J. S. Vaněček

Geometrie u Indů

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 10 (1881), No. 2, 60--67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120956

mne námořníci spíláním přivítali. Plujícího přístavem poznal mne lid a provázel s hulákáním. Jen s bídou dostal jsem se na zámek, utrživ přece lehké poranění tulichem do stehna. Všude utíkávají lidé z vězení úprkem, já však byl snad první, jemuž dopřán opak toho. Tak se mi vedlo buď dne 1. nebo 2. července r. 1808.

Správce zámku Belverského byl člověk podivín. Vypravoval nám stále o zázračné moci studené vody, která prý, užívá-li se jí patříčně, pomáhá proti všem nemocem, ano i proti amputacím údů. Naslouchaje pozorně a účastně každému jeho slovu, dovedl jsem si získati úplnou jeho přízeň. Na žádosť a pro lepší naši ochranu byly španělské stráže nahraženy vojáky švýcarskými, čemuž jsme se upřímně radovali.

Od té chvíle, co jsem byl vězněm, odvrátili se ode mne všichni moji majorkánští přátelé. Jediný Rodriguez mne neopustil. Docházel ke mně do vězení téměř každého dne, dodávaje mi útěchy a mysli, jak jen mohl.

(Pokračování.)

Geometrie u Indů.

Napsal

J. S. Vaněček v Jičíně.

Dějepisný náčrtek.

Pokud jsou nám známy prameny, můžeme tvrditi, že geometrie počala u Chaldeů a Egypťanů. K nim také staří filosofové řečtí, jako Thales, Pythagoras, Plato vědecké cesty konali. [1])

Nám jest v tomto článku obírati se s geometrií, jak ji Indové pěstovali, jimž jsme povinni díky i za naše nyní tak zvané arabské číslice, které jsme prostřednictvím Arabů přijali.

Se spisy indickými, jednajícími o geometrii, seznámili nás Angličané: Taylor, Strachey a Colebrooke. Zejmena jsou to

[1]) Širší pojednání nalézá se v „Základové nauky o číslech" od dra F. J. Studničky. Důkladný rozbor v *Cantor's* „Vorlesungen" pag. 504.

spisy, jež zanechali: *Brahmegupta* a *Bhaskara Acharya*. Onen žil v 6. a tento ve 12. století našeho letopočtu.

Jakkoliv shledáváme v nich jenom počátky geometrie, můžeme tvrditi, že byli oba autoři na dosti vysokém stupni vzdělání geometrického, když mohli takové úlohy řešiti, jaké ve svých spisech podávají.

Na konci pak shledáme, v jakém vztahu oba svrchu uvedení spisovatelé indičtí k sobě se nalézali.

Brahmegupta.

Dílo Brahmeguptovo jest výtahem z pojednání o astronomii, a sice tvoří 12. a 18. hlavu tohoto pojednání. Dvanáctá tato hlava obsahuje arithmetiku a je nazvána *ganita*, kdežto osmnáctá hlava pojednává o algebře a slove *kuttaka*. Geometrie jest částí arithmetiky a zaujímá v ní 4. až 9. oddělení.

Oddělení čtvrté pojednává o trojúhelníku a čtyrúhelníku.

Oddělení páté obsahuje měření hranolu, jehlance a způsob, jakby se dal v praktickém životě ustanoviti příbližně obsah nepravidelného tělesa.

Oddělení 6., 7. a osmé obsahuje přibližná pravidla k měření sloupů, kusů dřeva a hromady obilí.

V oddělení 9. jest podáno měření pomocí stínu (gnomon).

Přihlédněme k jednotlivým těmto oddílům.

Oddělení první zahrnuje 23 úloh. Všecky jsou psány slohem velmi stručným a nejsou dokázány. Nejsou vysvětleny žádnými obrázky ani výpočty. Jsou k nim však připojeny poznámky jiným Indem *Chaturvedou*, které již obsahují obrázky i výpočty.

Některé věty jsou nečitelné, ostatní pak mají rčení velmi neúplné tak, že se musí spíše uhádnouti.

Smysl všech je řešení následujících čtyř úloh, vztahujících se k trojúhelníku a čtyrúhelníku.

1. *Mají se najíti jakožto funkce tří stran trojúhelníku: jeho plošný obsah a poloměr kruhové čáry, která jest mu opsána.*

2. *Sestrojiti trojúhelník, jehož plošný obsah a onen průměr jsou dány čísly racionálnými; taktéž strany trojúhelníku jsou vyjádřeny čísly racionálnými.*

3. *Jest dán čtyrúhelník vepsaný do kruhové čáry; má se nalézti jeho plošný obsah, jeho úhlopříčny, jeho kolmice, úseky, které tvoří tyto přímé a úhlopříčny vzájemně na sobě, a poloměr opsané kruhové čáry, aby všecky tyto byly funkcemi stran daného čtyrúhelníku.*

4. *Konečně má se sestrojiti čtyrúhelník vepsaný do kruhové čáry tak, aby všecky uvedené části, jeho obsah, jeho úhlopříčny, jeho kolmice, jich úseky, a poloměr opsané kruhové čáry byly vyjádřeny racionálnými čísly.*

Tyto 4 úlohy jsou úplně řešeny v 18 prvních větách Brahmeguptova díla. Všecky jsou v nejužším vztahu tak, že se může míti toto pojednání za velmi přesné.

Řešení prvních tří úloh je nutně potřebí k řešení čtvrté.

Než probéřeme jednotlivé úlohy Brahmeguptovy, přihlédněme k indickému pojmenování v geometrii, které je velmi šťastně voleno.

V trojúhelníku slove jedna přímá (strana) *základnicí* a druhé dvě *stranami* neb *rameny*, což jsme podrželi i my při *rovnoramenném* trojúhelníku. *Kolmice* jest přímá, vedená z průseku obou ramen kolmo k základně (naše výška). *Úseky* jsou části základny, obsažené mezi stopou oné kolmice a konci základny.

V pravoúhlém trojúhelníku slove jedno rameno pravého úhlu *stranou* a druhé *pravou* (upright); třetí se jmenuje *hypotenusou* (přeponou). U nás nyní slovo *pravý* se užívá pro označení zvláštního úhlu, a straně u Indů takto pojmenované říkáme *katheta*, kteréžto jméno zavedli Řekové.

Mnohoúhelník o čtyrech stranách nazvali *čtyrúhelníkem*; jednu jeho stranu *základnicí*, jí protilehlou *vrcholem*, a druhé dvě pojmenovali *boky*.

My nyní užíváme slova *vrchol* pro bod, a Římané nahradili ono pojmenování jiným, davše za ně slovo (*κορυςτὸς*) *coraustus* (naše protilehlá strana základně).

Kolmice ve čtyrúhelníku jsou přímé, vedené z hořejších konců obou *boků* na zakladuu tak, že odpovídají oběma bokům.

Každá ta kolmice spůsobuje na základně dva úseky. První leží mezi kolmicí a příslušným bokem; nazývá se *úsekem*, kdežto druhá část základny slove jeho *doplňkem*. Slova *úhlopříčná* (diagonála) užívali Indové v témž smyslu jako my.

Pro čtyrúhelník zvláštní, který je rovnoběžníkem a sice pravoúhlým užíváme doslovného překladu indického názvu, t. j. obdélník (lat. oblongus). Jeho dvě sousední strany nazývají Indové jako při trojúhelníku pravoúhlém: *stranou* a *pravou*, kdežto my bychom je nazvali *stranou* a *odvěsnou* neb vůbec říkáme *odvěsny*.

Slova *vishama chaturbhuja* užívá se častěji, aniž by bylo definováno. Colebrook překládá je výrazem *trapezium* a praví, že znamená čtyrúhelník, který má nestejné strany.[1])

Tento význam měl i u Řeků (Euklid, 1. kniha) a udržel se posud u Angličanů. Podržíme jej i pro úlohy Brahmeguptovy. Aby však měly smysl, musíme nutně předpokládati, že jeho *trapez* má úhlopříčny k sobě kolmé; pouze ve dvou úlohách nemusíme tuto úlohu klásti. Můžeme se domnívati, že Brahmegupta mlčky pominul nejen tuto podmínku při sestrojení trapezu nýbrž i tu, že musí býti možno *vepsati jej do kruhové čáry*.

Žádná z těchto podmínek není vyřčena ani v znění (textu) *Brahmeguptově* ani v poznámkách vykladatele *Chaturvedy*. V některých úlohách pak i když se nemůže mysliti trapez ve smyslu dříve podaném, musí se bráti čtyrúhelník vepsaný do kruhové čáry. Tyto první hypothesy stačí k tomu, abychom mohli sestrojiti obrazce úloh Brahmeguptových; avšak jest potřebí ještě poznati, jaké vlastnosti mají takto sestrojené obrazce, o čemž též autor mlčí. Jsou to vlastnosti, které tvoří téměř vlastní předmět spisu.

Přistupmež nyní k jednotlivým úlohám díla Brahmeguptova. V pořádku zde uvedeném nenalezají se v původním díle, avšak připojená čísla, značící paragrafy jak po sobě následují, vysvětlí již pořádek, v jakém tam podány jsou. Pokud se při uvedených již nedostatcích souditi dá, jsou to tyto úlohy:

1. Čtyry úlohy o trojúhelníku jsou tyto:
   první: čtverec přepony v pravoúhlém trojúhelníku (24);
   druhá: spůsob počítání kolmice jako funkce stran (21);

*) U nás rozumíme tímto jménem čtyrúhelník, jenž má dvě strany spolu rovnoběžné a druhé různoběžné. —

třetí: obsah trojúhelníku jako funkce jeho tří stran (21)
čtvrtá: výraz průměru kruhové čáry, opsané trojúhelníku (27).

Tyto úlohy, aspoň první dvě nutno považovati jako poučky potřebné pro následující.

2. Tři úlohy o sestrojení trojúhelníku, jehož strany a kolmice a následovně i obsah a průměr opsané kruhové čáry jsou dány čísly racionálnými.

První: trojúhelník pravoúhlý (35);
druhá: trojúhelník rovnoramenný (33);
třetí: trojúhelník nerovnostranný (34).

3. Devět úloh o čtyrúhelníku, jenž se dá vepsati do kruhové čáry.

První: obsah čtyrúhelníku, jako funkce 4 stran (21);
druhá: výraz jeho úhlopříčen (28);
třetí: způsob vypočítání průměru opsané kruhové čáry jako funkce stran; zvláštní výraz tohoto průměru pro *trapez*, mající úhlopříčny k sobě kolmé (26);
čtvrtá: zvláštní výraz úhlopříčny a kolmice vepsaného čtyrúhelníku, který má *boky* stejné (23);
pátá: způsob vypočítání úseků, jež na sobě vespolek tvoří úhlopříčny a kolmice ve čtyrúhelníku vepsaném, jehož boky jsou stejné (25);
šestá: způsob výpočítání kolmic a úseků, které ony tvoří na základě vepsaného čtyrúhelníku (29);
sedmá: způsob vypočítání úseků povstalých na úhlopříčnách jich průsekem, ve vepsaném trapezu (30 a 31);
osmá: způsob vypočítání kolmice, vedené průsekem obou úhlopříčen, mezi oběma protilehlýma stranami (30 a 31);
devátá: způsob vypočítání úseků, které tvoří kolmice na úhlopříčnách a stranách, jakož i které na nich tvoří protilehlé strany (32).

4. Čtyry úlohy o způsobu sestrojení čtyrúhelníku vepsaného do kruhové čáry, jehož strany, úhlopříčny, kolmice, úseky, jež tyto přímé na sobě vespolek vytvořují, plošný obsah čtyr-

úhelníku a průměr jemu opsané kruhové čáry jsou dány v číslech racionálných.

První: sestrojení obdélníku (35);

druhá: sestrojení čtyrúhelníku, jehož 2 protilehlé strany jsou stejné (36);

třetí: sestrojení čtyrúhelníku, který má 3 strany stejné (37);

čtvrtá: sestrojení čtyrúhelníku, který má všecky strany nestejné. Tento čtyrúhelník jest trapez, t. j. jeho úhlopříčny jsou k sobě kolmé.

Totoť jsou úlohy obsažené v 18 prvních odstavcích. Slovo *kruhová čára* je vysloveno pouze ve dvou úlohách, totiž 26. a 27., kde běží o nalezení poloměru kruhové čáry, opsané trojúhelníku a čtyrúhelníku. Dále slovo *racionálné* není nikde vysloveno. Čtyrúhelník není určen než svými stranami; není praveno nic o podmínkách, aby byl vepsatelný do kruhové čáry; ani o jeho vlastnostech, které jsou podmínkami, aby všecky k němu se vztahující části byly vyjádřeny v číslech racionálných.

5. Úlohy, které následují za prvními 18 odstavci, nejsou stejnorodými s úlohami o čtyrúhelníku vepsaném do kruhové čáry.

První pojednává o trojúhelníku pravoúhlém, totiž: *má se najíti na každém rameni pravého úhlu, prodlouženém za přeponu, bod, jehož vzdálenosti od obou konců přepony tvoří součet rovný součtu obou odvěsen.* 39.

Ostatní 4 úlohy vztahují se ke kruhové čáře.

Zajímavou pro nás je první úloha: má se nalézti délka a plošný obsah kruhové čáry jako funkce průměru. Budiž d průměr a r poloměr. V praktickém životě může se vzíti délka kruhové čáry $= 3d$, a plošný obsah $3r^2$. Pro pravou však hodnotu délky $= \sqrt{10d^2}$ a plošného obsahu $= \sqrt{10r^4}$. Odstavec 40.

Přejdouce ostatní přihledněme k oddělení devátému, které pojednává, jak praveno, o měření pomocí stínu.

Autor předpokládá světlo umístěné na svislé tyči a *gnomon*, jenž jest roubíček postavený též svisle.

Pak řeší tyto dvě úlohy:

1) *Jest známa výška světla, výška roubíčku (gnomon) a vzdálenost jich stop na rovině k nim kolmé; má se nalézti délka stínu, vrženého roubíčkem na onu rovinu.* 53.

2) *Má se nalézti výška světla, když jsou známy stíny roubíčku, umístěného ve dvou rozdílných polohách.* 54.

Vraťme se k některým dřívějším odstavcům.

Odstavec 27., který podává způsob vypočítání průměru kruhové čáry opsané trojúhelníku, vyjádřuje známou formuli:

Součin ze dvou stran trojúhelníku rozdělen kolmicí, postavenou ku třetí jeho straně, rovná se průměru opsané kruhové čáry.

Způsob vypočítání průměru kruhové čáry opsané čtyrúhelníku jest týž; potřebí jen pozorovati trojúhelník tvořený dvěma sousedními stranami čtyrúhelníku a úhlopříčnou.

Pro čtyrúhelník, který má úhlopříčny k sobě kolmé, *průměr jest roven druhému kořenu ze součtu čtverců dvou protilehlých stran.*

Odstavec 21., který pojednává o plošném obsahu trojúhelníku a čtyrúhelníku, zasluhuje, abychom si ho blíže všimli.

Skládá se ze dvou částí, z nichž první se zdá schopna dvojího výkladu. Sledujeme-li doslovně její znění, shledáváme, že sama praví: toto pravidlo pro vypočítání obsahu trojúhelníku a čtyrúhelníku jest nesprávné. Avšak provedeme-li jen malou, změnu v textu, obdržíme ihned pravidlo pro vypočítání *trapezu* který je takřka duší celého díla Brahmeguptova.

První výklad jest tento:

1) *Součin polovičného součtu protilehlých stran je nepřesným plošným obsahem trojúhelníku a čtyrúhelníku.*

2) *Poloviční součet stran napíše se čtyřikrát; od každého se postupně odečtou strany, a rozdíly ty se znásobí; pak druhý kořen z tohoto součinu jest přesným plošným obsahem obrazce.*

V této druhé části obdržíme obsah trojúhelníku, když jednu stranu čtyrúhelníku učiníme rovnu nule.

Formule pro vypočtení plošného obsahu trojúhelníku v díle Brahmeguptově byla od pozdějších geometrů považována za důležitou, avšak oné pro čtyrúhelník si nevšímali, ač jest všeobecnější a důkaz její těžší. Vyžaduje hlubších známostí geometrických a zdá se, že náleží výhradně autorovi indickému, neboť se nenalezá v žádném díle řeckém.

Druhý výklad odstavce 21.

1) *Ploský obsah trapezu rovná se polovině součtu součinu protilehlých stran.*

2) *Poloviční součet stran napíše se čtyřikrát, od každého se odečtou postupně strany, a rozdíly ty se znásobí; pak druhý kořen z tohoto součinu jest plošným obsahem obrazce.*

Rozumí se vždy trapez a čtyrúhelník vepsaný do kruhové čáry. Abychom obdrželi *toto* druhé znění věty, potřebujeme jen slovo *nepřesný* vynechati a slovo *čtyrúhelník* nahraditi slovem *trapez* a *trojúhelník čtyrúhelníkem.*

Podivno jest, že se při vypočítávání plošného obsahu trojúhelníku vyjadřují strany celými čísly 13, 14, 15. Čísla tato nalézají se ve všech i nejstarších dílech všech národů: u Indů, Řeků, Římanů, Arabů a i ve všech částech Evropy, kde se geometrie pěstovala.

Vysvětliti se dá věc asi takto.

Trojúhelník rozdělí se výškou ve dva trojúhelníky pravoúhlé, jež mají tuto výšku společnou. V jednom i druhém trojúhelníku vyjádří se strany celými čísly co možná malými. Strany ty jsou v jednom 5, 12, 13 a v druhém 9, 12, 15. Přiloží-li se trojúhelníky zase k sobě podél stejné strany, dostanou se strany 5 + 9, 13, 15. Shledáváme takto ona tři čísla 13, 14, 15 pro strany trojúhelníku všeobecného.

(Dokončení).

O zemětřesení.

Napsal

Dr. **August Seydler** v Praze.

> Ventos in causa esse non dubium reor. Neque enim unquam intremiscunt terrae, nisi sopito mari coeloque adeo tranquillo, ut volatus avium non pendeant, subtracto omni spiritu qui vehit; nec unquam nisi post ventos conditos scilicet in venas et cavernas ejus occulto afflatu. Neque aliud est in terra tremor, quam in nube tonitruum; nec hiatus aliud quam cum fulmen erumpit, incluso spiritu luctante et ad libertatem exire nitente.
>
> *Plinius,* Hist. nat. II, 79.

Slovy tuto položenými podává *Plinius* první theorii zjevu, který děsnou svou zhoubností v míře tak veliké poutal obrazo-