry:

$$L : M : N : fD =$$

$$\begin{vmatrix} 2B_1, & 1, & 0 \\ 2(ak_2 - c + b[k_1k_2 - k_3]), & 2b - c(k_1k_2 - k_3), & -k_1k_2 + k_3 \\ 2(ak_3 + b + bk_1k_3), & -ck_1k_3, & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: - \begin{vmatrix} B_1^2, & 1, & 0 \\ -2bk_2, & 2b - c(k_1k_2 - k_3), & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & -ck_1k_3, & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: \begin{vmatrix} B_1^2, & 2B_1 & 0 \\ -2bk_2, & 2(ak_2 - c + b[k_1k_2 - k_3]), & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & 2(ak_3 + b + bk_1k_3), & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: - \begin{vmatrix} B_1^2, & 2B_1, & 1 \\ -2bk_2, & 2(ak_2 - c + b(k_1k_2 - k_3)), & 2b - c(k_1k_2 - k_3) \\ -2bk_3 - a, & 2(ak_3 + b + bk_1k_3), & -ck_1k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} B_1, & 1, & 0 \\ ak_2 - c + b(k_1k_2 - k_3). & 2b, & -k_1k_2 + k_3 \\ ak_3 + b + bk_1k_3, & 0, & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: - \begin{vmatrix} B_1^2, & 1, & 0 \\ -2bk_2, & 2b, & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & 0, & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: 2 \begin{vmatrix} B_1^2, & B_1, & 0 \\ -2bk_2, & ak_2 - c, & -k_1k_2 + k_3 \\ -2bk_3 - a, & ak_3 + b, & -k_1k_3 \end{vmatrix} :$$

$$: -2 \begin{vmatrix} B_1^2, & B_1 + \frac{c}{b}, & 1 \\ -2bk_2, & (ak_2 - c)\frac{c}{b}, & 2b - c(k_1k_2 - k_3) \\ -2bk_3 - a, & (ak_3 + b)\frac{c}{b}, & -ck_1k_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\alpha_1 : -\alpha_2 : 2\alpha_3 : -2\alpha_4.$$

Když dosadíme tyto hodnoty do (14), z nichž vyloučeny e a d, bude

$$\left(2\alpha_1 - \frac{2\alpha_4 c}{D}\right)\left(2\alpha_3 - \frac{2\alpha_4 a}{D}\right) - \left(-\alpha_2 - \frac{2\alpha_4 b}{D}\right)^2 = 0, \tag{24}$$

která je formálně totožná s (19), ale význam determinantů je teď jiný. Determinanty α_i jsou nyní vesměs stupně druhého, tedy rovnice (24) stupně šestého, neboť ve členech, kde vystupuje jmenovatel D^2, se po sloučení jednou D zkrátí. Určení veličiny m vyžaduje nyní vyloučení a, b, c z rovnic (21), (23) a (24). Další postup dá pak L, M, N, f a posléze e, d. Veličina B_2 plyne ze (22) a A_4 z rovnice $A_4 = K_1 - (A_1 + A_2 + A_3)$, když K_1 dosadíme z první rovnice ze (17a).

6. Buďte dány dvě tečny B_1, B_2 a dvě normály A_1 a A_2. Tečnami určen poměr veličin $L : M : N = 1 : -\frac{1}{2}(B_1 + B_2) : : B_1B_2$. Vztahy normál pak dají

$$A_3 + A_4 = K_1 - A_1 - A_2 = K_1 - P, \tag{α}$$
$$A_3A_4 + A_1A_2 + (A_3 + A_4)(A_1 + A_2) = K_2,$$

z níž

$$A_3A_4 = K_2 - (K_1 - P)P - Q, \tag{β}$$
$$A_3A_4 = (A_1 + A_2) + A_1A_2(A_3 + A_4) = K_3$$

dá

$$A_3A_4P + (A_3 + A_4)Q = K_3.$$

Konečně

$$A_3A_4Q = K_4.$$

Vyloučením veličin $A_3 + A_4$ a A_3A_4 vzniknou dvě rovnice:

$$K_2P - K_1(P^2 - Q) + P^3 - 2PQ = K_3,$$
$$K_2Q - K_1PQ + P^2Q - Q^2 = K_4.$$

Do nich dosadíme hodnoty K_i z rovnic (17a)

$$\left.\begin{aligned} &L[(2a - c)P + 2b(P^2 - Q)] - 2M[a(P^2 - Q) + c - \\ &- b(P^3 - 2PQ)] + N[(2c - a)P + 2b + c(P^3 - 2PQ)] + \\ &\qquad + fD[2 + P^3 - 2PQ] = 0 \\ &L[(2a - c)Q + 2bPQ - a] + 2M[-aPQ + b - \\ &\qquad - bQ(P^2 - Q)] + N[(2c - a)Q + cQ(P^2 - Q)] \\ &\qquad + fD[2Q - 1 + Q(P^2 - Q)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Odtud se vyloučí fD a veličiny L, M, N se nahradí úměrnými hodnotami

$$1 : -\tfrac{1}{2}(B_1 + B_2) : B_1B_2.$$

Tím vznikne lineární rovnice mezi a, b, c.

Když pak vyjádříme f odtud jako veličinu úměrnou s jednou z veličin L, M, N, vznikne ze (14) rovnice

$$(L + fc)(N + af) - (M + fb)^2 = 0. \qquad (26)$$

Ježto f jest úměrné lineární funkci veličin a, b, c, jsou fa, fb, fc vesměs stupně druhého, a poslední rovnice je stupně čtvrtého. Přibráním (21) obdržíme zase tři homogenní rovnice, z nichž lze a, b, c vyloučit.

Nyní možná určit K_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ze (17a) a veličiny A_3, A_4 plynou z (α) (β). Ostatní dopočítání jest už prostinké.

7. Jako výše uvažované případy určení kuželosečky až na homotetii vytkneme další úkoly částečného určení kuželosečky i geometrická místa význačných bodů s ním souvisící.

Hledejme kuželosečky určené dvěma páry rovnoběžných normál. V tomto případě opisují ohniska a vrcholy jisté křivky, které určíme.

Hned můžeme soustavu souřadnou specialisovat, užívajíce souměrnosti normál podle středu křivky, který učiníme počátkem soustavy. (Úkol je totožný s určením kuželosečky ze středu a dvou normál.) Normály mají rovnice:

$$y = A_1x \pm m, \quad y = A_2x \pm n.$$

Užijeme poslední rovnice z odst. 16, uvedené v 68. ročníku tohoto časopisu na str. D 126, a učiníme $u = 2x$, $v = 2y$, $s = 0$, $t = 0$, $a_1 = m$, $a_2 = -m$, $a_3 = n$, $a_4 = -n$. Ohnisko buď (x, y).

Obdržíme rovnici:

$$4R^2(1 + A_1^2)\,4m^2 = 4(A_1x - y)^2(4x^2 + 4y^2A_1^2 + 4m^2 + 8A_1xy)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{nebo} & R^2m^2(1 + A_1^2) = (A_1x - y)^2[(x + A_1y)^2 + m^2]\\ \text{a podobně} & R^2m^2(1 + A_2^2) = (A_2x - y)^2[(x + A_2y)^2 + n^2]\end{array}\right\}(\alpha).$$

Přejdeme k polárním souřadnicím. Buď $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ průvodič ohniska, ϑ polární úhel. Dále buď $A_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $A_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, a označme $p = m\cos\alpha_1$, $q = n\cos\alpha_2$ vzdálenosti normál od středu. Rovnice nabudou tvaru

$$R^2p^2\sec^4\alpha_1 = \sec^4\alpha_1\varrho^2\sin^2(\vartheta - \alpha_1)[\varrho^4\cos^2(\vartheta - \alpha_1) + p^2]$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{nebo} & R^2p^2 = \varrho^4\sin^2(\vartheta - \alpha_1)\cos^2(\vartheta - \alpha_1) + \varrho^2p^2\sin^2(\vartheta - \alpha_1)\\ \text{a} & R^2q^2 = \varrho^4\sin^2(\vartheta - \alpha_2)\cos^2(\vartheta - \alpha_2) + \varrho^2p^2\sin^2(\vartheta - \alpha_2)\end{array}\right\}(\beta)$$

Tyto dvě rovnice dovolují určit R^2 a ϱ^2 jako funkce úhlu ϑ. Dělením obdržíme

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{\varrho^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) + p^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1)}{\varrho^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) \cos^2 (\vartheta - \alpha_2) + q^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2)},$$

tedy křivku stupně 4., opsanou ohnisky. Jinak

$$\varrho^2 = 4p^2q^2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_2 - 2\vartheta)}{q^2 \sin^2 2 (\alpha_1 - \vartheta) - p^2 \sin^2 2 (\alpha_2 - \vartheta)}.$$

K určení R vylučme ϱ z rovnic (β), při čemž

$$\varrho^4 = \frac{R^2 p^2 q^2 [\sin^2 (\vartheta - \alpha_2) - \sin^2 (\vartheta - \alpha_1)]}{\sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) [q^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) - p^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_2)]}$$

$$\varrho^2 = \frac{R^2 [q^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) - p^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) \cos^2 (\vartheta - \alpha_2)]}{\sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) [q^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) - p^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_2)]}.$$

Odtud

$$R^2 = 16p^2q^2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2) \sin (2\vartheta - \alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) \cdot \frac{[q^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) - p^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_2)]}{[q^2 \sin^2 2 (\vartheta - \alpha_1) - p^2 \sin^2 2 (\vartheta - \alpha_2)]^2}.$$

Podobně bychom mohli určit geometrické místo vedlejších vrcholů. K tomu stačí v rovnicích (β) nahradit R^2 hodnotou $r^2 + \varrho^2$ a ϑ úhlem $\vartheta + 90°$.

$$(r^2 + \varrho^2)\, p^2 = q^4 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) + \varrho^2 p^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_1),$$
$$(r^2 + \varrho^2)\, q^2 = \varrho^4 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) \cos^2 (\vartheta - \alpha_2) + \varrho^2 q^2 \cos^2 (\vartheta - \alpha_2),$$

z čehož

$$r^2 p^2 = \varrho^4 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1) \cos^2 (\vartheta - \alpha_1) - \varrho^2 p^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_1),$$
$$r^2 q^2 = \varrho^4 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2) \cos^2 (\vartheta - \alpha_2) - \varrho^2 q^2 \sin^2 (\vartheta - \alpha_2).$$

Tyto rovnice jsou totožné s rovnicemi (β) až na $-\varrho^2$ místo ϱ^2. Tedy dávají pro vrchol (při vyloučení $-\varrho^2$) týž výsledek jako prve. Leží tedy všecky vrcholy na téže křivce. Ale pro vyloučení r^2 je výsledek jiný, odpovídá geometrickému místu vedlejších (imaginárních) ohnisek.

8. Kdyby byl dán pár rovnoběžných tečen a pár rovnoběžných normál, byly by základní rovnice

$$y = Ax \pm m, \quad y = Bx \pm n.$$

Rovnici platnou pro tečnu vyjmeme z citované práce na str. D 125 řádek 3. shora (ve druhém členu třeba při R^2 doplnit činitele 4) ve tvaru:

$$(4y^2 - 4R^2)\, B^2 + 4x^2 - 4R^2 + 8Bxy = -4n^2.$$

Po zkrácení lze tuto rovnici psát:

$$R^2 (1 + B^2) = (x + By)^2 + n^2.$$

Zaveďme zase $q = n \cos\beta$, $B = \operatorname{tg}\beta$. Bude

$$R^2 \sec^2\beta = \sec^2\beta\varrho^2\cos^2(\vartheta - \beta) + n^2.$$

Když přibereme první z rovnic (β) bez indexu, budeme mít dvě rovnice:

$$\left.\begin{aligned} R^2 &= \varrho^2\cos^2(\vartheta - \beta) + q^2 \\ R^2p^2 &= \varrho^4\sin^2(\vartheta - \alpha)\cos^2(\vartheta - \alpha) + \varrho^2p^2\sin^2(\vartheta - \alpha) \end{aligned}\right\} \quad (\gamma)$$

Nyní je vyloučení zvláště jednoduché. Pro ϱ^2, tedy pro geometrické místo ohniska, máme rovnici 4. stupně:

$$\varrho^4\sin^2(\vartheta - \alpha)\cos^2(\vartheta - \alpha) + \varrho^2p^2[\sin^2(\vartheta - \alpha) - \cos^2(\vartheta - \beta)] - \\ - p^2q^2 = 0.$$

Pro geometrické místo hlavních vrcholů obdržíme

$$R^4\sin^2(\vartheta - \alpha)\cos^2(\vartheta - \alpha) - R^2\{2q^2\sin^2(\vartheta - \alpha)\cos^2(\vartheta - \alpha) + \\ + p^2[\cos^2(\vartheta - \beta) - \sin^2(\vartheta - \alpha)]\cos^2(\vartheta - \beta)\} + \\ + q^2\sin^2(\vartheta - \alpha)\{q^2\cos^2(\vartheta - \alpha) - p^2\cos^2(\vartheta - \beta)\} = 0.$$

Pro vedlejší vrcholy přepíšeme rovnice (γ), jak výše vyloženo, na

$$r^2 + \varrho^2 = \varrho^2\sin^2(\vartheta - \beta) + q^2,$$
$$(r^2 + \varrho^2)\,p^2 = \varrho^4\cos^2(\vartheta - \alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha) + \varrho^2p^2\cos^2(\vartheta - \alpha).$$

Odtud pak

$$r^2 = -\varrho^2\cos^2(\vartheta - \beta) + q^2,$$
$$r^2p^2 = \varrho^4\cos^2(\vartheta - \alpha)\sin^2(\vartheta - \alpha) - p^2\varrho^2\sin^2(\vartheta - \alpha)$$

a vyloučením ϱ^2 se zase obdrží táž křivka jako pro R^2. Obojí vrcholy leží na témž geom. místě. Vyloučení veličiny r^2 dá geometrické místo vedlejších ohnisek.

Rovnice tvaru první z rovnic (γ) by řešily úkol pro daný střed a dvě tečny, je tedy zvláště jednoduchý.

Jistou zajímavost může mít případ, kdy dány dva páry tečen a normál vesměs spolu rovnoběžných. Pak nutně musí tvořit dva pásy rovnoběžné se společnou osou souměrnosti. Když zvolíme střed na této ose, stačí v rovnicích (γ) učinit $\alpha = 0$, $\beta = 0$, a obdržíme

$$R^2 = \varrho^2\cos^2\vartheta + q^2, \quad R^2\varrho^2 = \varrho^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \varrho^2p^2\sin^2\vartheta.$$

Výsledky jsou:

$$\varrho^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \varrho^2p^2(\sin^2\vartheta - \cos^2\vartheta) - p^2q^2 = 0$$

nebo

$$x^2y^2 + p^2(y^2 - x^2) - p^2q^2$$

jako geometrické místo ohnisek, což je křivka křížová, a pro geometrické místo vrcholů

$$R^4\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta - R^2\{2q^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + p^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\}\cos^2\vartheta + \\ + q^2\sin^2\vartheta\,(q^2\cos^2\vartheta - p^2\sin^2\vartheta) = 0.$$

Zkraťme číslem $\cos^2 \vartheta$ a znásobme veličinou $R^2 = x^2 + y^2$. Bude

$$(x^2 + y^2)^2 y^2 - \{2q^2x^2y^2 + p^2 (x^4 - y^4)\} + q^2 (q^2 - p^2) y^2 = 0.$$

Zkrácený činitel odpovídá odštěpení dvojné osy pořadnic z geometrického místa, což sníží stupeň křivky o dvě jednotky.

9. Jako další úkol poněkud přístupný řešení uvažujme případ, kdy tři normály a jedna tečna tvoří obdélník. Aby se práce zjednodušila, zvolme dvě normály rovnoběžné s osou úseček ve vzdálenostech $\pm a$, třetí normála buď v ose y. Tečna s touto rovnoběžná měj na ose úseček úsek b. Křivka musí být souměrná dle osy x-ové, střed její bude v ose, tedy $t = 0$. Směrnice obou normál je nulová, což dá první podmínku:

$$16R^2a^2 = v^2 [u^2 + 4a^2]. \tag{α}$$

(Odkazuji na citovanou rovnici normály, kde se položí $A_k = 0$, $a_k = a$, $t = 0$.)

Pro třetí normálu bude $A_k = \infty$, $t = 0$, tedy zbudou v rovnici normály jen koeficienty nejvyšší mocniny směrnice A_k:

$$4R^2s^2 = u^2 (s^2 + v^2). \tag{β}$$

Rovnici tečny napřed upravíme tak, že zavedeme $b_k = bB_k$ a zase vyjmeme jen koeficienty nejvyšší mocniny B_k, což dá:

$$s^2 + v^2 - 4R^2 + 4sb + 4b^2 = 0. \tag{γ}$$

Tyto tři rovnice mezi veličinami u, v, s, R mohou sloužit k určení hledaných geometrických míst. Vyloučením veličiny R^2 vzniknou rovnice:

$$\left.\begin{aligned} s^2u^2v^2 &= 4a^2 (u^2s^2 + u^2v^2 - s^2v^2) \\ (s + 2b)^2 &= \frac{u^2v^2}{4a^2} \end{aligned}\right\} \tag{δ}$$

Z rovnice $t = 0$ plyne $y_0 = - y_1$, tedy $v = 2y_0 = - 2y_1$, dále je $s + u = 2x_0$, $s - u = 2x_1$.

První z rovnic (δ) dá se přepsat na:

$$u^2s^2 (v^2 - 4a^2) = 4a^2v^2 (u^2 - s^2)$$

a po zavedení souřadnic:

$$\left.\begin{aligned} &(x_0{}^2 - x_1{}^2) (y_0{}^2 - a^2) = - 16a^2y_0{}^2y_0x_1. \\ &\text{Druhá dá ihned: } x_0 + x_1 + 2b = \pm \frac{(x_0 - x_1)\, y_0}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{ε}$$

V těchto rovnicích obsaženy souřadnice ohnisek a vhodné vyloučení dá geometrické místo. Když vypočteme x_0 z poslední, $x_0 = \dfrac{x_1 (\pm y_0 - a) - 2ab}{a \pm y_0}$, a nahradíme-li hned y_0 hodnotou $- y_1$, tedy $x_0 = \dfrac{x_1(\mp y_1 - a) - 2ab}{a \mp y_1}$, obdržíme z předposlední rovnice pro geometrické místo ohniska (x_1, y_1) rovnici:

$$\frac{(\mp 2x_1y_1 - 2ab)^2 (-2ax_1 - 2ab)^2}{(a \mp y_1)^2} (a^2 - y_1^2) =$$
$$= 16a^2y_1^2x_1 \frac{\mp x_1y_1 - ax_1 - 2ab}{a \mp y_1}$$

nebo

$$(\pm x_1y_1 + ab)^2 (x_1 + b)^2 (a^2 - y_1^2) =$$
$$= - y_1^2x_1 (2ab + ax_1 \mp x_1y_1) (\pm y_1 - a)^3.$$

V této rovnici patří k sobě zvláště znamení horní a zvláště znamení dolní.

Vyloučíme-li x_1, bude

$$(\pm x_0y_0 - ab)^2 (x_0 + b)^2 (a^2 - y_0^2) =$$
$$= y_0^2x_0 (\pm x_0y_0 - ax_0 - 2ab) (a \pm y_0)^3.$$

Porovnáme-li obě poslední rovnice, vidíme, že se druhá s dolním znamením ztotožní s první rovnicí pro horní znamení a naopak. Vidíme tedy, že postačí uvažovat jen jednu ze získaných rovnic, takže druhá z rovnic (ε) dává řešení pro jedno ohnisko s horním znamením, pro druhé ohnisko s dolním znamením, neboť označení souřadnice indexem nemá pro obecnou křivku významu.

K určení geometrického místa hlavního vrcholu užijeme úměrnosti rozdílů souřadnic vrcholů a ohnisek s poloosou a výstředností, která dá:

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \pm \frac{(x_0 - x_1) R}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = \frac{s}{2} \pm \frac{uR}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$
$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} \pm \frac{(y_0 - y_1) R}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = 0 \pm \frac{vR}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Nyní užijeme rovnic (δ), dosadíce napřed druhou do první,

$$u^2 - v^2 = \frac{s^2 - 4a^2}{s^2} (s + 2b)^2, \quad u^2v^2 = 4a^2 (s + 2b)^2.$$

Jsou tedy u^2, $-v^2$ kořeny rovnice

$$z^2 - \frac{s^2 - 4a^2}{s^2} (s + 2b)^2 z + 4a^2 (s + 2b)^2 = 0,$$

která dá:

$$z_{12} = \frac{s^2 - 4a^2}{2s^2} (s + 2b)^2 \pm \frac{s + 2b}{2s^2} S,$$

když $S^2 = (s^2 - 4a^2)^2 (s + 2b)^2 - 16a^2s^4$. Pro horní znamení veličiny u^2 platí:

$$u^2 = z_1, \quad v^2 = -z_2. \quad u^2 + v^2 = z_1 - z_2 = \frac{s + 2b}{s^2} S.$$

Dále je podle (γ):

$$4R^2 = (s + 2b)^2 - \frac{s^2 - 4a^2}{2s^2}(s + 2b)^2 - \frac{s + 2b}{2s^2} S =$$
$$= (s - 2b)^2 - z_2,$$

tedy

$$R^2 = \frac{(s + 2b)^2 (s^2 + 4a^2)}{8s^2} - \frac{s + 2b}{8s^2} S.$$

Máme tedy pro geometrické místo hlavního vrcholu parametrické vyjádření:

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{1}{4s} \sqrt{(s + 2b)^2 (s^2 + 4a^2) - (s + 2b) S} \,.$$
$$\cdot \sqrt{\frac{(s^2 - 4a^2)(s + 2b) + S}{S}}$$

$$y = \pm \frac{1}{4s} \sqrt{(s + 2b)^2 (s^2 + 4a^2) - (s + 2b) S} \,.$$
$$\cdot \sqrt{\frac{-(s^2 - 4a^2)(s + 2b) + S}{S}} \,.$$

Pro vedlejší vrcholy platí, jak se snadno usoudí ze vztahů platných mezi osami a výstředností,

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \mp \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} r;$$

$$y = \frac{y_0 + y_1}{2} \pm \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} r.$$

Ale

$$r^2 = R^2 - \frac{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}{4} = \frac{(s + 2b)^2 + v^2}{4} -$$
$$- \frac{u^2 + v^2}{4} = \frac{(s + 2b)^2 - z_2}{4},$$

tudíž

$$x = \frac{s}{2} \mp \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{1}{2} \sqrt{(s + 2b)^2 - z_2},$$

$$y = \pm \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \frac{1}{2} \sqrt{(s + 2b)^2 - z_2}$$

nebo

$$x = \frac{s}{2} \mp \sqrt{(s + 2b)^2 (s^2 + 4a^2) + (s + 2b) S} \,.$$

$$\cdot \sqrt{\frac{-(s^2 - 4a^2)(s + 2b)^2 + S}{S}},$$

$$y = \pm \sqrt{(s + 2b)^2 (s^2 + 4a^2) + (s + 2b) S} \,.$$

$$\cdot \sqrt{\frac{(s^2 - 4a)^2 (s + 2b)^2 + S.}{S}}$$

Uvážíme-li, že určení křivky v souřadnicích x, y by k vyloučení veličiny s vyžadovalo uvést napřed výrazy na racionální tvar, vidíme, že všechny vrcholy leží na téže křivce.

Směr osy možná také vyjádřit veličinou s. Její rovnice zní:

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_0, & y_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \end{vmatrix} = 0 \equiv \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ s + u, & v & 2 \\ s - u, & -v, & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ nebo}$$

$$\begin{vmatrix} x & y, & 1 \\ s + u, & v, & 2 \\ s, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ tedy } \begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ u, & v, & 0 \\ s, & 0, & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Máme tedy

$$2xv - 2yu = sv,$$

což lze přepsat na

$$2y\sqrt{z_1} = (2x - s) \sqrt{z_2} \text{ a } 2yz_1 = (2x - s) \sqrt{z_1 z_2}$$

nebo

$$y \frac{s + 2b}{s^2} [(s^2 - 4a^2)(s + 2b) + S] = (2x - s)\, 2a\, (s + 2b)$$

a po úpravě

$$y\, [(s^2 - 4a^2)(s + 2b) + S] = (2x - s)\, 2as^2.$$

10. Předešlému obdobný případ, poněkud jednodušší, jest obdélník ze tří tečen a jedné normály. Osa x buď osou pásu rovnoběžných tečen, což vyžaduje $t = 0$, $B_k = 0$, $b_k = b$:

$$u^2 - 4R^2 = -4b^2. \qquad (\alpha)$$

Třetí tečna měj úsek $b_k = aB_k$. Když pak $B_k = \infty$, je

$$4R^2 s^2 = u^2 (s^2 + v^2). \qquad (\beta)$$

Normálu položme do osy y, čímž plyne $a_k = 0$, $A_k = \infty$, $t = 0$. Odtud

$$s^2 + v^2 - 4R^2 + 4as + 4a^2 = 0. \qquad (\gamma)$$

Z rovnice (α) dosadíme R^2 do ostatních, takže

$$\left.\begin{array}{c} s^2(u^2+4b^2)=u^2(s^2+v^2), \text{ nebo } 4b^2s^2=u^2v^2 \\ (s+2a)^2+v^2-u^2=4b^2. \end{array}\right\} \qquad (\delta)$$

Jde tedy o řešení souměrných rovnic

$$u^2-v^2=(s+2a)^2-4b^2,\quad u^2v^2=4b^2s^2,$$

jejichž kořeny odpovídají rovnici

$$z^2-[(s+2a)^2-4b^2]\,z-4b^2s^2=0,$$

$$z_{1,2}=\tfrac{1}{2}\{(s+2a)^2-4b^2\pm T\},\ \text{kde } T^2=[(s+2a)^2-4b^2]^2+16b^2s^2$$

a proto $\qquad 4R^2=z_1+4b^2,\ u^2+v^2=z_1-z_2=T$

$$x=\frac{s}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(s+2a)^2-2b^2+T}\ \sqrt{\frac{(s+2a)^2-4b^2+T}{2T}}$$

$$y=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(s+2a)^2-2b^2+T}\ \sqrt{\frac{-(s+2b)^2+4b^2+T}{2T}}.$$

Výpočty pro vedlejší vrcholy jsou zcela obdobné s hořejšími. K určení geometrického místa ohnisek vyjdeme od rovnic (δ). Zase je

$$v=2y_0=-2y_1,\ u=2x_0-s,\ \text{resp. } u=s-2x_1,\ \text{takže}$$

$$(s+2a)^2+4y^2-(2x_0-s)^2=4b^2,\ 2bs=\pm 2y_0(2x_0-s).$$

První rovnici přepišme na $(x_0+a)(s+a-x_0)=b^2-y^2$, z čehož

$$s=x_0-a+\frac{b^2-y^2}{x_0+a}.$$

Druhá rovnice dá $s=\dfrac{\pm 2x_0y_0}{b\pm y_0}$.

Je tedy hledaná rovnice

$$\mp 2x_0y_0(x_0+a)=(x_0^2-a^2+b^2-y^2)(b\mp y_0).$$

Pro druhé ohnisko máme

$$(s+2a)^2+4y^2-(s-2x_1)^2=4b^2,\ 2bs=\pm 2y_1(s-2x_1).$$

Vidíme, že až na znamení při y a změnu indexu jsou obě rovnice totožné, takže předešlá rovnice udává geometrické místo druhého ohniska pro dolní znamení.

11. Jako další jednoduchý případ vyšetřme geometrická místa centrických kuželoseček, když dvě normály jsou dvě sousední strany obdélníka, a dvě tečny zbylé dvě strany téhož obdélníka. Položme normály do os souřadných a tečny mějte rovnice $y=b_1$, $x=b_2$. Pak v rovnicích v odst. 16. položíme jednou $a_k=0$, $A_k=0$, po druhé $A_k=\infty$, $a_k=0$, a máme

$$4R^2t^2 = v^2 (u^2 + t^2), \; 4R^2s^2 = u^2 (s^2 + v^2). \qquad (\alpha)$$

Pro tečny pak platí dle odst. 15 jednou $B_k = 0$, $b_k = b_1$, po druhé $B_k = \infty$, $b_k = b_2 B_k$, tudíž

$$u^2 + t^2 - 4R^2 - 4tb_1 = -4b_1{}^2, \; s^2 + v^2 - 4R^2 + 4sb_2 = -4b_2{}^2 \quad (\beta)$$

nebo

$$u^2 + (t - 2b_1)^2 = 4R^2, \; (s + 2b_2)^2 + v^2 = 4R^2. \qquad (\beta_1)$$

Dosaďme do (α), psaných ve tvaru

$$u^2v^2 = t^2 [4R^2 - v^2] = s^2 [4R^2 - u^2]$$

hodnoty $4R^2$ z (β_1). Tím vznikne

$$t^2 (s + 2b_2)^2 = s^2 (t - 2b_1)^2 = u^2v^2. \qquad (\gamma)$$

Tato rovnice dává jako geometrické místo středu křivky $(x = \frac{1}{2}s,\; y = \frac{1}{2}t)$ rozpadlou křivku

$$(st + b_2t - b_1s)(b_2t + b_1s) = 0,$$
$$\text{nebo } (xy + \tfrac{1}{2}b_2\, y - \tfrac{1}{2}b_1\, x)(b_2y + b_1x) = 0$$

která se skládá z hyperboly a přímky.

K určení ohnisek přibereme veličiny u, v. Z (β_1) obdržíme odečtením

$$u^2 - v^2 = (s + 2b_2)^2 - (s - 2b_1)^2$$

a rovnice (γ) dá

$$u^2v^2 = t^2 (s + 2b_2)^2.$$

Nyní se řešení štěpí. Vpravo vyloučíme t buď hodnotou $t = -\dfrac{b_1s}{b_2}$, nebo $t = \dfrac{b_1s}{s + b_2}$, a obdržíme u^2, v^2 jako kořeny z_1, z_2 kvadratické rovnice, a dále souřadnice ohnisek jako funkce parametru s. Máme totiž pro ohniska

$$2x_{0,1} = s \pm \sqrt{z_1}, \; 2y_{0,1} = \sqrt{z_2} \pm t.$$

Pro vrcholy pak platí rovnice

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{Ru}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \; y = \frac{t}{2} \pm \frac{Rv}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Poněvadž výpočty jeví značnou složitost, spokojíme se s těmito údaji.

12. Do okruhu těchto úvah zapadá i parabola. Úloha jest, určiti geometrické místo ohniska paraboly, dány-li tečna a normála spolu rovnoběžné, a další normála nebo tečna. Do osy úseček položme normálu, k níž je rovnoběžná tečna, a další přímka prochází počátkem. Podle odst. 9. a 10. citované práce máme tedy

rovnice

$$-uB - y_0 = 0,\ u = B(y_0 - b). \tag{α}$$

Počátkem jdoucí normála dá rovnici:

$$u(A_1 - B)(1 + A_1^2) - (1 + 2BA_1)(y_0 - x_0A_1) - \\ - B^2A_1^2(y_0 - x_0A_1) = 0.$$

Z prvních dvou rovnic vznikne

$$B = \sqrt{\frac{y_0}{b - y_0}},\ u = -\sqrt{y_0(b - y_0)},$$

dosazení do třetí dá:

$$-A_1\sqrt{\frac{y_0}{b - y_0}}\,[(b - y_0)(1 + A_1^2) + 2(y_0 - x_0A_1)] + \\ + y_0(1 + A_1^2) - (y_0 - x_0A_1)\left[1 + A_1^2\frac{y_0}{b - y_0}\right] = 0. \tag{β}$$

Dvojznačnost zahrnuta do znamení odmocniny a racionalisací zaniká.

Kdyby druhá normála byla kolmá k prvé, t. j. kdyby splynula s osou pořadnic, stala by se směrnice A_1 nekonečnou, z rovnice by zbyl jen koeficient při A_1^3, a křivka by přešla v kissoidu

$$(b - y_0)^3 = x_0^2y_0$$

s bodem úvratu v průseku tečny s normálou $(0, b)$.

K určení geometrického místa vrcholu (x, y) přičteme k x_0 průmět veličiny $\frac{p}{2}$ (z citované práce na str. D 96), t. j. $\frac{p}{2\sqrt{1 + B^2}}$ pro $A_k = 0$, $a_k = 0$, což dá $\frac{y_0}{-B(1 + B^2)}$. Mimo to leží vrchol na ose $y - y_0 = B(x - x_0)$. Je tedy

$$x = x_0 - \frac{y_0}{B(1 + B^2)},\ y = y_0\frac{B^2}{1 + B^2}. \tag{δ}$$

Ježto podle hořejšího je

$$y_0 = \frac{bB^2}{1 + B^2},\ x_0 = \frac{b}{B(1 + B^2)},$$

platí:

$$x = \frac{b}{B(1 + B^2)^2},\ y = \frac{bB^4}{(1 + B^2)^2}.$$

Kdyby však další daný prvek byla tečna, přibyla by k rovnicím (α) rovnice:

$$u(1 + B_1^2) = (y_0 - x_0B_1)(B - B_1).$$

Dosazení horních hodnot dá pak kubickou křivku:

$$y_0\,[b\,(1 + B_1^2) - y_0 B_1^2 - x_0 B_1]^2 = (y_0 - x_0 B_1)^2\, B_1^2\,(b - y_0).$$

Kdyby tečna splynula s osou y, bylo by $B_1 = \infty$, křivka je pak kruh $x_0^2 + y_0^2 = by_0$. Pro vrchol platí rovnice (δ). Dosadíme-li do rovnice kružnice $B^2\,(b - y_0) = y_0$, bude

$$B = \frac{y_0}{x_0}, \text{ z čehož } x_0 = \frac{bB}{1 + B^2}, \quad y_0 = \frac{bB^2}{1 + B^2}.$$

tedy dle (δ)

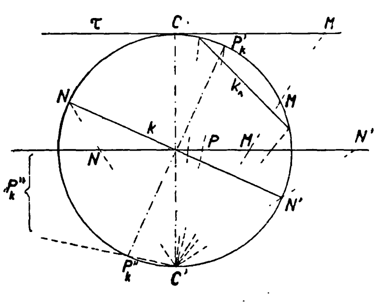
$$x = \frac{bB^3}{(1 + B^2)^2}, \quad y = \frac{bB^4}{(1 + B^2)^2},$$

nebo $(x^2 + y^2)^2 = by^3$, t. j. ovál.

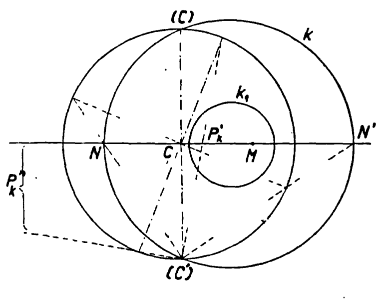
Poznámky ke Gaussovu pentagrammatu.[1])

Em. Klier, Plzeň.

Stereografický průmět. Abychom přehledně zobrazili celý povrch koule, užijme stereografického průmětu koule. V obrazci 1 je poledníkový řez, v obrazci 2 stereografický průmět. Základní pravidla tohoto promítání jsou:



Obr. 1.



Obr. 2.

[1]) Články o pravidlu Neperově a Gaussově pentagrammatu uveřejněné v poslední době v tomto Časopise:

1. Klier: Gaussovo p. m. v Lobačevského geometrii. **62** (1932/3), 164.
2. Vavřinec: Neperovo pravidlo. **64** (1934/5), D 123.
3. Friedrich: Jiná cesta k Neperovu pravidlu. **64** (1934/5), D 124.
4. Friedrich: Původ jednotnosti v pravidle Neper. **64** (1934/5), D 151.
5. Klier: Důkaz a zobecnění pravidla Neperova **66** (1936/7), D 15.
6. Klier: Sférické a hyperbolické pent. mirif. **67** (1937/8), D 173.

1. Na povrchu koule zvolme bod C. Sestrojme v něm rovinu tečnou τ. Z diametrálně protilehlého bodu C' promítneme každý bod povrchu koule do roviny τ. Užijme však místo této roviny roviny rovnoběžné, jdoucí středem koule. Na př. bod M mějž průmět M.

2. Kružnice, v níž zobrazovací rovina protíná kouli (rovník), je zároveň stereografickým průmětem téže kružnice.

3. Promítání zachovává úhly nezměněny. Křivky na kouli a jejich stereografické průměty se protínají pod týmiž úhly. Poledníky protínají kolmo rovník na kouli i v obraze.

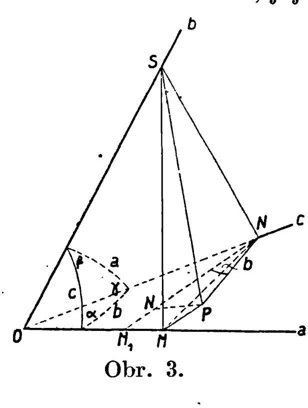
4. Každá kružnice na kouli, na př. k_1, zobrazuje se jako kružnice. Střed obrazu není však obrazem středu na kouli. Hlavní kružnice (jejichž roviny jdou středem koule), na př. k, promítají se jako kružnice protínající obraz rovníku v diametrálných bodech. Jejich obrazy půlí rovník. Naopak: každá taková kružnice je obrazem hlavní kružnice. Svazek hlavních kružnic jdoucích bodem C promítá se jako svazek přímek o středu C. Stereografický průmět bodu C' je úběžný bod kterékoliv přímky tohoto svazku.

5. K danému obrazu bodu — na př. N — sestrojíme diametrální N', považujeme-li N za „nejvyšší" na hlavní kružnici a v rovině ster. průmětu provedeme konstrukci, jaká je zřejmá v poledníkovém řezu (obr. 1). T. j.: Obraz N spojíme s C, vztyčíme kolmici, její průsečík (C) s obrazem rovníku spojíme s obrazem N, kolmice v (C) určí N'.

6. Obrazy dvou bodů spojit obrazem hlavní kružnice. Sestrojíme k jednomu bodu protilehlý a hledaná kružnice je dána třemi body.

7. K obrazu hlavní kružnice sestrojiti obraz pólů. Na př. P'_k ke kružnici k. Konstrukci jevící se v poledníkovém řezu provedeme v rovině průmětu. T. j. (C) spojíme s obrazem „nejvyššího" bodu (nejbližšího k C v obrazu) N. Průsečík této spojnice s obrazem rovníku spojíme s C, kolmice v C protne obraz rovníku v bodě, jejž spojíme s (C) a dostaneme P'_k a obdobně P''_k.

Trojhrany. Budiž dán trojhran o vrcholu O, hranách a, b, c a úhlech α, β, γ. Na hraně b volme bod S a spusťme z něho kolmici a) na rovinu ac, b) na hranu a, c) na hranu c. Tím povstal nový trojhran o vrcholu S a hranách SP, SM, SN. Průmět lomené čáry $ONPMS$ do libovolného směru lze vyjádřit jako průmět úsečky OS nebo jako součet průmětů jednotlivých úseček. Promítneme-li tuto linii do hrany



Obr. 3.

a, bude

$$OS \cos c = OM = OM_1 + M_1M = ON \cos b + PN \sin b =$$
$$= OS \cos a \cos b + OS \sin a \cos \gamma \sin b;$$

dostáváme tedy prvou větu cosinovou

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Promítnutím téže lomené čáry jednou do směru kolmého k a, po druhé do směru kolmého k b (v rovině ab), dostaneme dvě rovnice o pěti prvcích a průmět do SP dává větu sinovou.

Tak dospěli bychom k základním rovnicím sférické geometrie. Užitím jich na polární trojhran (t. j. píšeme-li v nich místo stran úhly a opačně a $\mp$ cos místo $\pm$ cos) přejde prvá věta cosinová ve druhou větu cosinovou, dvě věty o pěti prvcích dají další věty, kdežto věta sinová přejde sama v sebe. Máme tedy 7 rovnic. Cyklickými záměnami prvků nebo volbou bodu S na dalších hranách c, a vzniknou další rovnice. Celkem dostaneme 21 základních rovnic.[2])

K nim připojme další tři o šesti prvcích. Vyjádříme-li totiž cos úhlu MSN jednou z trojhranu $S(OMN)$, po druhé z trojhranu $S(MPN)$, bude

$$\cos MSN = \sin c \sin a + \cos c \cos a \cos \beta =$$
$$= \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha \cos b.$$

Cyklickou záměnou prvků obdržíme další dvě rovnice. Poněvadž úhel MSN je společný původnímu a polárnímu trojhranu, nemění se poslední rovnice užitím jich na polární trojhran. Pravá a levá strana jejich se pouze zamění.

Přechod ke kouli. Místo na hraně b mohli jsme volit bod S na hraně a a c. Volme všechny tři možné body S totožně v bodě O. Pak máme v O: a) hrany a, b, c, b) tři kolmice, a to: na rovinu ab, na rovinu bc, na rovinu ca, c) v rovině ab kolmici na hranu a a kolmici na hranu b. Dále v rovině bc kolmici na b a kolmici na c. V rovině ca kolmici na c a kolmici na a. Celkem 3 hrany a 9 kolmic. Pro pravoúhlý trojhran redukuje se počet kolmic na 7.

Učiníme-li O středem koule, protnou všechny tyto přímky její povrch: a) ve vrcholech, ABC resp. $A'B'C'$ sférického trojúhelníku a jemu protilehlého, b) v pólech P'_a, P''_a; P'_b, P''_b; P'_c, P''_c stran trojúhelníku ABC, c) v bodech, které s předešlými vhodně spojeny tvoří zobecněné Gaussovo pentagramma mirificum. Všechny body této konfigurace jsou průsečíky stran trojúhelníku původního a polárního.

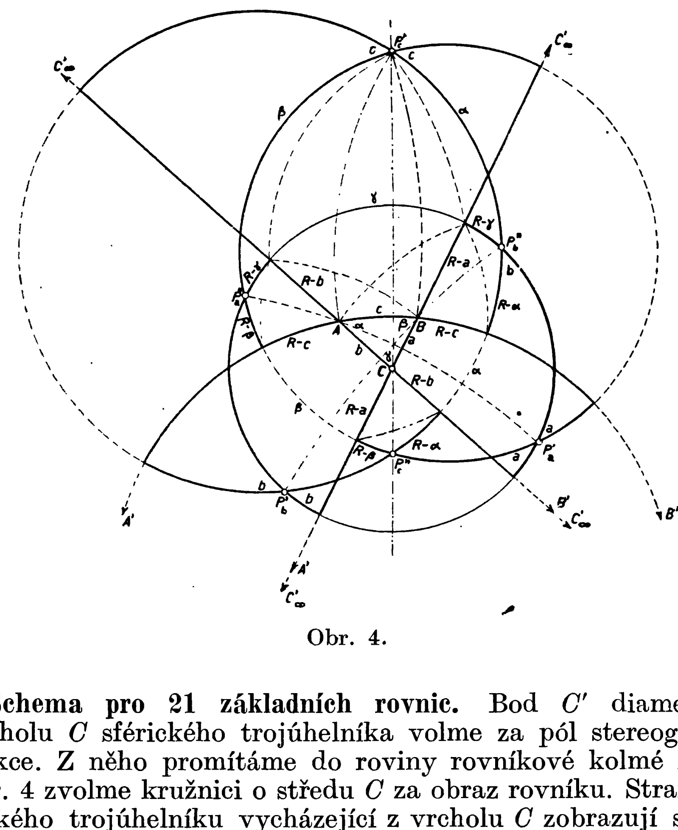
Tím je dána souvislost odvozování relací sférické geometrie z trojhranů s odvozováním přímo ze sférických trojúhelníků doplňo-

---

[2]) L. de Ball: Lehrbuch der sphärischen Astronomie.
J. Svoboda: Astronomie sférická.

váním stran na pravé úhly. Různým kombinacím kolmic v trojhrany odpovídá mnohem přehlednější spojování bodů v obrazce na kouli, jak dále uvedu.

Přechod od sférické geometrie k hyperbolické (o imaginárním poloměru) je snadný, jak jsem ukázal v dříve uvedené práci 6. Roste-li poloměr koule nade všechny meze, přejde povrch koule v tečnou rovinu v uvažovaném bodě a obě geometrie přejdou v rovinnou.



Obr. 4.

Schema pro 21 základních rovnic. Bod C' diametrálný k vrcholu C sférického trojúhelníka volme za pól stereografické projekce. Z něho promítáme do roviny rovníkové kolmé k CC'. V obr. 4 zvolme kružnici o středu C za obraz rovníku. Strany a, b sférického trojúhelníku vycházející z vrcholu C zobrazují se jako přímky s úběžným bodem C'_∞. Protneme-li je kružnicí, která půlí obvod rovníku, budou průsečíky A, B další vrcholy obrazu sférického trojúhelníku ABC. Póly P'_a, P''_a; P'_b, P''_b stran a, b leží samozřejmě na rovníku na průměrech kolmých k a resp. b. Póly P'_c, P''_c strany c sestrojíme podle prvého odstavce tohoto článku konstrukcí uvedenou ad 7. Celý obrazec se skládá ze 3 stran původního trojúhelníku a 3 kružnic, jakožto stran polárního trojúhelníku. Silně vytažená část obrazce je zobecnění zmíněného pentagrammatu.

Na základě konstrukce můžeme stanovit některé úhly a oblouky. Na př.: Od C k rovníku je 90°. Je tedy od B k rovníku $R - a$. Mezi poledníky svírajícími úhel γ je na rovníku oblouk γ. Při pólech vznikají úhly $2R - a$, $2R - b$, $2R - c$. Při vrcholech původního trojúhelníka vznikají čtyrúhelníky o dvou pravých úhlech, atd.

Nad každou stranou daného trojúhelníku ABC povstal sedmiúhelník. Vyjádřením úhlopříček těchto sedmiúhelníků a zmíněných čtyrúhelníků prvou větou cosinovou ze dvou přilehlých trojúhelníků dostaneme 3 serie rovnic. Pomocí prvé věty cosinové odvodíme z obrazu všech 21 základních rovnic a ještě tři rovnice o 6 prvcích.

Naznačme postup pro stranu c a protilehlý vrchol C. Zmíněný sedmiúhelník je dán prvky: c, $R - a$, $R - \gamma$, $P''_b P'_c = \alpha$, $P'_c P''_a = \beta$, $R - \gamma$, $R - b$ a čtyrúhelník při vrcholu C prvky $R - a$, $R - \beta$, $R - \alpha$, $R - b$.

I. serie.

1. První věta cosinová vyjadřuje stranu c

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \tag{1}$$

2. Z trojúhelníků o stranách c, $R - a$ a γ, $R - b$ vyjádříme společnou stranu cosinovými větami a dostaneme větu o pěti prvcích

$$\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta = \cos \gamma \sin b. \tag{2}$$

3. Z trojúhelníků o stranách c, $R - b$ a γ, $R - a$ vyjádříme cosinovými větami společnou stranu a dostaneme další větu o pěti prvcích

$$\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha = \cos \gamma \sin a. \tag{3}$$

II. serie.

1. První věta cosinová použita na polární trojúhelník $P''_a P''_b P''_c$ dává druhou cosinovou větu

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c. \tag{4}$$

2. Z trojúhelníků o stranách $R - \gamma$, $P''_b P'_c = \alpha$ a $R - \gamma + \gamma = R$, $P''_a P'_c = \beta$ cosinovou větou vyjádřená společná strana dává další větu o pěti prvcích

$$\sin \gamma \cos \alpha + \cos \gamma \sin \alpha \cos b = \sin \beta \cos a. \tag{5}$$

3. Ještě jednu větu o pěti prvcích dostaneme obdobně z troj-

úhelníků o stranách $R - \gamma$, $P_a''P'_c = \beta$ a $R - \gamma + \gamma = R$; $P''_b P'_c = \alpha$:

$$\sin \gamma \cos \beta + \cos \gamma \sin \beta \cos a = \sin \alpha \cos b. \tag{6}$$

III. serie.

1. Ze čtyrúhelníku při vrcholu C vyjádříme úhlopříčku jdoucí vrcholem C z obou sousedních trojúhelníků opět prvními cosinovými větami a dostaneme větu sinovou

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha. \tag{7}$$

2. Vyjádření druhé úhlopříčky dává větu o šesti prvcích

$$\sin a \sin b + \cos a \cos b \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \cos c. \tag{8}$$

Stejným postupem vzhledem k ostatním stranám a, b nebo prostě cyklickými záměnami přibudou ke každé rovnici (1) až (8) další 2, takže celkem dospíváme k 21 základním rovnicím a k 3 rovnicím o šesti prvcích.

Příklady. Různým kombinováním základních rovnic odvozují se další důležité vztahy: Věty pro poloviční strany a úhly, Gaussovy rovnice (Delambreovy) a Napierovy analogie. Jako příklady uveďme odvození některých méně známých vztahů.

1. Z druhé věty prvé serie vyloučíme $\sin b$ sinovou větou

$$\sin b = \frac{\sin c}{\sin \gamma} \sin \beta$$

a dostaneme větu se čtyřmi prvky s tg a cotg:

$$\sin a \operatorname{cotg} c - \cos a \cos \beta = \operatorname{cotg} \gamma \sin \beta. \tag{9}$$

2. Znásobením dvou cosinových vět pro $\cos c$, $\cos a$ a dosazením $\cos^2 b = 1 - \sin^2 b$ dostáváme vzorec

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} c \cos \alpha + \operatorname{tg} a \cos \gamma}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \cos \alpha \cos \gamma}, \tag{10}$$

který uvádí prof. Svoboda ve svých přednáškách bez důkazu. Cyklickou záměnou a užitím na polární trojúhelník vzniknou další vztahy.

Poznamenejme, že obdobný vzorec dostaneme promítnutím pláště jehlanu $S(OMPN)$ do roviny ac (obr. 3). Dostaneme:

$$\begin{aligned} 2OMPN &= OS \cos c \,.\, OS \cos a \sin b + OS \sin c \cos \alpha \,. \\ &\quad .\, OS \sin a \cos \gamma \sin b = \\ &= \text{dvojnásobnému průmětu pláště} = \\ &= \overline{OS}^2 \cos c \sin c \cos \alpha + \overline{OS}^2 \cos a \sin a \cos \gamma, \end{aligned}$$

čili po úpravě

$$\sin b = \frac{\frac{\sin a}{\cos c}\cos\gamma + \frac{\sin c}{\cos a}\cos\alpha}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \cos\alpha\cos\gamma}. \tag{11}$$

3. Do druhé rovnice třetí serie o 6 prvcích znásobené $\cos\gamma\cos c$ dosaďme z cosinových vět výrazy

$$\begin{aligned}\sin a \sin b \cos\gamma &= -\cos a \cos b + \cos c\\ \sin\alpha\sin\beta\cos c &= \cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma\end{aligned}$$

a dostaneme

$$\cos^2 c - \cos a \cos b \cos c \sin^2\gamma = \cos^2\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\sin^2 c,$$

čili

$$\sin^2 c\,(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) = \sin^2\gamma\,(1 - \cos a\cos b\cos c).$$

K tomu připojme další dvě obdobné rovnice

$$\begin{aligned}\sin^2 a\,(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) &= \sin^2\alpha\,(1 - \cos a\cos b\cos c)\\ \sin^2 b\,(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) &= \sin^2\beta\,(1 - \cos a\cos b\cos c).\end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic a po malé změně obdržíme

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \\ = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{1 - \cos a\cos b\cos c}(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c). \tag{12}$$

To je poučka analogická ke známé poučce z rovinné geometrie. Nahradíme-li totiž siny stran poměry $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ a cosiny stran výrazy $1 - \frac{a^2}{2R^2}$, $1 - \frac{b^2}{2R^2}$, $1 - \frac{c^2}{2R^2}$ (t. j. počátečními členy řad sin a cos), přejde pro nekonečně velký poloměr R poslední rovnice ve tvar

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\,(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma). \tag{13}$$

Gaussovo pentagramma mirificum a Neperovo pravidlo. Obr. 4, eventuálně schema podle tohoto obrazce a soubor základních rovnic je úplné zobecnění G. p. a N. p. Těsnější obdobu docílíme tím, že místo čtyrúhelníku při vrcholu C volíme čtyrúhelníky při vrcholech A a B. Tak dostaneme ke každé straně konfiguraci, která pro pravoúhlý trojúhelník $\gamma = R$ přejde přímo v G. p. Pak totiž redukuje se zmíněný sedmiúhelník v pětiúhelník, neboť $R - \gamma = 0$. Čtyrúhelníky při A, B změní se v pravoúhlé trojúhelníky o přeponách $R - b$, $R - a$. S nimi souvisí ve vrcholech P''_a, P''_b další pravoúhlé trojúhelníky o přeponách β, α. Původní (pravoúhlý) trojúhelník a 4 právě zmíněné tvoří řetězec pěti pravoúhlých trojúhelníků zvaný Gaussovo pentagramma mirificum.

Označíme-li kterýkoliv z těchto trojúhelníků jako i-tý, bude $(i \pm 1)$-ní trojúhelník sousední. Dva sousední trojúhelníky mají jeden úhel společný. Úhly označme tak, že $\beta_i = \alpha_{i+1}$, čili také $\alpha_i = \beta_{i-1}$. Trojúhelník $(i \pm 2)$-hý bude k i-tému protilehlý. Z obr. 4 je zřejmo, že (při $\gamma = R$) platí vztahy

$$\left.\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix}\right\} = R - \left\{\begin{matrix} c_{i+1} \\ c_{i-1} \end{matrix}\right. , \qquad \left.\begin{matrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{matrix}\right\} = c_{k\pm 2}. \tag{14}$$

Prvá a druhá věta cosinová pro i-tý trojúhelník má tvar

$$\cos c_i = \cos a_i \cos b_i = \operatorname{cotg} \alpha_i \operatorname{cotg} \beta_i .$$

Podle (14) bude

$$\cos c_i = \sin c_{i+1} \sin c_{i-1} = \operatorname{cotg} c_{i+2} \operatorname{cotg} c_{i-2}. \tag{15}$$

To však je pravidlo Neperovo. Přepony c_i pěti trojúhelníků tvoří totiž pětiúhelník

$$\begin{array}{ccccc} & \beta & & \alpha & \\ R - b & & & & R - a \\ & & c & & \end{array}$$

a rovnici (15) lze vyjádřit slovy: cosinus kteréhokoliv prvku pětiúhelníkového schematu je dán součinem sinů přilehlých prvků nebo součinem cotangent protilehlých prvků.

Podle toho dostáváme pro pravoúhlý trojúhelník dvě serie rovnic

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \\ \sin a &= \sin \alpha \sin c = \operatorname{cotg} \beta \operatorname{tg} b \\ \cos \alpha &= \sin \beta \cos a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c \\ \cos \beta &= \cos b \sin \alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} a \\ \sin b &= \sin c \sin \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha . \end{aligned}$$

Pravidlo a schema zde uvedené se liší poněkud od pravidla obvykle uváděného. Je však toto znění odůvodněno celou geometrickou konstrukcí, kdežto obvyklé znění je z rovnic pro pravoúhlý trojúhelník pouze odpozorováno.

Kreslil Em. Klier. Archiv JČMF.

Poznámka k mému článku „O pojmu pravděpodobnosti“.

Otomar Pankraz.

Do tohoto článku (Časopis 69 (1940), seš. 2, část D) vniklo mi vlivem Reichenbachových problematických výkladů v jeho knize „Wahrscheinlichkeitslehre (1935)“ do axiomů na str. D 80 nedo-