Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jan Sobotka

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 31 (1902), No. 4, 265--273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120959

Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu.

Napsal

Jan Sobotka,
professor české vysoké školy technické v Brně.

(Dokončení.)

Případy zvláštní.

21. Applikujme některé z výsledků nabytých na jeden zvláštní případ, kterýmž dospějeme k některým vlastnostem *listu Cartesiova* a křivek s ním úzce souvisících.

My vyjdeme totiž od rovnice co nejjednodušší

$$Y' + \frac{Y}{x} = \frac{x}{m}, \tag{1}$$

s kterou se pro $m = 1$ též prof. Czuber ve jmenovaném pojednání (str. 46. a 47., obr. 2.) zabýval, udávaje přibližné sestrojení příslušných křivek integralních. Úvahy předcházející jdoucí o krok dál vedou nás zde k přesným konstrukcím křivek těchto.

Rovnice homogenní rovnici (1) odpovídající zní

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

a značí křivky F^*, pro něž subtangenta má hodnotu $-x$ a které z důvodu toho tvoří svazek rovnoramenných hyperbol

$$xy = C \tag{2}$$

majících osy souřadné za asymptoty.

Pro body N křivky n platí tu

$$\xi = 2x, \quad \eta = \frac{x^2}{m}; \tag{3}$$

a proto rovnice křivky této jest

$$\xi^2 = 4m\eta. \tag{4}$$

Křivky integralní F rovnice dané vyjádřeny jsou pak rovnicí

$$Y = \frac{D}{x} + \frac{x^2}{3m} \tag{5}$$

aneb

$$x^3 - 3mxY + 3mD = 0. \tag{6}$$

Mezi nimi jest jedna, odpovídající hodnotě $D = 0$, která se rozpadá v osu y a v parabolu F_0 danou rovnicí

$$x^2 = 3my. \tag{7}$$

Jelikož každá tečna paraboly n jest tečnou obratu jedné z křivek F v bodě přímky $x = \frac{\xi}{2}$, tu vysvítá, že příslušný bod obratu leží na ose x, poněvadž tečna paraboly n protíná osu x v bodě, jehož úsečka jest $\frac{\xi}{2}$.

Máme tudíž větu:

Všecky křivky (1) mají své body obratu (z nichž vždy jen jeden jest realný) na ose x a tečny jejich obratu obalují parabolu n.

Každá z křivek F jest úplně určena vytknutím libovolného bodu M. Abychom ji sestrojili, veďme bodem M rovnoběžku m s osou y a pak libovolnou jinou přímku taktéž s y rovnoběžnou. Rovnice přímky m budiž $x = x_1$, přímky m $x = x_2$.

Myslíme-li si jakoukoliv z hyperbol (2) protnutou těmito přímkami, bude spojnice bodů průsečných protínati osu x v bodě, jehož úsečka rovná se $x_1 + x_2$. Protínají-li přímky m, m parabolu F_0 v bodech M_0, $\mathfrak{M}_0$, pak jest průsek přímky $x = x_1 + x_2$ s přímkou $(M_0\mathfrak{M}_0)$ bod U dle dřívějšího označení.

Z toho vysvítá, že bod U najdeme, když protneme $(M_0\mathfrak{M}_0)$ s osou y v bodě G_0 a učiníme $\mathfrak{M}_0 U$ aequipollentní s úsečkou $\overline{G_0 M_0}$. Přímka (MU) protíná m v dalším bodě $\mathfrak{M}$ křivky F.

Pohybuje-li se přímka m, zůstávajíc stejnosměrná s y, pak bod U opisuje parabolu r shodnou s F_0 a s ní v poloze podobné se nacházející; rovnice její jest

$$(8) \qquad 3m(y - y_1) = x(x - x_1),$$

značí-li $x_1 \mid y_1$ souřadnice bodu M_0. Vrcholy paraboly r mají souřadnice $\frac{x_1}{2}$, $\frac{3}{4}y_1$, nacházejíce se na parabole $x^2 = my$, tak že tečna její v M_0 prochází počátkem O soustavy souřadné.

Tím dospíváme k následující jednoduché konstrukci křivky F.

Bodem M veďme libovolnou přímku protínající parabolu v bodech U_1, U_2, osu y v bodě L a přenesme na přímku tu úsečky $\overline{U_1S_1} = \overline{U_2S_2} = \overline{ML}$, čímž obdržíme body S_1, S_2 náležející křivce F.

Konstrukce ta vychází od libovolného bodu M křivky; každému z nich přísluší jedna parabola r. Měníme-li bod M_0, provádí r jednoduchou translaci; že obaluje pak parabolu n, seznáváme též z jednoduché souvislosti křivek těch způsobem bezprostředním.

Sestrojení tečny křivky F v libovolném jejím bodě $\mathfrak{M}$ jest též dáno, jelikož sestrojení jejího bodu dalšího $\mathfrak{N}$ rovnice (3) bezprostředně poskytují.

Pro *poloměr křivosti* v bodě $\mathfrak{M}$ křivky F dojdeme na základě odst. 6. k výrazu

$$\varrho = \frac{t^3}{2xy'},$$

který se též velice snadně dá sestrojiti.

Označíme-li patu kolmice z bodu $\mathfrak{M}$ na osu x písmenem X_μ, jest pouze zapotřebí vésti bodem $\mathfrak{N}$ rovnoběžku s x a kolmici ku $(X_\mu\mathfrak{N})$; tyto dvě přímky vytínají z normaly křivky F v bodě $\mathfrak{M}$ délku rovnající se 2ϱ.

V bodech paraboly $x^2 = my$ mají všecky křivky integralní totéž zakřivení; jestiť pro body ty $\varrho = \frac{m}{2}$.

22. Asymptota dříve odvozené hyperboly w rovnoběžná s y jest tu od y harmonicky oddělena přímkami $x = x_1$, $x = x_2$. Jsou-li ve zvláštním případě přímky tyto, označme je nyní m_1,

m_2, vzhledem ku y souměrně položeny, jestli tedy $x_1 = -x_2 = d$, přejde hyperbola w v parabolu v; bod U leží tu na y ve vzdálenosti $\frac{d^2}{3m}$ od počátku souřadnic a parabola v prochází body

$$N_1\left(2d \mid \frac{d^2}{m}\right),\; N_2\left(-2d \mid \frac{d^2}{m}\right)$$

paraboly n a body průsečnými přímek m_1, m_2 s osou x. Jest proto parabola v shodná s F_0, majíc s ní společnou osu; vrchol její má pořadnici $-\frac{d^2}{3m}$.

Rovnice tečny křivky F v bodě $x_1 \mid Y_1$ jest, béřeme-li zřetel k její rovnici differencialní,

$$y - Y_1 = \frac{x_1^2 - mY_1}{mx_1}(x - x_1)$$

a přihlížíme-li ku (5) odst. předcházejícího,

$$y = \frac{2D}{x_1} - \frac{x_1^2}{3m} + \left(\frac{2x_1}{3m} - \frac{D}{x_1^2}\right)x.$$

Rovnice tečny téže křivky v bodě $(x_2 = -x_1 \mid Y_2)$ jest pak

$$y = -\frac{2D}{x_1} - \frac{x_1^2}{3m} - \left(\frac{2x_1}{3m} + \frac{D}{x_1^2}\right)x.$$

Když tyto dvě rovnice sečteme, potom druhou od prvé odečteme, obdržíme nové dvě rovnice

$$y + \frac{D}{x_1^2}x + \frac{x_1^2}{3m} = 0,$$

$$\frac{x_1}{3m}x + \frac{D}{x_1} = 0.$$

Z poslední rovnice plyne $x_1^2 = -\frac{3mD}{x}$, kterážto hodnota převede rovnici předposlední na tvar

$$y - \frac{x^2}{3m} - \frac{D}{x} = 0,$$

který se shoduje s rovnicí (5) odst. 21. To znamená:

Průseky tečen křivky F v bodech od y stejně vzdálených se protínají na křivce samé.

Rovnice přímky, takové dva body spojující, zní pak

$$x_1^2 y = Dx + \frac{x_1^4}{3m}.$$

Derivujeme-li rovnici tu podle x_1, obdržíme

$$x_1^2 = \frac{3my}{2};$$

dosadíme-li hodnotu tuto do předcházející rovnice, vyjde

$$y^2 = \frac{4D}{3m} x,$$

kterážto rovnice praví: *Spojnice bodů křivky F od osy y stejně vzdálených obalují parabolu s, která má x za osu a y za tečnu vrcholovou.*

Vlastnosti tyto jsou jenom specielním výrazem známých vlastností pro křivky unicursalní řádu třetího. Parabola s jest tu *involuční kuželosečkou* křivky F.

Na základě vlastností těchto lze libovolnou křivku F sestrojiti následovně:

Na y vytkne se bod a vede se jím tečna (mimo y možná) ku s a rovnoběžka ku x; body, v nichž tato protíná parabolu F_0, vedeme rovnoběžky ku y, které protnou vedenou tečnu paraboly s ve dvou sdružených bodech křivky F, jejichž společný bod tangencialní též dle uvedeného bezprostředně sestrojiti lze.

Snadno konečně shledáme, že každá křivka F má nekonečně vzdálený bod osy y za bod dvojný, v němž jedna tečna splývá s nekonečně vzdálenou přímkou roviny a druhá jest totožná s y.

23. Rovnice křivek stejnoklonných (odst. 1.) jest tu

$$y = \frac{x^2}{m} - ax$$

a znamená paraboly shodné počátkem souřadnic procházející; volíme-li pro libovolnou takovou parabolu vrchol za počátek souřadnic, osu za osu $\mathfrak{y}$, tečnu vrcholovou za osu $\mathfrak{x}$, pak jest rovnice její $\mathfrak{x}^2 = m\mathfrak{y}$; vrcholy parabol těch leží na křivce $x^2 = -my$.

24. Pišme rovnici (6) odst. 21. v symbolech:

$$\mathfrak{x}^3 - 3m\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 3mD = 0$$

a proveďme s ní *specialní projektivnou transformaci*

(1) $$\mathfrak{y} = \frac{m^2}{y}, \quad \mathfrak{x} = \frac{mx}{y};$$

i obdržíme rovnici

(2) $$x^3 - 3mxy + \frac{3D}{m^2} y^3 = 0.$$

Rovnice tato značí pro $3D = m^2$ *list Cartesiův* a pro $D = 0$ rozpadá se v osu y a v parabolu F_0, mající rovnici

(3) $$x^2 = 3my.$$

Z transformačních vzorců vychází na jevo, že přímkám rovnoběžným ku ose y odpovídají přímky jdoucí počátkem souřadnic. Jelikož parabola n v transformaci sama sobě odpovídá, obdržíme vlastnost:

Tečny křivek (2) v bodech ležících na přímce, počátkem soustavy souřadné procházející, protínají se v jediném bodě na parabole n.

Bod ten obdržíme jakožto příslušný průsek tečny ku parabole F_0 s parabolou n. Má-li bod, v němž řečená přímka parabolu F_0 protíná, souřadnice $x_1 \mid y_1$, pak má bod průsečný tečen souřadnice $\frac{2}{3} x_1 \mid \frac{y_1}{3}$, o čemž se snadno lze přesvědčiti.

Transformací přechází osa x v přímku nekonečně vzdálenou. Proto *mají křivky* (2) *své body obratu v nekonečnu*; příslušné *asymptoty inflekční jsou tečnami paraboly n.*

Body obratu jsou tu nekonečně vzdálené body přímek

$$\frac{x^3}{y^3} = -\frac{3D}{m^2}.$$

I zde jest libovolná křivka F rovnice (2) úplně určena vytknutím libovolného jejího bodu. Transformace zavedená převádí parabolu r rovnicí (8) v odst. 21. vyjádřenou v ellipsu R, mající rovnici

$$3my(y - y_1) = x(x_1 y - x y_1).$$

Pro odchylky φ os ellipsy této od x shledáváme snadno

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{x_1}{3m - y_1}.$$

Souřadnice pro střed její E jsou $\frac{x_1}{3} \Big| \frac{2y_1}{3}$; ona oskuluje parabolu F_0 v počátku souřadnic O.

Ellipsa R prochází bodem $M_0(x_1 \mid y_1)$ na F_0 a tečna její v bodě tom jest rovnoběžná s y a protíná x v bodě, jejž značíme X_μ. Pata kolmice V z M_0 na y náleží též R; rozdělíme-li tudíž $\overline{VX_\mu}$ na tři stejné díly, jest první dělící bod od V středem E; poloměr ku $\overline{VE}$ sdružený jest rovnoběžný s (OM_0) a rovná se $\overline{VE} . \sqrt{3}$.

Je-li zvláště $x_1 = y_1 = 3m$, pak jest OVM_0X_μ čtverec, $\overline{VE}$ jest poloosou ellipsy R a křivka kruhová čtverci tomu opsaná protíná osu hlavní v ohniskách ellipsy té.

Měníme-li M_0 na F_0, mění se tím ellipsa R, střed její pohybuje se na parabole $x^2 = \frac{m}{2} y$ a ona obaluje zase parabolu n, dotýkajíc se jí v bodě diametralně protilehlém bodu V.

Je-li tedy dán libovolný bod M křivky F a chceme-li *křivku tu sestrojiti*, tu na základě provedených úvah stanovíme nejprve bod M_0, v němž přímka (OM_0) protne ještě parabolu F_0, a pak stanovíme ellipsu R. Bodem M veďme jakoukoliv přímku h, která protne R v bodech U_1, U_2; přímky (OU_1), (OU_2) nechť dále protnou (VM_0) v bodech L_1, L_2. Přeneseme-li na (VM_0) úsečky $\overline{L_1S_1} = \overline{L_2S_2} = \overline{M_0V}$, pak protínají spojnice (OS_1), (OS_2) přímku h ve dvou bodech M_1, M_2 žádané křivky.

25. Označme ϱ *poloměr křivosti* křivky F v bodě M a ϱ_0 onen paraboly F_0 v bodě M_0 na přímce (OM). Tečny těch bodů protínají se v bodě N na parabole n a kladme $\overline{MN} = t$, $\overline{M_0N} = t_0$. Křivky F, F_0 lze v soumeznostech bodů M, M_0 považovati za centricky kollinearné pro O jakožto střed kollineace, kdežto osa kollineace jest rovnoběžná s (OM), tak že tu platí

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{t^3}{t_0^{\,3}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_0}}.$$

V bodě O mají všecky křivky F styk čtvrtého stupně mezi sebou, jak ve směru x, tak i ve směru y; rovněž vykazují ovšem i s parabolou F_0 styk 4. stupně v O.

Takový jest též vztah křivek (6) v odst. 21. v bodě nekonečně vzdáleném osy y.

26. Užijeme-li naší transformace vzhledem k úvahám odst. 22., obdržíme větu:

Průseky tečen v bodech, jichž spojnice s počátkem O soustavy souřadné jsou k osám souřadným souměrně položeny, protínají se na křivce samé; spojnice bodů těch obalují pravoúhlou hyperbolu S, mající rovnici

$$xy = \frac{3m^4}{4D}.$$

To dává též obdobnou konstrukci libovolné křivky F.

Na y zvolíme bod K a vedeme jím tečnu ku S a rovnóběžku ku x; tato nechť protne F_0 v bodech G_0, H_0. Pak protnou přímky (OG_0), (OH_0) tečnu řečenou již ve dvou bodech G, H křivky F. Tečny v bodech těch sestrojí se známým způsobem; jejich bod průsečný leží rovněž na F.

Značí-li zase t_1, t_2, délky tečen křivky F v bodech G, H až k příslušnému průseku s n; obdobně dále t_0 délku tečny pro F_0 v G_0 neb H_0 a jsou-li ϱ_1, ϱ_2, ϱ_0 příslušné poloměry křivosti, jest tu

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{t_1^3}{t_0^3} \cdot \frac{OG}{OG_0}, \quad \frac{\varrho_2}{\varrho_0} = \frac{t_2^3}{t_0^3} \cdot \frac{OH}{OH_0}.$$

Dělením obou rovnic obdržíme

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3} \cdot \frac{OG}{OH}$$

aneb konečně

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{t_1^3}{t_2^3} \cdot \frac{KG}{KH}.$$

27. Křivkám stejnoklonným odst. 23. odpovídají zde křivky

$$my(x + x_1) = x_1 x^2. \tag{1}$$

Z rovnice této soudíme, že všechny prvky přímkové differencialní rovnice našich křivek F, která zní

$$y' = \frac{y}{x} \cdot \frac{my - x^2}{2my - x^2},$$

směřující k témuž bodu osy x majícímu úsečku $-x_1$, přináležejí bodům ležícím na křivce (1).

Rovnice (1) značí patrně hyperbolu, jedna asymptota její jest rovnoběžná s osou y ve vzdálenosti $-x_1$, druhá dotýká se paraboly n, a směrnice její má hodnotu $\frac{x_1}{m}$.

Všecky takové hyperboly oskulují se v O, majíce v bodě tom $\frac{m}{2}$ za poloměr křivosti. Pro $x_1 = \infty$ přejde hyperbola v parabolu $x^2 = my$.

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,
professor na Král. Vinohradech.

(Dokončení.)

10. Z trojúhelníka $B_1 B_2 B_3$ odvodíme ještě jeden důležitý trojúhelník. Veďme v $\triangle B_1 B_2 B_3$ mediany $B_1 G$, $B_2 G$ a $B_3 G$ (obr. 7.) a ustanovme průsečík C_1 první z nich s příčkou $A_1 X$, dále průsečík C_2 druhé s $A_2 X$ a průsečík C_3 třetí s $A_3 X$. Rovnice bodů C_1, C_2, C_3 nalezneme z rovnice (4). Vložíce tu za x_1, x_2, x_3 hodnoty souřadnic bodu A_1, totiž 1, 0, 0, za x'_1, x'_2, x'_3 hodnoty souřadnic bodu X: x_1, x_2, x_3, za y_1, y_2, y_3 souřadnice bodu B_1: x_1, x_3, x_2 a za y'_1, y'_2, y'_3 souřadnice bodu G: 1, 1, 1, dostaneme rovnici bodu C_1 ve tvaru:

$$c'_1 C_1 = -\begin{vmatrix} 0, & x_1, & 1 \\ x_2, & x_3, & 1 \\ x_3, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_1 + \begin{vmatrix} x_2, & x_1, & 1 \\ 0, & x_3, & 1 \\ 0, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} x_3, & x_1, & 1 \\ 0, & x_3, & 1 \\ 0, & x_2, & 1 \end{vmatrix} A_3.$$

Hodnota prvního determinantu jest

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_3^2 &= (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) - x_1 (x_2 - x_3) \\ &= (-x_1 + x_2 + x_3)(x_2 - x_3); \end{aligned}$$