Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Čupr

O rovnicích majících jen reálné kořeny

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 141--155

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120927

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1917

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Teď jest možno zodpověděti některé otázky, jež se týkají systému rotačních ploch s pevným ohniskem dotýkajících se daných přímek.

Naše plocha má v nekonečnu křivku st. čtvrtého, jež má tři dvojné body, *osy rotačních paraboloidů s ohniskem F dotýkajících se přímek a, b tvoří tedy racionální kužel čtvrtého stupně.*

Dán jest bod F a tři přímky a, b, c; pak tři plochy příslušné dvojinám ab, ac, bc mají společnou křivku st. 16, která v F má bod čtyrnásobný, již vyplňují druhá ohniska a p.

O rovnicích majících jen reálné kořeny.

(Dr. Kar. Čupr.)

I. Budiž dána rovnice stupně m-tého

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0, \tag{1}$$

kdež a_0, $a_1, \ldots a_m$ jsou funkce argumentu t té vlastnosti, že probíhá-li t posloupnost hodnot $T \equiv t_1, t_2, \ldots t_n$ konvergující k limitě τ, že mají všechny rovnice tak vzniklé kořeny stejné reality (na př. $2k$ komplexních a $m - 2k$ reálných. Pak rovnice

$$\overline{a}_0 + \overline{a}_1 x + \ldots + \overline{a}_m x^m = 0, \tag{2}$$

kdež

$$\overline{a}_0 = \lim \overline{a}_0(\tau)$$
$$\overline{a}_1 = \lim a_1(\tau)$$
$$\vdots$$

má kořeny téže reality.

Připusťme, že by rovnice (2) měla kořeny jiné reality (na př. $2k + 2$ kompl., $m - 2k - 2$ reál.). Utvořme si pro rovnici (2) Sturmovy funkce

$$S_0, S_1, \ldots S_m = \text{const.},$$

koefficienty nejvyšších mocnin označme

$$s_0(\tau), \; s_1(\tau), \ldots s_m(\tau).$$

Můžeme nyní voliti číslo ε libovolně malé, že jedno z čísel $\tau \pm \varepsilon$ patří do posloupnosti T; koefficienty nejvyšších mocnin Sturmových funkcí příslušné rovnice jsou

$$s_0(\tau) \pm \varepsilon s'_0(\tau) \ldots, \quad s_1(\tau) \pm \varepsilon s'_1(\tau) \ldots$$

k můžeme voliti tak malé, že o znaménku těchto koefficientů rozhodnou první členy. O realitě kořenů lze rozhodnout ze znamének koefficientů nejvyšších mocnin: připustíme-li, že by rovnice (2) měla kořeny jiné reality nežli rovnice dané posloupnosti, musila by existovat rovnice v této posloupnosti o kořenech téže reality — což jest proti předpokladu.

Z této věty, kterou pro $k = 0$ odvodil Schur opíraje[1]) se o jednu větu z funkční theorie[2]), učiníme některé důsledky.

a) Má-li rovnice $f(x) = 0$ jen reálné kořeny, má je i rovnice

$$F(x) = (1 + nax)^{\frac{1}{n}} f(x) = 0$$

i rovnice $F'(x) = 0$ a dále rovnice

$$a \,.\, f(x) + (1 + nax) f'(x) = 0$$

ať jest n jakákoliv reálná veličina; nechme nyní n konvergovati k 0 a máme známou větu Waringovu, že rovnice

$$f(x) + Af'(x) = 0$$

má jen reálné kořeny, má-li je též rovnice $f(x) = 0$.

b) Týmž způsobem z rovnice

$$[1 + n\,(-\tfrac{1}{2}\,a\,x^2 + bx)]^{\frac{1}{n}} f(x) = 0,$$

kdež $f(x) = 0$ má jen reálné kořeny, odvodíme, že rovnice

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - ax + b = 0 \quad a \geqq 0$$

má jen reálné kořeny. Má-li $f(x) = 0$ kořeny různé, má je i rovnice

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - ax + b = 0;$$

neboť lze ji psáti ve tvaru

$$\frac{1}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_2} \cdots - ax + b = 0 \tag{3}$$

a ta pro posloupnost hodnot

$$-\infty, \quad -\alpha_1 - \varepsilon; \quad -\alpha_1 + \varepsilon; \quad \ldots; \quad -\alpha_m + \varepsilon, \quad \infty,$$

dá tolik měn, kolik jest stupeň rovnice (3).

---

1) Crelle Journal, 1913; **144**, pag. 78.

2) Math. Annal. 33, pag. 249.

Případ α) jest obsažen v případu b); i lze z něho jednoduchými obraty[3]) dokázati rozšířenou větu Waringovu: Má-li rovnice stupně m-tého $f(x) = 0$ jen reálné a vesměs různé kořeny, pak i rovnice

$$b_0 f^{(n)}(x) + b_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n f(x) = 0 \tag{4}$$

má kořeny jen reálné vesměs různé, při čemž

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0,$$

$n \leqq m$, jest rovnice mající kořeny reálné. Jenssen a Pólya značí rovnici (4) symbolicky

$$\varphi(D) f(x) = (b_0 D^n + b_1 D^{n-1} + b_2 D^{n-2} \ldots) f(x),$$

kdež D^k znamená derivaci k-tého řádu. Jenssen zabýval se zejména případem, kdy $f(x) = x^p$:[4]) má-li

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots = 0$$

jen reálné kořeny, má je i rovnice

$$b_0 n! \binom{p}{n} + b_1 (n-1)! \binom{p}{n-1} x + b_2 (n-2)! \binom{p}{n-2} x^2 + \ldots = 0.$$

c) Má-li rovnice

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots = 0$$

jen reálné kořeny, má je i rovnice

$$x^{\alpha_1} f(x) = 0$$

i rovnice

$$\frac{(d(x^{\alpha_1} f(x))}{dx} = \alpha_1 a_0 + (\alpha_1 + 1) a_1 x + \ldots = 0; \tag{4}$$

při tom musí býti $\alpha_1 \geqq 1$. Že věta tato platí i pro

$$0 < \alpha_1 \leqq 1,$$

poznáme ze tvaru

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{\alpha_1}{x} = 0,$$

v němž lze rovnici (4) psáti. Opakujeme-li tento postup pro různá $\alpha > 0$, máme tuto větu:

---

[3]) Cesaro-Kowalewski: El. Lehrbuch 432.

[4]) Acta mathematica 1913, pag. 187.

Budiž

$$F(x) = (x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_\gamma),$$

kdež

$$\alpha_1 \geqq 0, \quad \alpha_2 \geqq 0, \ldots;$$

rovnice

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 0$$

mějž jen reálné kořeny; pak i rovnice

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) x + a_2 F(2) x^2 + \ldots = 0 \tag{5}$$

má jen reálné kořeny.

Položme nyní

$$\alpha_k = z + k - 1;$$

má pak rovnice

$$f_1(x) = a_0 z(z+1) \ldots (z+k-1) + a_1 x (z+1)(z+2) \ldots (z+k) + \ldots = 0$$

jen reálné kořeny a tudíž i rovnice

$$\frac{1}{k^z} \frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots 1} \cdot f_1\left(\frac{x}{k}\right) = 0.$$

Nechme nyní k konvergovat do nekonečna posloupností hodnot $k_1, k_2, \ldots k_n$, $\lim k_n = \infty$; rovnice tak vznikající jsou vesměs téhož stupně a mají kořeny jen reálné, má je tudíž i rovnice pro $k = \infty$, t. j. rovnice

$$\frac{a_0}{\Gamma(z)} + \frac{a_1 x}{\Gamma(z+1)} + \frac{a_2 x^2}{\Gamma(z+2)} + \ldots = 0 \tag{6}$$

a též rovnice

$$a_0 + \frac{a_1}{z+1} x + \frac{a_2}{(z+1)(z+2)} x^2 + \ldots = 0.\text{[5]} \tag{7}$$

Budeme nyní aplikovat větu (6) pro celistvá z.

II. Ukázali jsme, že rovnice

$$b_0 f^{(n)}(x) + b_1 f^{(n-1)}(x) + \ldots + b_n f(x) = 0$$

má za určitých předpokladů jen reálné vesměs různé kořeny.

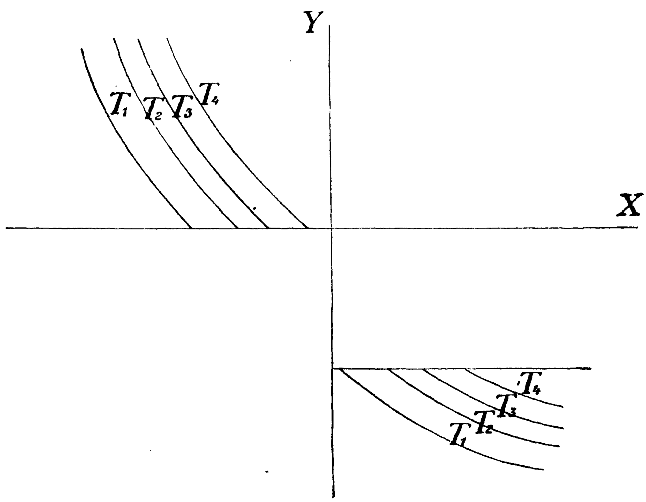
[5]) Viz Laguerre Oeuvres I. 203; uvedený tam přechod od útvarů konečných k nekonečnému není bezvadný.

Za týchž předpokladů mají reálné vesměs různé kořeny i rovnice

$$b_0 f(x) + b_1 f'(x) + \ldots + b_n f^{(n)} x = 0,$$

$$b_0 f(x) + b_1 y f'(x) + \ldots + b_n y^n f^{(n)}(x) = 0. \quad (8)$$

Uvažujme nyní křivku definovanou rovnicí (8); y totiž může býti kterákoliv reálná veličina. Buďtež b_0, $b_1 \ldots b_n$ veličiny vesměs kladné a $f(x)$ mějž jen záporné kořeny. Pak přímka $y = m$, kdež m nabývá hodnot od 0 do $+\infty$, protíná křivku (8) v m reálných vesměs různých bodech, jichž úsečky



Obr. 1.

jsou záporné. To znamená: křivka (8) probíhá druhým kvadrantem v m tazích, které se v konečnu nikde neprotínají ani nesplývají. Nyní pišme rovnici (8) ve tvaru

$$B_0(y) + B_1(y) x + B_2(y) x^2 + \ldots + B_m(y) x^m = 0, \quad (8^*)$$

kdež $B_m = \text{const.}$, B_1, $B_3, \ldots$ jsou polynomy stupně lichého a B_0, $B_2, \ldots$ polynomy stupně sudého; můžeme tedy za y položiti tak velikou zápornou hodnotu, že rovnice (8*) má jen měny znamének; má tudíž rovnice (8) od určitého místa jen kořeny kladné vesměs různé. Tedy i v části quadrantu čtvrtého probíhá křivka (8*) v m tazích neprotínajících se v konečnu a nikde nesplývajících, takže dosud vyšetřený průběh křivky (8) vypadá (pro $m = 4$) asi, jak ukazuje obr. 1.

Avšak i v části dosud nevyšetřené musí libovolná přímka $\| x$ míti s křivkou m různých reálných bodů, tedy i v této části musí býti m v konečnu neprotínajících se a nesplývajících tahů, které — jak z povahy čar algebraických vyplývá, musí s vyšetřenými dosud tahy spojitě souviseti. Každý z tahů musí v reálném bodě protnouti osu y; t. j. rovnice

$$b_0 f(0) + b_1 f'(0) y + \ldots + b_n f^{n}(0) y^n = 0$$

čili rovnice

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 y + 2!\, a_2 b_2 y^2 + \ldots + n!\, a_n b_n y^n = 0$$

může míti jen reálné kořeny.

Tak jsme dokázali větu Schurovu [6]: Mají-li rovnice

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = 0,$$

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n = 0, \quad m \geqq n;$$

jen kořeny reálné každá téhož znamení vesměs různé, má i rovnice

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \ldots + n!\, a_n b_n x^n = 0$$

a dle (6) pro $z = 1$ i rovnice

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + \ldots + a_n b_n x^n = 0$$

kořeny reálné vesměs různé téhož znamení. O poslední rovnici dokázal vlastnost tuto Malo. [7])

Věta Schurova i Malo-ova zůstává v platnosti i když základní rovnice mají kořeny vícenásobné; i pak výslední rovnice má kořeny reálné; o multiciplitě kořenů však nelze ničeho tvrditi, mají-li obě rovnice kořeny vícenásobné; má-li rovnice stupně

$$m \geqq n, \quad f(x) = 0$$

kořeny různé, mají je i rovnice výsledné, jak patrno z rozšířené věty Waringovy a z následujících vývodů.

Uvažujme rovnice

$$\prod_{k_1=1}^{k_1}(x + \alpha_1 + k_1 \varepsilon), \prod_{k_2=1}^{k_2}(x + \alpha_2 + k_2 \varepsilon) \ldots = 0$$

$$\prod_{l_1=1}^{l_1}(x + \beta_1 + l_1 \varepsilon), \prod_{l_2=1}^{l_2}(x + \beta_2 + l_2 \varepsilon) \ldots = 0,$$

[6]) Crelle Journal 1913; 144 pag. 181.

[7]) Journal de math. serie 4, s. 4., pag. 7.

kdež konstanty α, k, β, l vyhovují známým podmínkám nutným ke konstruování rovnice Schurovy nebo Malo-ovy. Rovnice dle předpisu Schurova a Maloova z těchto dvou rovnic vzniklá má kořeny reálné vesměs různé a to pro každé ε libovolně malé; nechme ε konvergovat k 0 a má i rovnice vzniklá dle předpisu Schurova nebo Malo-ova z rovnic

$$(x+\alpha_1)^{k_1}(x+\alpha_2)^{k_2}\ldots=0,$$
$$(x+\beta_1)^{l_1}(x+\beta_2)^{l_2}\ldots=0$$

kořeny jen reálné.

Na věci se nic nemění, i když $\alpha_1=0$, nebo $\beta_1=0$ anebo když zároveň $\alpha_1=\beta_1=0$, t. j. věta Maloova a Schurova pokud mluví o realitě kořenů, zůstává v platnosti, i když v daných rovnicích

$$a_1=a_2=\ldots a_\varrho=0,$$
$$b_1=b_2=\ldots=b_\gamma=0.$$

III. Větu Maloovu lze však dokázati přímo úplnou indukcí. Připusťme správnost věty[8]) pro stupeň n a $m>n$;

$$f(x)\doteq a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a^mx^m=0,$$
$$\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n=0$$

a sestrojme dle předpisu Maloova rovnici z rovnic

$$f(x)=0 \quad \text{a} \quad \varphi(x)(1+\lambda x)=0,$$

kdež λ jest téhož znamení jako kořeny rovnice $\varphi(x)=0$. Pak lze výslednou rovnici psáti ve tvaru

$$\lambda x+\frac{a_0b_0+a_1b_1x+\ldots+a_nb_nx^n}{a_1b_0+a_2b_1x+\ldots+a_{n+1}b_nx^n}=0. \tag{9}$$

Další postup, spočívající na spojitosti racionálných funkcí, pouze nastíníme: lze jistě λ voliti tak malé, však konečné, že v okolí kořenů rovnice

$$a_0b_0+a_1b_1x+\ldots+a_nb_nx^n=0$$

leží n kořenů rovnice (9); $(n+1)$ní kořen jest též reálný — a jak se snadno ukáže — téhož znamení a od ostatních různý.

---

[8]) Podobné důkazy viz Netto Algebra I. 236.

Dále uvažujme dvě křivky

$$y = \lambda x + \frac{a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_n b_n x^n}{a_1 b_0 + a_2 b_1 x + \ldots + a_{n+1} b_n x^n} \qquad (9^*)$$

$$\bar{y} = \lambda_1 x + \frac{a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_n b_n x^n}{a_1 b_0 + a_2 b_1 x + \ldots + a_{n+1} b_n x^n}, \qquad (9^{**})$$

kdež $|\lambda_1| > |\lambda|$; i dá se ukázat, že ke *každému* λ lze voliti skutečně taková λ_1, že v okolí průsečíků křivky (9*) s osou x leží průsečíky křivky (9**) s osou x, t. j. že i rovnice $\bar{y} = 0$ má jen kořeny reálné a různé. Tak dokážeme větu pro každé libovolně velké λ; pro stupně m a $n = 1$ jest věta samozřejmá, platí tudíž pro stupně m a $n = 2$ atd.

IV. Dříve nežli budeme některé z předešlých vět applikovati na celistvé transcendentní funkce, provedeme některá vyšetřování.

Konvergují-li polynomy mající jen reálné kořeny

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z), \ldots f_n(z)$$

s rostoucím n stejnoměrně v celé rovině k celistvé transcendentní funkci $f(z)$, má i tato jen reálná nullová místa.

Vypočtěme hodnotu výrazu

$$\int_c d \log f_n(z) - \int_c d \log f(z) = \int_c d \log \frac{f_n}{f},$$

kdež c jest polokružnice o středu $(0, \varepsilon)$ a poloměru ε a probíhající jen v severní polorovině. Pak jest

$$\int_c d \log f_n(z) = 0,$$

a to pro každé n; pro ustavičně rostoucí n jest

$$\lim \frac{f_n(z)}{f(z)} = 1$$

a jest tudíž i

$$\int_c d \log f(z) = 0;$$

to znamená, že funkce $f(z)$ nemá v severní polorovině žádných nullových bodů; pro jižní polorovinu dokážeme totéž.

Budiž c_1 nyní obvod obdélníka rozkládajícího se souměrně dle obou os souřadnicových; šířka jeho budiž 2ε a délka $\frac{2}{\varepsilon}$.

Pak jest pro libovolně malé ε

$$\int_{c_1} d \log f_n(z) = \varphi(n, \varepsilon),$$

kdež je-li n konečné a $\lim \varepsilon = 0$, jest $\varphi(n) = n$, a konverguje-li n do nekonečna, jest pro $\lim \varepsilon = 0$

$$\lim \varphi(n, \varepsilon) = \infty.$$

Roste pak i

$$\int_{c_1} d \log f(z)$$

s klesajícím ε do nekonečna; t. j. funkce $f(z)$ má jen reálné nullové body.

Mají-li

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ \dots$$

pro každé n reálné kořeny téhož znamení, jest $f(z)$ rodu 0.

Aby funkce celistvá byla rodu 0, jest nutno a postačí, aby řada

$$\frac{1}{|(z_1)|} + \frac{1}{|(z_2)|} + \frac{1}{|(z_3)|} + \dots$$

kdež $z_1, z_2, z_3, \dots$ jsou kořeny její, konvergovala absolutně. Je-li obecně

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \dots$$

a jsou-li kořeny rovnice $f_n(z) = 0$

$$z_1^{(n)},\ z_2^{(n)},\ z_3^{(n)},\ \dots$$

jest

$$\frac{1}{|z_1^{(n)}|} + \frac{1}{|z_2^{(n)}|} + \frac{1}{|z_3^{(n)}|} + \dots = -\frac{a_1^{(n)}}{a_0^{(n)}}.$$

Pro $\lim n = \infty$ jest

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

a

$$\lim \sum_1^\infty \frac{1}{|z_k|} = \lim \left(-\frac{a_1^{(n)}}{a_0^{(n)}}\right) = -\frac{a_1}{a_0}.$$

a) Polynomy

$$\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{2n}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

mají jen reálné nullové body, má je tudíž i jejich derivace libovolného řádů, $m < n$,

$$\frac{d^m\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{2n}}{d x^m},$$

pro lim $n = \infty$ máme, že funkce

$$\frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{d x^m} = e^{-\frac{x^2}{2}} U_m(x)$$

má jen reálné nullové body; polynomy $U_m(x)$ slují polynomy Hermiteovy.

b) Jako jinou aplikaci uvažujme funkci

$$P_\nu^n(x) = \frac{(n-\nu)!}{(2n)!}(x^2-1)^{\frac{\nu}{2}} \frac{d^{n+\nu}(x^2-1)^n}{d x^{n+\nu}}$$

definující kulové funkce. Z vyjádření tohoto jest ihned zřejmo, že rovnice $P_\nu^n(x) = 0$ má jen reálné kořeny. Jest však též

$$P_\nu^n(x) = \frac{1}{\pi} 2^n \frac{(n+\nu)!\,(n-\nu)!}{(2n)!} \int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n \cos\varphi\, d\varphi\,;$$

stanovíme-li limitu výrazů

$$\frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} P_\nu^n\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right)$$

pro lim $n = \infty$, obdržíme [10])

$$\lim \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}}\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right) = \int_0^\pi e^{i\cos\varphi.\vartheta} \cos n\varphi\, d\varphi = J^n(\vartheta),$$

kdež $J_n(\vartheta)$ jest Besselova funkce druhu *1* o celistvém indexu n.

Máme tedy: Besselovy funkce druhu prvního o celistvém indexu mají jen reálné kořeny.

---

[10]) Crelle Journal; 69; pag. 130.

V. Lze však dokázati, že rovnice

$$J_n(x) = 0$$

má jen reálné kořeny pro každé $n \geqq 0$.

Rovnice

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots = 0$$

má pro každé n jen reálné kořeny; má je pak dle (7) i rovnice

$$\psi_{m,n} = 1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{2!(m+1)(m+2)}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots = 0$$

pro každé $m > 0$; jen reálné kořeny a to téhož znamení má i celistvá funkce rodu o

$$\lim_{m = \infty} \psi_{m.n}(x) = \psi_m(x) = 1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x}{2!(m+1)(m+2)} + \ldots$$

Funkce $\psi_m(x)$ souvisí s Besselovými funkcemi vztahem

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2^m \Gamma_{(m+1)}} \psi_m\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Rovnice $\psi_m(x) = 0$ má jen kořeny záporné; tudíž rovnice $J_m(x) = 0$ jen kořeny reálné.

Dle věty Rolleovy víme, že kořeny rovnice

$$\frac{d\psi_{m,n}(x)}{d(x)} = 0$$

separují kořeny rovnice $\psi_{m,n}(x) = 0$; pro $\lim n = \infty$, jest

$$\lim \frac{d\psi_{m,n}(x)}{dx} = \psi_{m+1}(x).$$

Můžeme tedy tvrditi: Kořeny rovnice

$$x^{-m} J_m(x) = 0$$

jsou separovány kořeny rovnice

$$x^{-(m+1)} J_{m+1}(x) = 0.$$

Funkci $\psi_m(x)$ můžeme vyjádřiti pomocí řady hypergeometrické; jest totiž:

$$\psi_m(x) = \lim_{b = \infty} F\left(b, b, m+1, \frac{x}{b^2}\right);$$

hoví tedy $\psi_m(x)$ lineární differenciální rovnice druhého řádu, kterou dostaneme ze známé differenciální rovnice pro bypergeometrickou řadu, píšeme-li

$$\psi_m(x) = F\left(\frac{x}{b^2}\right)$$

$$b^2 F'\left(\frac{x}{b^2}\right) = \psi'_m(x)$$

$$b^4 F\left(\frac{x''}{b^2}\right) = \psi''_m(x)$$

a položíme-li

$$\lim b = \infty;$$

pak jest

$$x\psi''_m(x) + (m+1)\psi'_m - \psi_m = 0.$$

Ukážeme nyní, že $\psi_m(x)$ neobsahuje jako multiplikativní faktor funkci e^{ax}. Kdyby totiž

$$\psi_m(x) = e^{ax}\psi(x),$$

kdež $\psi(x)$ jest celistvá funkce rodu o, bylo by

$$x(a^2\psi + 2a\psi' + \psi'') + (m+1)(a\psi + \psi') - \psi = 0$$

čili

$$a^2 + 2a\frac{\psi'}{\psi} + \frac{\psi''}{\psi} + \frac{m+1}{x}\left(a + \frac{\psi'}{\psi}\right) - \frac{1}{x} = 0$$

a položme nyní $x = \infty$; jest pak

$$\frac{\psi'}{\psi} = \left(\frac{1}{x+x_1} + \frac{1}{x+x_2} + \dots\right),$$

$$\frac{\psi''}{\psi} = \left(\frac{1}{x+x_1}\cdot\frac{1}{x+x_2} + \dots\right).$$

Řada

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \frac{1}{|x_3|} + \dots$$

i řada

$$\frac{1}{|x_1|\cdot|x_2|} + \frac{1}{|x_1|\,|x_3|} + \dots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} + \dots\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}\dots\right)$$

konvergují absolutně ($\psi(x)$ jest rodu o); konvergují tedy i řady pro

$$\frac{\psi'}{\varphi} \text{ a } \frac{\psi''}{\psi}$$

pro každé kladné x; je-li $\lim x = \infty$, jest

$$\lim \frac{\psi'}{\psi} = \lim \frac{\psi''}{\psi} = o$$

a tudíž $a = o$.

Besselovy funkce budou rodu o, nebo 1. Rodu o nemohou býti; jsou-li totiž

$$|b_1|, \ |b_2|, \ |b_3|, \ \ldots$$

kořeny rovnice $x^m J_m(x) = o$, jest [11])

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}\pi < |b_1| < \frac{3}{2}\pi, \\ \frac{3}{2}\pi < |b_2| < 2\pi, \\ \frac{5}{2}\pi < |b_3| < 3\pi, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

odkudž

$$\frac{2}{\pi}(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots) > \sum_1^\infty \frac{1}{|b_k|} > \pi(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots)$$

Tedy řada

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|b_k|}$$

diverguje.

Jsou tedy Besselovy funkce pro každý kladný index celistvé funkce rodu 1. [12])

VI. Nejobecnější tvar polynomů, jimiž lze se blížiti k celistvé funkci mající jen reálné kořeny, jest

$$\left(1 - \frac{\frac{a_0}{2} x^2}{n}\right)^n \left(1 + \frac{b_0 x}{n}\right)^n \prod_n^1 \left(1 + \frac{x}{\alpha_i}\right)\left(1 + \frac{b_i x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\frac{a_i}{2} x^2}{n}\right)^n,$$

kdež $a_k \geqq o$; jsou to tedy funkce rodu o, 1 a některé funkce rodu 2. Na funkce tyto lze aplikovat větu Rolleovu, jednoduchou i rozšířenou větu Waringovu i větu 5.

---

[11]) Enc. des sc. math. I., II., vol. V. fasc. 2. pag. 220,

[12]) Jiný důkaz viz Grommer; Crelle Journal 1914 pag. 164. Tvrzení Laguerrovo Oeuvr. compl. I. 203 není dost jasné.

Vyšetřme rod funkcí tak vzniklých. První derivace celistvé funkce $G(x)$ jest celistvá funkce téhož rodu jako $G(x)$; téhož rodu[13]) jsou i funkce

$$e^{ax} G(x),\ x^a G(x)$$

i jich prvé derivace

$$e^{ax}(G'(x) + a\,G(x)),\ x^{a-1}(x\,G'(x) + a\,G(x)).$$

Značme funkce, k nimž horní polynomy mohou konvergovat R_0, R_1, R_2; a máme tyto výsledky:

1. Je-li

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = o$$

rovnice mající jen reálné kořeny, má celistvá funkce

$$H \equiv a_0\,G(x) + a_1 G'(x) + a_2 G''(x) + \ldots$$

kdež $G(x)$ jest celistvá funkce typu R_0, R_1, R_2, též jen reálné kořeny a rod funkce H jest totožný s rodem funkce $G(x)$. Věta zůstává v platnosti i když $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ konverguje k celistvé funkci typu R_0, R_1, R_2.

2. Je-li

$$F(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots + f_m x^m$$

polynom mající jen reálné záporné nullové body a

$$G(x) = G_0 + G_1(x) + G_2 x^2 + \ldots$$

celistvá funkce typu R_0, R_1, R_2 má celistvá funkce

$$H_1 \equiv G_0 F(o) + G_1 F(1)\,x + g_2 F(2) x^2 + \ldots$$

též jen reálné nullové body a rod funkce H_1 jest totožný s rodem funkce G. Věta zůstává v platnosti i když

$$f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$$

konverguje k celistvé funkci rodu o mající jen záporné reálné nullové body.

Odtud možno činiti důsledky o realitě kořenů některých transcendentních rovnic. Je-li $G(x)$ celistvá funkce typu R_0, R_1, R_2, mají rovnice

$$\frac{G'(x)}{G(x)} + a = o,$$

[13]) Borel: Leçons sur les fonctions entières pag. 32.

a libovolné

$$\frac{G'(x)}{G(x)} + \frac{a}{x} = o, \; a \geqq o$$

jen reálné kořeny. Takové rovnice jsou na př.

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} + a = o, \quad x \operatorname{tg} x - a = o,$$

$$\frac{\psi'_m(x)}{\psi_m(x)} + \frac{a}{x} = 0, \quad \frac{J'_m(x)}{J_m(x)} + \frac{a}{x} = o, \quad a > o.$$

3. Větu Maloovu lze aplikovat na celistvé funkce rodu o mající kořeny reálné téhož znamení; rod funkce takto vzniklé jest též o. Jenssen (Acta mathematica 1913, pag. 188) připouští možnost aplikace věty Maloovy i pro funkce rodu 1.

K funkcím celistvým rodu 1, majících jen reálné kořeny téhož znamení nelze se blížiti polynomy majícími jen reálné kořeny téhož znamení: nelze tedy tímto způsoben rozhodnouti, lze-li větu Maloovu aplikovati na celistvé funkce rodu 1. Jenssen (Acta mathematica 1913 p. 188) míní, že ano.

4. Větu Schurovu lze aplikovati na funkce rodu o mající kořeny téhož znamení. Funkce tam vzniklá jest rodu o. O funkcích rodu 1 platí totéž, co bylo řečeno v 3.

Poznámka ke kombinacím daného součtu z čísel přirozené řady číselné.

Napsal doc. dr. **Václav Simandl** v Brně.

Uvažujme následující problém kombinatorický. Jest nalézti počet kombinací bez opakování h-té třídy ze všech čísel přirozené řady číselné té vlastnosti, aby součet čísel v těchto kombinacích byl určité číslo této řady m. Tento počet si jako *E. Netto* *) označíme symbolicky následovně:

$$\Gamma^{(h)} \,.\, (\int m).$$

---

*) Viz *E. Netto*: Lehrbuch der Combinatorik. Lipsko 1901, pag. 119 a následující.