Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Petr

Geometrický důkaz poučky Wilsonovy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 34 (1905), No. 2, 164--166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120941

Po prvé redukci obdržíme

$$13x + 23y = 13(x + 2y) - 3y = c.$$

Rovnice, z nichž x a y jest vypočísti, jsou tedy:

$$x + 2y = c,$$
$$y = 4c,$$

t. j.

$$x = -7c, \qquad y = 4c,$$

a obecně

$$x = -7c + 23t,$$
$$y = 4c - 13t.$$

Řešení rovnice

$$38x + 29y = c,$$

vypadne takto:

$$38x + 29y = 29(x + y) + 9x = 9(4x + 3y) + 2(x + y);$$

z toho plynou rovnice pro x a y:

$$4x + 3y = c,$$
$$x + y = -4c,$$

$$x = \begin{vmatrix} c, & 3 \\ -4c, & 1 \end{vmatrix} = 13c, \qquad y = \begin{vmatrix} 4, & c \\ 1, & -4c \end{vmatrix} = -17c.$$

Obecné řešení jest pak:

$$x = 13c + 29t,$$
$$y = -17c - 38t.$$

Geometrický důkaz poučky Wilsonovy.

Napsal

Dr. K. Petr.

Poučka Wilsonova nám praví, že číslo 1. 2. 3 ... $(p - 1) + 1$ (anebo jinak psáno $(p - 1)! + 1$) jest dělitelno p, jestliže p

jest prvočíslo. Abychom tuto poučku dokázali, představme si v rovině p bodů $A_1, A_2 \ldots A_p$ vrcholů to mnohoúhelníka pravidelného a uvažujme nejprve, kolika možnými způsoby ze těchto p bodů spojiti lomenou čarou uzavřenou z p úseček se skládající a mající ony body za vrcholy. Těchto způsobů jest patrně tolik, kolik jest permutací z $p - 1$ různých prvků, totiž jest jich $(p - 1)!$ Neboť vycházejíce z jednoho bodu, na př. z bodu A_1, můžeme probíbati zbývající v libovolném pořadí. Při tom pokládáme dvě lomené čáry kryjící se sice, ale proběhnuté v opačném směru jako různé. Tyto lomené čáry uzavřené jsou dvojího druhu, a to buď pravidelné anebo nepravidelné. Pravidelné jsou takové, které, otočíme-li je kolem středu příslušejícímu ku bodům $A_1, A_2 \ldots A_p$ o úhel $\frac{2\pi}{p}$ (anebo o nějaký násobek tohoto úhlu) samy sebe pokryjou. Nepravidelné pak mají tu vlastnost, že otočíme-li je o jakýkoliv z úhlů $\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \ldots \frac{2(p-1)\pi}{p}$ dostaneme lomenou čáru sice shodnou a spojující body $A_1, A_2 \ldots A_p$, ale v jiném pořadí než ta, ze které jsme vycházeli. Lze tudíž lomené čáry nepravidelné sestaviti ve skupiny vždy po p členech. Z jedné čáry lomené nepravidelné dostaneme všechny ostatní téže skupiny, když onu čáru lomenou otočíme kolem středu postupně o úhly

$$\frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p}, \ldots \frac{p-1}{p} 2\pi.$$

Jiných lomených čar není. Neboť dejme tomu, že bychom měli čáru lomenou takovou, že by sama sebe pokryla, kdybychom ji kolem středu otočili o úhel $q\frac{2\pi}{p}$ a dejme tomu, že by bylo q číslo nejmenší té vlastnosti $(1 < q < p)$.

Pak by tato čára sama sebe pokryla také při otočení o

$$\frac{2 \cdot q2\pi}{p}, \frac{3 \cdot q2\pi}{p}, \ldots \frac{\lambda \cdot q2\pi}{p}.$$

Budiž λ takové celé číslo, že

$$(\lambda - 1) q < p \quad \text{a} \quad \lambda q > p,$$

pak

$$\lambda q = p + q_1,$$

kde, poněvadž jest p prvočíslo

$$o < q_1 < q;$$

a lomená čára by se pokryla při úhlu

$$\frac{\lambda . q 2\pi}{p} = 2\pi + \frac{q_1 2\pi}{p}$$

t. j. při úhlu $\frac{q_1 2\pi}{p}$, což jest však proti suposici, že q jest nejmenší číslo té vlastnosti.

Pravidelných lomených čar jest $p - 1$, neboť pravidelná čára lomená jest jednou spojnicí úplně stanovena a bod na př. 1 můžeme spojiti pouze s $(p - 1)$ různými body; p-člených skupin nepravidelných lomených čar budiž N. Pak jest

$$(p - 1)! = p - 1 + Np$$

anebo

$$(p - 1)! + 1 = p(N + 1),$$

čímž poučka Wilsonova dokázána.

O jedné větě pro mnohoúhelníky rovinné.

Napsal

Dr. K. Petr.

Ve svém článku „O jisté úloze v trojúhelníku“ (viz Časopis pro pěst. mathem. a fys. str. 65) dokázal p. J. Langr tuto