Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Poznámka k problému normál u elipsy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 123--129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120944

pak můžeme rovnice (33) psáti:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{a(a\alpha + b\beta)}{a^2 + b^2}, \quad \eta = \frac{b}{a} \xi. \tag{37}$$

Otáčí-li se přímka (M) kolem bodu M_0, obdržíme rovnici místa polu P, vyloučíme-li z rovnic (37) proměnlivou směrnici $-\frac{a}{b}$, totiž

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{2}(\alpha\xi + \beta\eta) = 0,$$

kterýžto výsledek je i geometricky patrný, neb je-li C střed délky $\overline{OM_0}$, je $PC \parallel QM_0$, tím je $\sphericalangle OPC = 90^0$; délku OC vidíme z polu P pod pravým úhlem, místo bodu P je tudíž kruh nad OC jako průměrem sestrojený.

17. Otáčí-li se přímka (M) kolem bodu $M_0(\alpha \mid \beta)$, vyhovují souřadnice její rovnici

$$u\alpha + v\beta + 1 = 0,$$

a dle příbuznosti mezi přímkou (M) a asymptotou A vyjádřenou rovnicemi (35) obalují reálné asymptoty příslušných strophoidal křivku

$$u_1 v_1 (\alpha v_1 + \beta u_1) - (u_1^2 + v_1^2) = 0,$$

tedy racionální křivku třetí třídy a čtvrtého stupně.

Poznámka k problému normál u ellipsy.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

Body q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) ellipsy E, jimiž procházejí její normály vedené libovolným bodem $p(x_1, y_1)$ v její rovině, stanoví se jednoduše jako průsečíky dané ellipsy E s jistou rovnoramennou hyperbolou H, jež se zove *Apolloniovou.*

Je-li velká osa dané ellipsy osou úseček X a malá její osa osou pořadnic Y, mají zmíněné křivky v pravoúhlé soustavě rovnice:

$$(1) \qquad E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

$$(2) \qquad H \equiv e^2xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0.$$

Při tom značí a délku *velké*, b délku *malé* poloosy, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ pak výstřednost.

Tento prastarý problém, jenž jest patrně bikvadratickým, řešil prof. *J. Šolín* *) zajímavým způsobem pomocí jisté kružnice.

Hledané čtyři body q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) dané ellipsy E tvoří základ jistého svazku kuželoseček; v tomto svazku neexistuje žádná kružnice, neboť osy hyperboly H nejsou s osami ellipsy E rovnoběžny.

Prof. *J. Šolín* odvodil centrálnou kollineací se středem úběžným (centrálnou affinitou) ze svazku kuželoseček určeného body q_k jiný svazek kuželoseček, a to tak, že ellipse E původního svazku přísluší v odvozeném svazku ellipsa E sama a hyperbole H původního svazku přísluší v odvozeném svazku jiná hyperbola L, jejíž osy jsou s osami ellipsy E rovnoběžny. V tomto odvozeném svazku existuje pak jistá kružnice K, jejíž průsečíky q'_k ($k = 1, 2, 3, 4$) s ellipsou E jsou s hledanými body q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) v souvislosti svrchu vyznačené a dají se tedy tyto body q_k z oněch bodů q'_k rovnoběžnými affinitními paprsky odvoditi.

V následujícím provedu tuto myšlénku analyticky a odvodím dosti jednoduchou konstrukci zmíněné kružnice K.

Směr affinitní budiž stanoven směrnicí

$$\nu = \operatorname{tg} \sigma.$$

Značí-li x, y pravoúhlé souřadnice původního bodu a ξ, η souřadnice odvozeného bodu, platí

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \nu$$

*) Prof. *J. Šolín*, „*Kterak strojiti normály ellipsy bodem mimo křivku*" Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, r. XV., č. 1., pag. 1.—7. Praha 1885.

čili

$$(3) \qquad \nu(x-\xi) = y - \eta,$$

z čehož vychází

$$(4) \qquad \nu x - y = \nu\xi - \eta;$$

ježto má příslušeti v odvozeném svazku dané ellipse E tato ellipsa sama, musí

$$(5) \qquad b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = k(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2),$$

kde k jest konstanta, kterou, jak snadno patrno, jest položiti rovnou 1. Z rovnice pak (3) a (5) dostaneme:

$$(6) \qquad b^2x + \nu a^2y = -b^2\xi - \nu a^2\eta.$$

Z rovnic (4) a (6) plyne

$$(7) \qquad x = \frac{(\nu^2a^2 - b^2)\xi - 2\nu a^2\eta}{\nu^2a^2 + b^2},$$

$$(8) \qquad y = \frac{-2\nu b^2\xi - (\nu^2a^2 - b^2)\eta}{\nu^2a^2 + b^2}.$$

Hyperbola L má míti osy rovnoběžné s osami souřadnými X a Y, proto musí v její rovnici součinitel členu $\xi\eta$ rovnati se nulle, t. j.

$$(\nu^2a^2 - b^2)^2 - 4\nu^2a^2b^2 = 0$$

čili

$$(9) \qquad a^4\nu^4 - 6a^2b^2\nu^2 + b^4 = 0.$$

Kořeny ν_k ($k = 1, 2, 3, 4$) rovnice (9) stanoví čtyři affinitní směry, jimiž se přetvoří daný svazek kuželoseček v jiný svazek svrchu vytčených vlastností,

Řešením rovnice (9) dostaneme

$$\nu^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2(3 \pm 2\sqrt{2}) = \left\{\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2})\right\}^2,$$

z čehož

$$\nu = \pm\frac{b}{a}(1 \pm \sqrt{2}),$$

tedy

$$\nu_1 = \frac{b}{a}(1 + \sqrt{2}), \quad \nu_2 = -\frac{b}{a}(1 + \sqrt{2}), \quad \nu_3 = \frac{b}{a}(1 - \sqrt{2}),$$

$$\nu_4 = -\frac{b}{a}(1-\sqrt{2}).$$

Patrno, že obdržíme některý z těchto čtyr affinitních směrů, spojíme-li některý vrchol velké nebo malé osy ellipsy E s některým koncovým bodem

$$\left(x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

její sdružených průměrů, jež jsou k osám stejně nakloněny a zároveň stejně dlouhy.

Volme na př. affinitní směr určený směrnicí

$$\nu = \frac{b}{a}(1+\sqrt{2}). \tag{10}$$

Z rovnice (7) a (8) pak vychází

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{-b\xi + a\eta}{b}, \tag{7'}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{b\xi + a\eta}{a}. \tag{8'}$$

Základními body odvozeného svazku jsou průsečíky ellipsy E s hyperbolou L, tak že jest tento svazek stanoven rovnicí

$$\mu E + L = 0, \tag{11}$$

značí-li μ jednoznačný parametr.

Při tom jest

$$E \equiv b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0, \tag{1'}$$

$$L \equiv -\frac{be^2}{a}\xi^2 + \frac{ae^2}{b}\eta^2 + \sqrt{2}(abx_1 + b^2y_1)\,\xi \tag{12}$$

$$+ \sqrt{2}(a^2x_1 - aby_1)\,\eta = 0.$$

V rovnici kružnice K musí rovnati se sobě součinitelé při členech ξ^2 a η^2, tak že

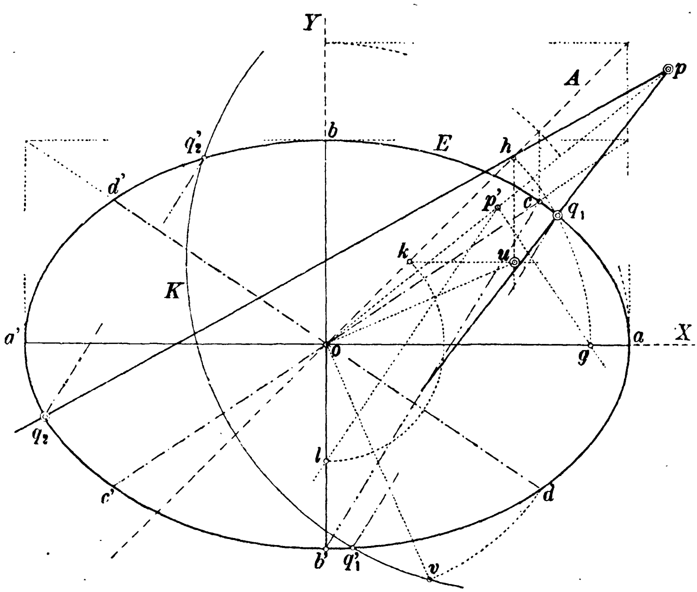
$$\mu b^2 - \frac{be^2}{a} = \mu a^2 + \frac{ae^2}{b},$$

z čehož

$$\mu = -\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

Pro tuto hodnotu parametru μ plyne pak z rovnice (11) rovnice kružnice

$$(13) \quad K \equiv \xi^2 + \eta^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + \frac{b}{a} y_1)\,\xi - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{b} x_1 - y_1\right)\eta - \frac{a^2+b^2}{2} = 0.$$



Obr. 1.

Jsou tedy souřadnice x, y středu u a poloměr r kružnice K stanoveny rovnicemi:

$$(14) \quad x = \frac{\sqrt{2}}{4}(x_1 + \frac{b}{a} y_1),$$

$$(15) \quad y = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{a}{b} x_1 - y_1\right),$$

$$(16) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Na základě rovnic (10), (14), (15) a (16) dá se pro konstrukci bodů q_k pomocí kružnice K sestaviti následující obecné pravidlo:

Affinitní směr určíme, spojíme-li některý ze čtyř koncových bodů sdružených průměrů k osám stejně nakloněných na př. bod c (obr. 1.) s některým vrcholem *malé* (velké) osy na př. s vrcholem b', jenž leží na *opačné* straně *velké* (malé) osy vzhledem k zmíněnému koncovému bodu c.

Je-li daný bod p od středu o vzdálenější na př. zevnitř ellipsy E jako v obr. 1., spojíme jej se středem a nalezneme střed p' úsečky $\overline{op}$.

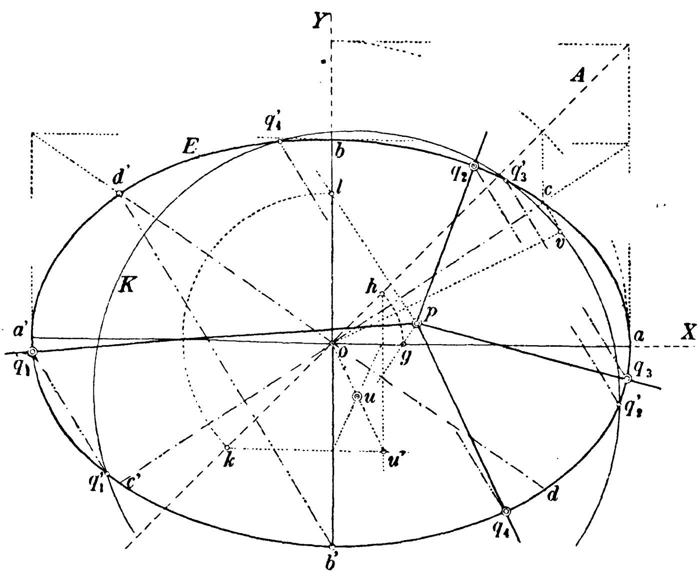
Z bodu p' spustíme kolmici $\overline{p'g}$ na průměr $\overline{cc'}$, jehož koncového bodu c jsme užili k stanovení affinitního směru $\overline{b'c}$; dále určíme průsečík g této kolmice s *velkou* (malou) osou a přeneseme úsečku $\overline{og}$ od bodu o na přímku A půlící úhel os, tak aby bod h ležel na *téže* straně *malé* (velké) osy jako bod g a vedeme bodem h přímku $\overline{hu}$ rovnoběžně s *malou* (velkou) osou. Potom spustíme z bodu p' kolmici $\overline{p'l}$ na druhý ze zmíněných stejně dlouhých sdružených průměrů, tedy na průměr $\overline{dd'}$ a určíme průsečík l této kolmice s *malou* (velkou) osou; úsečku $\overline{ol}$ přeneseme od bodu o na přímku A půlící úhel os tak, aby bod k ležel na *opačné* straně *velké* (malé) osy vzhledem k bodu l a vedeme bodem k přímku $\overline{ku}$ rovnoběžně s *velkou* (malou) osou. Průsečík u přímek $\overline{hu}$ a $\overline{ku}$ jest středem kružnice K, která prochází bodem v, jejž obdržíme, přeneseme-li polovinu průměru $\overline{dd'}$, t. j. $\overline{od}$ na přímku $\overline{ov}$, vztýčenou ve středu o kolmo ke přímce $\overline{ou}$.

Kružnice K protíná ellipsu E v bodech q'_k, z nichž odvodíme affinitními paprsky rovnoběžnými s $\overline{b'c}$ hledané body q_k.

V obr. 1. jsou *dva* z těchto bodů *reálné*, ostatní *dva* jsou *imaginární*.

Každému ze čtyř affinitních směrů přísluší jedna kružnice K; affinitní směr volíme tak, abychom docílili co možná nejpřesnějších průsečíků konstruktivních čar a aby body g a l padly na nákresnu.

Je-li bod p blíže ke středu o na př. uvnitř ellipsy jako v obr. 2., vyjdeme při konstrukci přímo z daného bodu p. Postupujeme týmž způsobem jako předešle, čímž dospějeme k bodu u_1'; středem kružnice K jest pak bod u, jenž půlí úsečku $\overline{ou'}$.



Obr. 2.

V obr. 2. jsou všechny čtyři body q_k reálné.*)

*) Zvolen tu směr affinitní $\overline{b'd'}$ určený směrnicí

$$(10') \qquad \nu = -\frac{b}{a}(1 + \sqrt{2}).$$

Souřadnice x, y středu u a poloměr r kružnice K jsou pak stanoveny rovnicemi:

$$(14') \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(x_1 - \frac{b}{a} y_1\right),$$

$$(15') \qquad y = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{a}{b} x_1 + y_1\right),$$

$$(16\ ) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$