Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vincenc Jarolímek

K theorii imaginárných křivek a ploch druhého stupně

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 113--121

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120928

K theorii imaginárných křivek a ploch druhého stupně.

Podal Dr. **Vinc. Jarolímek.**

I.

Ve svém pojednání „Některé druhy kuželoseček imaginárných“ [1]) a v Geometrii polohy [2]) vyvodil jsem, rozvrhnuv imaginárné křivky a plochy 2. stupně na čtvero druhů, některé zajímavé vlastnosti těchto útvarův druhu II. a III., jakož i konstrukce jejich elementů reálných. Ukázalo se zejména, že křivky těchto druhů mohou míti čtyři reálné body a zároveň čtyři reálné tečny, plochy pak reálnou površku 4. řádu L^4 i reálnou tečnou plochu rozvinutelnou IV. třídy λ^{IV}. Mimoděk namítá se tu otázka, plyne-li nezbytně existence čtyř reálných tečen ze čtyř reálných bodů při křivkách (a ovšem i naopak), a souvisí-li analogicky existence reálných útvarů L^4 a λ^{IV} při plochách. [3]) Chci tuto ukázati, že tomu tak jest skutečně.

II.

Imaginárná kuželosečka druhu *druhého* má (jako druhu prvého) obě osy své ve dvou reálných přímkách $X \perp Y$, ale délky poloos jsou vyjádřeny hodnotami *komplexními*, kdežto u druhu prvého (kde není ani reálných bodův ani reálných tečen) mají poloosy hodnoty ryze imaginárné. Je tedy rovnice imagi-

---

[1]) V Rozpravách II. třídy České akademie věd r. 1912.

[2]) Svazek III., str. 80.—105.

[3]) Samozřejmě nejsou ony body dotyčnými na tečnách, aniž v druhém případě L^4 dotyčnou křivkou na ploše λ^{IV}.

nárné kuželosečky druhu II. především v soustavě souřadnic bodových

$$K \equiv \frac{x^2}{(a+i\alpha)^2} + \frac{y^2}{(b+i\beta)^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Pro $a = 0$, $b = 0$ přejde K v druh prvý.

Pro reálné body křivky K obdržíme [1]) souřadnice

$$x_1 = (a^2 + \alpha^2) \sqrt{\frac{b\beta}{b\beta\,(a^2 - \alpha^2) - a\alpha\,(b^2 - \beta^2)}}, \tag{2}$$

$$y_1 = (b^2 + \beta^2) \sqrt{\frac{a\alpha}{a\alpha\,(b^2 - \beta^2) - b\beta\,(a^2 - \alpha^2)}}, \tag{3}$$

v kterýchžto rovnicích lze také položiti

$$b\beta\,(a^2 - \alpha^2) - a\alpha\,(b^2 - \beta^2) = (a\beta - b\alpha)\,(ab + \alpha\beta). \tag{4}$$

Realita výrazů (2) a (3) jest ovšem ještě podmíněna kladnou hodnotou obou odmocněnců. Ježto jmenovatelé jejich liší se toliko znamením, musí čitatelé $a\alpha$, $b\beta$ míti znamení protivná.

Souřadnice bodu druhého jsou $x_2 = x_1$, $y_2 = -y_1$, bodu třetího $x_3 = -x_1$, $y_3 = y_1$, a bodu čtvrtého $x_4 = -x_1$, $y_4 = -y_1$.

V soustavě souřadnic přímkových jest rovnice téže křivky

$$K \equiv (a + i\alpha)^2\, u^2 + (b + i\beta)^2\, v^2 - 1 = 0. \tag{5}$$

Z této rovnice plynou souřadnice tečny *reálné*

$$u_1 = \sqrt{\frac{b\beta}{b\beta\,(a^2 - \alpha^2) - a\alpha\,(b^2 - \beta^2)}}, \tag{6}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{a\alpha}{a\alpha\,(b^2 - \beta^2) - b\beta\,(a^2 - \alpha^2)}}. \tag{7}$$

Ze srovnání rovnic (2) a (6) vychází

$$u_1 = \frac{x_1}{a^2 + \alpha^2}, \tag{8}$$

a z rovnic (3) a (7)

$$v_1 = \frac{y_1}{b^2 + \beta^2}, \tag{9}$$

[1]) Uvedeme rovnici (1) na tvar $A + iB = 0$, načež řešením rovnic $A = 0$, $B = 0$ dle x, y obdržíme rovnice (2) a (3).

z čehož jde, že u_1, v_1 jsou reálné současně s x_1, y_1, a tedy: *Má-li imaginárná kuželosečka druhu druhého čtyři reálné body, má nutně také čtyři tečny reálné* (a naopak).

Souřadnice tečny druhé jsou $u_2 = u_1$, $v_2 = -v_1$, třetí $u_3 = -u_1$, $v_3 = v_1$, a čtvrté $u_4 = -u_1$, $v_4 = -v_1$.

Imaginárná křivka K' *sdružená* s křivkou K má rovnici v souřadnicích bodových

$$K' \equiv \frac{x^2}{(a - i\alpha)^2} + \frac{y^2}{(b - i\beta)^2} - 1 = 0, \tag{10}$$

a v souřadnicích přímkových

$$K' \equiv (a - i\alpha)^2 u^2 + (b - i\beta)^2 v^2 - 1 = 0. \tag{11}$$

Snadno lze se přesvědčiti, že reálné body a tečny této křivky, existují-li, jsou identické s reálnými body a tečnami křivky K, že tedy

Dvě imaginárně sdružené kuželosečky mohou míti čtyři reálné společné průsečíky a zároveň čtyři reálné společné tečny, nebo jinak řečeno: má-li imaginárná kuželosečka II. druhu K čtyři reálné body, prochází těmito i kuželosečka sdružená K', dotýkajíc se zároveň čtyř reálných tečen křivky K.

III.

Imaginárná *plocha* 2. stupně druhu *druhého*, jejíž reálné osy jsou osami souřadnic, má rovnici v souřadnicích bodových

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{(a + i\alpha)^2} + \frac{y^2}{(b + i\beta)^2} + \frac{z^2}{(c + i\gamma)^2} - 1 = 0, \tag{12}$$

a plocha s ní sdružená

$$\varphi' \equiv \frac{x^2}{(a - i\alpha)^2} + \frac{y^2}{(b - i\beta)^2} + \frac{z^2}{(c - i\gamma)^2} - 1 = 0. \tag{13}$$

Tyto plochy pronikají se v křivce 4. řádu L^4, obecně prostorové. Eliminací souřadnice z z rovnic (12) a (13) obdržíme s pomocí stejniny (4) a dalších identických rovnic

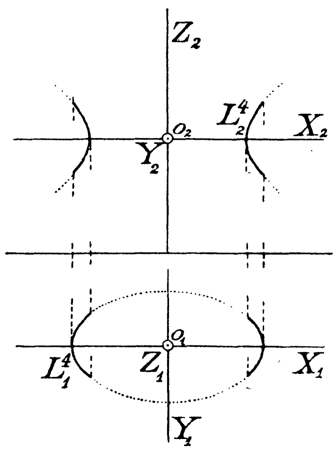
$$c\gamma\,(a^2 - \alpha^2) - a\alpha\,(c^2 - \gamma^2) = (a\gamma - c\alpha)\,(ac + \alpha\gamma),$$
$$c\gamma\,(b^2 - \beta^2) - b\beta\,(c^2 - \gamma^2) = (b\gamma - c\beta)\,(bc + \beta\gamma),$$

rovnici průmětu bikvadratiky L^4 na rovinu (XY)

$$L_1^4 \equiv \frac{x^2}{\frac{c\gamma\,(a^2+\alpha^2)^2}{(a\gamma-c\alpha)(ac+\alpha\gamma)}} + \frac{y^2}{\frac{c\gamma\,(b^2+\beta^2)^2}{(b\gamma-c\beta)(bc+\beta\gamma)}} - 1 = 0. \tag{14}$$

Eliminací souřadnice y z rovnic (12) a (13) vyjde[1]) rovnice průmětu křivky L^4 na rovinu (XZ)

$$L_2^4 \equiv \frac{x^2}{\frac{b\beta\,(a^2+\alpha^2)^2}{(a\beta-b\alpha)(ab+\alpha\beta)}} + \frac{z^2}{\frac{b\beta\,(c^2+\gamma^2)^2}{(c\beta-b\gamma)(cb+\beta\gamma)}} - 1 = 0. \tag{15}$$



Obr. 1.

Jsou tedy průměty křivky L^4 na hlavní roviny plochy φ kuželosečky, po případě toliko oblouky jejich, jak na obraze se jeví, je-li na př. L_1^4 ellipsa, L_2^4 pak hyperbola.

Aby však bikvadratika L^4 sama byla *reálná*, musí býti *oba* průměty L_1^4, L_2^4 reálny; nesmí tedy být *oba* jmenovatelé ani v rovnici (14), ani v rovnici (15) *negativné*, nýbrž aspoň

1) Anebo touž methodou, jako v odst. II.: rovnici (12) uvedeme na tvar $A + iB = 0$, načež eliminací proměnné z z rovnic $A = 0$, $B = 0$ obdržíme rovnici (14) a eliminací proměnné y z týchž dvou rovnic vyjde rovnice (15).

jeden z nich v každé rovnici musí být kladný. Kromě površky L^4, je-li reálná, nemůže plocha φ obsahovati žádného dalšího bodu reálného. Neboť kdyby takový bod m existoval, pak byla by plocha reálná; *každá* rovina totiž, proložená bodem m, protala by křivku L^4 ve čtyřech bodech, buď reálných nebo imaginárných, ale podvojně sdružených, které by s bodem m určovaly *reálnou* kuželosečku, ležící na ploše φ.

Táž plocha má v soustavě souřadnic *rovinových* rovnici

$$\varphi \equiv (a + i\alpha)^2 u^2 + (b + i\beta)^2 v^2 + (c + i\gamma)^2 w^2 - 1 = 0, \quad (16)$$

a plocha s ní sdružená

$$\varphi' \equiv (a - i\alpha)^2 u^2 + (b - i\beta)^2 v^2 + (c - i\gamma)^2 w^2 - 1 = 0. \quad (17)$$

Jsou to vlastně rovnice dvojmocných svazků rovinových, které plochy φ, φ' obalují. Pro společnou obalovou plochu rozvinutelnou čtvrté třídy λ^{IV} mají rovnice (16) a (17) platnost současnou; u, v, w jsou pak souřadnice kterékoli společné tečné roviny ploch φ a φ'. Eliminací souřadnice w z obou rovnic nabudeme rovnice proniku obalové plochy λ^{IV} s rovinou XY

$$\lambda_1^{IV} \equiv \frac{(a\gamma - c\alpha)(ac + \alpha\gamma)}{c\gamma} \cdot u^2 + \frac{(b\gamma - c\beta)(bc + \beta\gamma)}{c\gamma} \cdot v^2 - 1 = 0, \quad (18)$$

a eliminací souřadnice v z rovnic (16), (17) rovnice proniku plochy λ^{IV} s rovinou XZ

$$\lambda_2^{IV} \equiv \frac{(a\beta - b\alpha)(ab + \alpha\beta)}{b\beta} \cdot u^2 + \frac{(c\beta - b\gamma)(bc + \beta\gamma)}{b\beta} \cdot w^2 - 1 = 0, \quad (19)$$

Jsou to křivky II. třídy, tedy kuželosečky.[1]) Aby obalová plocha

---

[1]) Plocha rozvinutelná λ^{IV} je symmetrická dle všech tří hlavních rovin plochy φ. Části souměrné dle roviny XY pronikají se v kuželosečce λ_1^{IV}, souměrné dle roviny XZ v kuželosečce λ_2^{IV}, a souměrné dle roviny YZ v kuželosečce λ_3^{IV}, jejíž rovnici obdržíme, eliminujeme-li souřadnici u z rovnic (16) a (17). Z kuželoseček λ_1^{IV}, λ_2^{IV}, λ_3^{IV} skládá se tedy *vlastní pronik* plochy λ^{IV}; křivky ty sluší pokládati za dvojné. Touž vlastnost má na př. také *rozvinutelná plocha normál*, sestrojená ku ploše 2. stupně dle některé její křivky křivosti (viz článek autorův na str. 247., ročníku 1879 tohoto časopisu a obraz na konci ročníku připojený).

λ^{IV} byla reálná, musí *oba* proniky (19), (20) býti reálné. Položíme-li

$$\frac{c\gamma}{(a\gamma - c\alpha)(ac + \alpha\gamma)} = m, \tag{20}$$

$$\frac{c\gamma}{(b\gamma - c\beta)(bc + \beta\gamma)} = n, \tag{21}$$

$$\frac{b\beta}{(a\beta - b\alpha)(ab + \alpha\beta)} = p, \tag{22}$$

$$\frac{b\beta}{(c\beta - b\gamma)(bc + \beta\gamma)} = q, \tag{23}$$

bude podle rovnic (14), (20) a (21)

$$L_1^4 \equiv \frac{x^2}{m\,(a^2 + \alpha^2)^2} + \frac{y^2}{n\,(b^2 + \beta^2)^2} - 1 = 0, \tag{24}$$

podle rovnic (15), (22) a (23)

$$L_2^4 \equiv \frac{x^2}{p\,(a^2 + \alpha^2)^2} + \frac{y^2}{q\,(c^2 + \gamma^2)^2} - 1 = 0, \tag{25}$$

dále podle rovnic (18), (20) a (21)

$$\lambda_1^{IV} \equiv nu^2 + mv^2 - mn = 0, \tag{26}$$

a podle rovnic (19), (22) a (23)

$$\lambda_2^{IV} \equiv qu^2 + pw^2 - pq = 0. \tag{27}$$

Protože veličiny $(a^2 + \alpha^2)^2$, $(b^2 + \beta^2)^2$, $(c^2 + \gamma^2)^2$ jsou vždy kladné, je realita křivek L_1^4, L_2^4 závislá toliko na znaménkách činitelů m, n, p, q; ale realita křivek λ_1^{IV}, λ_2^{IV}, tudíž i realita obalové plochy λ^{IV} závisí podle rovnic (26) a (27) na *týchž* podmínkách [1]), platí tudíž věta:

Obsahuje-li imaginárná plocha 2. stupně druhu II. reálnou křivku bikvadratickou, jest také nutně obalena reálnou rozvinutelnou plochou IV. třídy (a naopak); dotyčná křivka této plochy λ^{IV} jest ovšem pomyslná. Touž bikvadratikou L^4 prochází a téže plochy obalové λ^{IV} dotýká se také imaginárná plocha φ' *sdružená* s danou plochou φ.

Kromě tečných rovin plochy λ^{IV} nemůže plocha φ míti žádné další reálné roviny tečné. Neboť kdyby taková rovina μ

[1]) totiž: aspoň jeden z činitelů m, n musí býti kladný, a mimo to také p, q nesmí býti zároveň negativné.

existovala, byla by plocha φ reálná; *každým* bodem roviny μ totiž bylo by lze položiti čtyři tečné roviny ku ploše λ^{IV}, buď reálné nebo imaginárné, ale podvojně sdružené, které by s rovinou μ určovaly *reálný* tečný kužel 2. stupně, opsaný ploše φ.

IV.

Bikvadratika L^4 může také rozpadnouti se ve dvě kuželosečky a *zároveň* obalová plocha λ^{IV} ve dva kužele 2. stupně.

To nastane tehdy, když průmět L_1^4 (rovnice 14.) nebo průmět L_2^4 (rovnice 15.) rozpadne se ve dvě rovnoběžky s osou X, když tedy jmenovatel prvého členu v rovnici (14) nebo (15) je nekonečně velký, když tedy podle rovnice (14) buď

$$a\gamma = c\alpha, \text{ čili } \frac{a}{\alpha} = \frac{\gamma}{c}, \tag{28}$$

nebo

$$ac = -\alpha\gamma, \text{ čili } \frac{a}{\alpha} = -\frac{\gamma}{c}, \tag{29}$$

anebo podle rovnice (15) buď

$$a\beta = b\alpha, \text{ čili } \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}, \tag{30}$$

nebo

$$ab = -\alpha\beta, \text{ čili } \frac{a}{\alpha} = -\frac{\beta}{b}. \tag{31}$$

V případech (28) a (29) jest

$$y_{1,2} = \pm (b^2 + \beta^2) \sqrt{\frac{c\gamma}{(b\gamma - c\beta)(bc + \beta\gamma)}}, \tag{32}$$

tudíž L^4 rozpadá se ve dvě shodné kuželosečky (rovnice 15.), jichž roviny jsou $\parallel$ (XZ).

V případech (30) a (31) jest pak

$$z_{1,2} = \pm (c^2 + \gamma^2) \sqrt{\frac{b\beta}{(c\beta - b\gamma)(bc + \beta\gamma)}}, \tag{33}$$

tak že L^4 rozpadá se ve dvě kuželosečky (rovnice 14.), jež leží v rovinách $\parallel$ (XY).

Za téže podmínky (28) nebo (29) plyne z rovnice (18)

$$v_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c\gamma}{(b\gamma - c\beta)(bc + \beta\gamma)}}, \tag{34}$$

t. j. obalová plocha λ^{IV} rozpadá se ve dva kužele 2. stupně, jichž vrcholy jsou na ose Y ve vzdálenostech od počátku souřadnic $= \mp \frac{1}{v_1}$.

Za podmínek pak (30) nebo (31) jde z rovnice (19)

$$w_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b\beta}{(c\beta - b\gamma)(bc + \beta\gamma)}}, \tag{35}$$

t. j. plocha λ^{IV} rozpadá se ve dva shodné kužele 2. stupně, jichž vrcholy jsou na ose Z ve vzdálenostech od počátku souřadnic $= \mp \frac{1}{w_1}$.

Z rovnic (32) a (34) jde

$$y_{1,2} = (b^2 + \beta^2) \, . \, v_{1,2}, \tag{36}$$

a z rovnic (33) a (35)

$$z_{1,2} = (c^2 + \gamma^2) \, . \, w_{1,2}, \tag{37}$$

z čehož vychází, že $y_{1,2}$ a $v_{1,2}$ jsou zároveň reálné nebo pomyslné, a rovněž tak $z_{1,2}$ a $w_{1,2}$, pročež:

Obsahuje-li imaginárná plocha 2. stupně druhu II. dvě reálné kuželosečky (jichž roviny jsou kolmy k téže osy plochy), *má také dva reálné tečné kužele 2. stupně* (jichž vrcholy leží na téže ose), a naopak.

V

Věty v odstavci II. a III. odvozené mají vesměs platnost také pro imaginárnou křivku i plochu 2. stupně druhu *třetího,* která nemá os reálných [1]). Neboť každou imaginárnou kuželosečku druhu druhého K_{II} lze kollineací přetvořiti v kuželosečku druhu třetího K_{III} (a naopak), reálné pak prvky touto transformací nepozbývají své reality. A totéž platí o imaginárných plochách 2. stupně.

---

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy III, str. 86.–103.

Důkaz. Má-li křivka K_{III} čtyři reálné body a, b, c, d, jsou diagonálné body o, p, q úplného čtyřúhelníka $abcd$ vrcholy jediného reálného polárného trojúhelníka křivky K_{III}. Kollineací lze transformovati $\triangle\, opq$ ve $\triangle\, o_1\, p_1\, q_1$ tak, by úhel $p_1 o_1 q_1$ byl pravý a strana $\overline{p_1 q_1}$ by připadla do nekonečna; zároveň křivka K_{III} transformuje se v křivku K_{II}, jejíž osy jsou $\overline{o_1 p_1} \equiv X_1$, $\overline{o_1 q_1} \equiv Y_1$, $X_1 \perp Y_1$; reálné body a_1, b_1, c_1, d_1 jsou podvojně souměrny dle os Křivka K_{II} musí míti dle věty hořejší (odst. II.) také čtyři reálné tečny T_1, U_1, V_1, W_1, jež zpětnou transformací dají čtyři *reálné* tečny T, U, V, W křivky K_{III}. Má-li imaginárná plocha 2. stupně druhu třetího φ_{III} reálnou površku 4. řádu L^4, lze touto proložiti čtyři kužele 2. stupně[1]), jichž vrcholy o, p, q, r jsou vrcholy jediného polárného tetraedru plochy φ_{III}. Kollineací lze transformovati tetraedr $opqr$ v jiný $o_1 p_1 q_1 r_1$ tak, aby všecky jeho úhly při vrcholu o_1 byly pravé, a stěna $p_1 q_1 r_1$ by připadla do nekonečna; zároveň plocha φ_{III} transformuje se v plochu druhu druhého φ_{II}, jejíž osy jsou $\overline{o_1 p_1} \equiv X_1$, $\overline{o_1 q_1} \equiv Y_1$, $\overline{o_1 r_1} \equiv Z_1$; křivka L^4_1 je souměrna dle hlavních rovin plochy φ_{II}. Plocha φ_{II} musí míti dle věty hořejší (odst. III.) také reálnou tečnou plochu rozvinutelnou λ_1^{IV}, jež zpětnou transformací dá také reálnou plochu rozvinutelnou λ^{IV}, tečnou ku ploše φ_{III}.

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých.

Podává **M. Lerch** v Brně.

(Pokračování.)

5.

Uvažujme řadu paraboloidů $\lambda =$ konst., jichž vrcholové přímky s, s_1 svírají úhel stálý; vrcholy jejich V probíhají na konoidu (V) určitou čáru A. Přímky s_1 tvoří určitou plochu sborcenou, její strikční čára má za půdorys obalovou čáru přímek s'_1, jichž rovnici lze psáti

$$x \sin \omega - y \cos \omega = \lambda a (\cos 2\alpha - \cos 2\omega);$$

---

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy II, str. 64. a 65.