Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Granát

Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 244--258

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120921

Vypočítávání obsahu šikmo seříznutého kužele.

Žákům středních škol podává **Fr. Granát**, prof. reálky v Kostelci n. Orl.

(Dokončení.)

Krychlový obsah našeho kužele můžeme také určiti jako obsah tělesa, jemuž je koule vepsána; potom $K = P \cdot \frac{1}{3}\varrho$, kde P je povrch tělesa, ϱ poloměr koule vepsané. Tento se v $\varDelta a_2 b_2 v_2$ jeví jako poloměr kružnice tomuto trojúhelníku vepsané a můžeme jej vypočísti buď na základě některého vztahu, známého z planimetrie neb trigonometrie (na př. pro stranu a a protější úhel α a poloviční obvod $\varDelta s$ platí, že $\varrho = (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$) anebo dle rovnice (2) neb (3) a (4).

Dle rovnice $\varrho = (a + e) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\psi - \beta)$ a rov. (4) je

$$\varrho = a\left(1 + \frac{\cos\psi}{\cos\beta}\right) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta),$$

$$\varrho = a\,\frac{\cos\beta + \cos\psi}{\cos\beta} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\psi - \beta),$$

nahradíme-li $\cos\beta + \cos\psi$ součinem a upravíme-li, bude:

$$\varrho = \frac{2a}{\cos\beta} \cos\tfrac{1}{2}(\beta + \psi) \sin\tfrac{1}{2}(\psi - \beta).$$

Nebo dle vztahu, že $\varrho = (s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, je pro náš případ

$$s = \tfrac{1}{2}(2a + m + n)$$

dle rovnice (1) a hodnoty určené sinovou poučkou z $\varDelta a_2 b_2 v_2$ je

$$n = \frac{2a \sin(\psi + \beta)}{\sin 2\beta},$$

a tedy

$$\varrho = [\tfrac{1}{2}(2a + m + n) - 2a] \operatorname{tg}\beta$$

čili

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(m + n - 2a) \operatorname{tg}\beta,$$

dosadíme-li za hodnoty m a n a upravíme, bude

$$\varrho = \frac{a[\sin(\psi - \beta) + \sin(\psi + \beta) - \sin 2\beta]}{\sin 2\beta} \operatorname{tg}\beta,$$

$$\varrho = \frac{a(2\sin\psi\cos\beta - \sin 2\beta)}{2\sin\beta\cos\beta} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta};$$

zkrácením a rozvedením $\sin 2\beta$ obdržíme

$$\varrho = \frac{2a\cos\beta(\sin\psi - \sin\beta)}{2\cos^2\beta} = \frac{2a}{\cos\beta}\sin\tfrac{1}{2}(\psi - \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\psi + \beta),$$

tedy výrazy pro ϱ oběma způsoby vypočtené stejné!

$P = pl + z$. Plášť určíme z vlastnosti, že známe jeho průmět na základnu. Tedy

$$pl = \frac{\pi \,.\, \overline{a_1 s_1} \,.\, \overline{s_1 d_1}}{\sin\beta},$$

ale $\overline{a_1 s_1} = \overline{a_2 s_2}\sin\psi$ a tedy

$$pl = \frac{\pi\,\overline{a_2 s_2}\sin\psi \,.\, \overline{s_1 d_1}}{\sin\beta} = \frac{\pi ab\sin\psi}{\sin\beta},$$

a proto povrch

$$P = \pi ab\left(\frac{\sin\psi}{\sin\beta} + 1\right),$$

tedy

$$K = \tfrac{1}{3}P\,.\,\varrho =$$

$$\tfrac{1}{3}\pi ab\,.\,\frac{\sin\psi + \sin\beta}{\sin\beta}\,.\,\frac{2a\sin\frac{1}{2}(\psi - \beta)\cos\frac{1}{2}(\psi + \beta)}{\cos\beta}$$

a dosadíme-li za a, b hodnoty (1) a (5) a upravíme jednoduchým krácením

$$K =$$

$$\tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{1}{4}\pi\,\frac{m^3\,.\,\sin 2\beta\,.\,2\sin\beta\cos\beta\sin(\psi + \beta)\sqrt{\sin(\psi + \beta)\sin(\psi - \beta)}}{\sin^2(\psi - \beta)\,.\,\cos\beta}$$

a tedy zase

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3\sin 2\beta\sin\beta\sqrt{\left[\frac{\sin(\psi + \beta)}{\sin(\psi - \beta)}\right]^3},$$

t. j. výsledek shodný s výsledkem prve vypočteným.

Důsledky: Je-li $\psi = 90^0$, musíme obdržeti krychlový obsah úplného kužele.

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3\sin 2\beta\sin\beta\sqrt{\left[\frac{\sin(R + \beta)}{\sin(R - \beta)}\right]^3},$$

tedy

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3\sin 2\beta\sin\beta.$$

Ale $\quad K = \frac{1}{3}\pi r^2 \,.\, v$, kde $r = m \sin \beta$; $v = m \cos \beta$,

tedy

$$K = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, m^2 \sin^2 \beta \,.\, m \cos \beta = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \,.\, \sin \beta, \tag{6}$$

tedy důkaz proveden.

Abychom mohli určiti rozměry elliptického řezu na válci, který můžeme pokládati za kužel o vrcholu v nekonečnu, určeme rozměry poloos ellipsy pomocí poloměru základny kužele, omezeného rovinou kolmou k ose, dotýkající se roviny řezu. Potom z $\Delta a_2 b_2 q_2$ plyne sinovou poučkou

$$2a : 2r = \cos \beta : \sin(\psi + \beta),$$

tedy

$$a = \frac{r \cos \beta}{\sin(\psi + \beta)}.$$

Dle (5)

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\sin(\psi + \beta) \sin(\psi - \beta)},$$

tedy

$$b = \frac{r}{\sin(\psi + \beta)} \sqrt{\sin(\psi + \beta) \sin(\psi - \beta)} = r \sqrt{\frac{\sin(\psi - \beta)}{\sin(\psi + \beta)}}.$$

Bude tedy pro válec $\beta = 0$, a proto

$$a = \frac{r}{\sin \psi}; \quad b = r,$$

kterýžto výsledek je znám ze stereometrie. Zde budiž jen jeho potvrzení jako případu zvláštního.

Chceme-li vyčísliti krychlový obsah seříznuté části úplného kužele, jehož základna vytíná na povrchové přímce úsek $\lambda \,.\, m = s$, kde λ je libovolné číslo větší než 1, obdržíme, označíme-li K_1 obsah kužele hledaného, K_2 úplného a K odříznuté části, že

$$K_1 = K_2 - K, \quad m : s = r_1 : r \quad \text{a tedy} \quad m : m\lambda = r_1 : r$$

a z toho

$$r = \lambda r_1 = \lambda m \sin \beta$$

$$K_2 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 v, \quad \text{kde} \quad v = r \operatorname{cotg} \beta; \quad \text{bude tedy}$$

$$K_2 = \tfrac{1}{3}\pi r^3 \,.\, \operatorname{cotg} \beta = \tfrac{1}{3}\pi \lambda^3 m^3 \sin^3 \beta \operatorname{cotg} \beta = \tfrac{1}{6}\pi \lambda^3 m^3 \sin \beta \sin 2\beta$$

a proto

$$K_1 = \tfrac{1}{6}\pi\lambda^3 m^3 \sin\beta \sin 2\beta - \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}\right]^3}$$

$$K_1 = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\lambda^3 - \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}\right]^3}\right].$$

Úloha: Jaké podmínky musí býti splněny, aby elliptickým řezem byl daný kužel půlen?

$K = \frac{1}{2} K_2$ t. j.

$$\tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin\beta \sin 2\beta \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}\right]^3} = \tfrac{1}{12}\pi\lambda^3 m^3 \sin\beta \sin 2\beta;$$

$$2\sqrt{\left[\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}\right]^3} = \lambda^3; \quad \text{tedy} \quad \lambda = \sqrt[3]{2}\sqrt{\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}}.$$

Je-li $\psi = R - \beta$, je rovina řezu kolma k povrchové přímce a

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\left[\frac{\sin(R-\beta+\beta)}{\sin(R-\beta-\beta)}\right]^3},$$

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\frac{1}{\cos^3 2\beta}},$$

čili

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin\beta \operatorname{tg} 2\beta \sqrt{\frac{1}{\cos 2\beta}}.$$

Kdyby pro tento případ, kdy $\psi = R - \beta$ bylo $\beta = 45^0$, tedy ψ bude také 45^0 a rovina řezu bude rovnoběžná s povrchovou přímkou a tedy řez parabollický, a

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 45^0 \operatorname{tg} R \,.\, \sqrt{\frac{1}{\cos R}},$$

ale tg $R = \infty$, tedy krychlový obsah stane se nekonečně velkým pro kužel *neomezený* základnou, kolmou k ose jeho.

Kdyby $\psi = 2\beta$ je

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{\left[\frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}\right]^3},$$

po úpravě bude

$$K = \tfrac{1}{3}\pi m^3 \cos\beta \sin 3\beta \sqrt{\sin\beta \sin 3\beta}.$$

Pro tento případ jsou rozměry poloos ellipsy následující:

$$a = \frac{m \sin 2\beta}{2 \sin \beta} = \frac{2m \sin \beta \cos \beta}{2 \sin \beta} = m \cos \beta.$$

Dle rovnice (5) jest

$$b = \frac{m \cos \beta}{\cos \beta} \sqrt{\sin 3\beta \sin \beta} = m \sqrt{\sin 3\beta \sin \beta}.$$

Tedy poloosa hlavní rovná se výšce úplného kužele, jehož podstava jde koncovým bodem úseku m.

Úloha: Vésti rovinu řezu tak, aby hlavní osa řezu ($2a$) rovnala se nejkratšímu úseku, který tvoří rovina řezu na povrchové přímce.

Musí tedy dle rovnice (1)

$$2a = \frac{2m \sin 2\beta}{2 \sin (\psi - \beta)} \quad \text{a} \quad 2a = m$$

tedy

$$\sin (\psi - \beta) = \sin 2\beta \quad \text{t. j.} \quad \psi - \beta = 2\beta$$

čili

$$\psi = 3\beta$$

potom dle rovnice (5)

$$b = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\sin 4\beta \,.\, \sin 2\beta} = \frac{m}{2 \cos \beta} \sqrt{2 \sin 2\beta \cos 2\beta \,.\, \sin 2\beta}$$

$$b = \frac{m \,.\, \sin 2\beta}{2 \cos \beta} \sqrt{2 \cos 2\beta} = \frac{m\, 2 \sin \beta \cos \beta}{2 \cos \beta} \sqrt{2 \cos 2\beta}$$

tedy

$$b = m \sin \beta \sqrt{2 \cos 2\beta}.$$

Krychlový obsah seříznutého kužele v parabole.

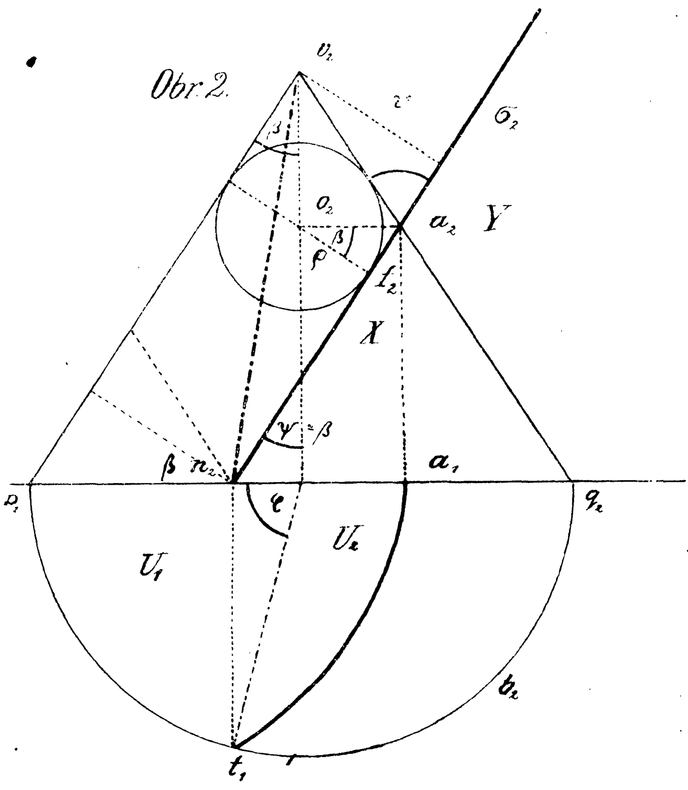
Je-li $\psi = \beta$ je řez parabolický. (Obr. 2.) Jedná se opět o vypočtení velikosti řezu. Z analytické geometrie je známo, že úseč parabolická $z = \frac{4}{3} a_2 n_2 \,.\, n_2 t_1$. Pokládáme-li průsečníci roviny osového řezu s rovinou σ za osu X a tečnu vrcholovou v bodě a za osu Y pravoúhlé soustavy souřadné, je potom

$\overline{a_2n_2} = x_1$ a $\overline{n_2t_1} = y_1$, kde x_1y_1 jsou souřadnice určitého bodu paraboly.

$$\overline{a_2n_2} = \frac{\overline{n_2q_2}}{2} \cdot \frac{1}{\sin\beta} \quad \text{z } \Delta\, n_2a_2q_2$$

$$\overline{p_2n_2} = 2m \sin\beta;$$

$$\overline{n_2q_2} = 2r - 2m\sin\beta = 2\,(r - m\sin\beta)$$



a tedy

$$\overline{a_2n_2} = \frac{r - m\sin\beta}{\sin\beta}$$

$$\overline{n_2t_1}^2 = \overline{p_2n_2} \,.\, \overline{n_2q_2} = 2m\sin\beta \,.\, 2\,(r - m\sin\beta)$$

$$\overline{n_2t_1} = 2\sqrt{m\sin\beta\,(r - m\sin\beta)}$$

a tedy

$$Z = \frac{4}{3}\frac{r - m\sin\beta}{\sin\beta} \cdot 2\sqrt{m\sin\beta(r - m\sin\beta)}$$

$$Z = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{m(r - m\sin\beta)^3}{\sin\beta}} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{m(\lambda m\sin\beta - m\sin\beta)^3}{\sin\beta}}$$

$$= \frac{8}{3}m^2\sin\beta\sqrt{(\lambda - 1)^3} \qquad (7)$$

kde

$$r = \lambda r_1 = \lambda m\sin\beta.$$

Krychlový obsah části kužele odříznutého řezem parabolickým musíme složiti z kužele o základně rovné úseči kruhové U_1 a vrcholu daného kužele a kužele (obecně řečeno) o základně rovné parabolickému řezu Z a vrcholu v.

$$K = \frac{1}{3}Z \cdot v + \frac{1}{3}U_1 \cdot \omega$$

kde ω je výška celého kužele.

$$K = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{\frac{m(r - m\sin\beta)^3}{\sin\beta}} \cdot m\sin 2\beta$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{360}\pi r^2 \cdot 2\varphi^0 - \frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 2\varphi\right) r\cotg\beta$$

při čemž úhel φ je dán podmínkou, že

$$\sin\varphi = \frac{\overline{n_2 t_1}}{r}$$

pro

$$r = \lambda m\sin\beta$$

bude

$$K = \frac{8}{9}m^3\sin\beta\sin 2\beta\sqrt{(\lambda - 1)^3}$$
$$+ \frac{1}{3}\lambda^3 m^3\sin^3\beta \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\left[\frac{1}{180}\pi\,\varphi^0 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$$

a tedy po jednoduché úpravě

$$K = \frac{1}{3}m^3\sin\beta\sin 2\beta\left\{\frac{8}{3}\sqrt{(\lambda - 1)^3} + \frac{1}{2}\lambda^3\left[\frac{1}{180}\pi\,\varphi^0 - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\right\} \qquad (8)$$

Příklad:

Rovná-li se $\beta = 45^0$ je pro řez parabolický $\psi = 45^0$. Položme rovinu řezu průměrem základny t. j. $\varphi = 90^0$, potom

$$K = \frac{1}{3}m^3\sin 45^0\sin R\left\{\frac{8}{3}\sqrt{(\lambda - 1)^3} + \frac{1}{2}\lambda^3\left[\frac{1}{180}\pi \cdot 90^0 - \frac{1}{2}\sin 2R\right]\right\}$$
$$K = \frac{1}{3}m^3\frac{1}{2}\sqrt{2}\left\{\frac{8}{3}\sqrt{(\lambda - 1)^3} + \frac{1}{2}\lambda^3\left[\frac{1}{2}\pi\right]\right\}$$
$$K = \frac{1}{6}m^3\sqrt{2}\left\{\frac{8}{3}\sqrt{(\lambda - 1)^3} + \frac{1}{4}\pi\,\lambda^3\right\}$$

ale λ v tom případě $= 2$ a tedy

$$K = \tfrac{1}{6} m^3 \sqrt{2} \{\tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{4}\pi \,.\, 8\} = \tfrac{1}{6} m^3 \sqrt{2} (\tfrac{8}{3} + 2\pi).$$

Plochu parabolického řezu můžeme opět stanoviti užitím poloměru ϱ, jako pro ellipsu.

V téže soustavě analytické dá se úseč paraboly vyjádřiti též výrazem $U = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12\,p}$ při čemž je třeba položiti $y_2 = -y_1$ t. j. přihlédnouti, že druhá pořadnice je záporná.*)

Parametr dá se snadno určiti. Z $\Delta\, o_2 a_2 f_2$ (obr. 2.) je $\tfrac{1}{2} p = \varrho \operatorname{tg} \beta$, ale $2\varrho = v = m \sin 2\beta$ tedy

$$\varrho = \tfrac{1}{2} m \sin 2\beta$$

a

$$\tfrac{1}{2} p = \tfrac{1}{2} m \sin 2\beta \,.\, \operatorname{tg} \beta = \tfrac{1}{2} m \,.\, 2 \sin \beta \cos \beta \,.\, \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$$

$$\tfrac{1}{2} p = m \sin^2 \beta$$

a tedy

$$p = 2m \sin^2 \beta$$

kterýžto výraz možno také určiti z hodnot známých pro ellipsu.

Je totiž $p = \frac{b^2}{a}$ tedy dle rovnice (5) bude

$$p = \frac{a}{\cos^2 \beta} \sin (\beta + \psi) \sin (\psi - \beta)$$

a dosadíme-li za a (1) bude

$$p = \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{m \sin 2\beta}{2 \sin (\psi - \beta)} \cdot \sin (\beta + \psi) \,.\, \sin (\psi - \beta)$$

$$p = \frac{1}{\cos^2 \beta} \cdot \frac{2m \sin \beta \cos \beta}{2} \,.\, \sin (\beta + \psi)$$

$$p = m \operatorname{tg} \beta \sin (\beta + \psi)$$

a tedy pro $\psi = \beta$ bude

$$p = m \operatorname{tg} \beta \sin 2\beta = m \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \,.\, 2 \sin \beta \cos \beta$$

čili

$$p = 2m \sin^2 \beta$$

výraz shodný s výrazem přímo odvozeným.

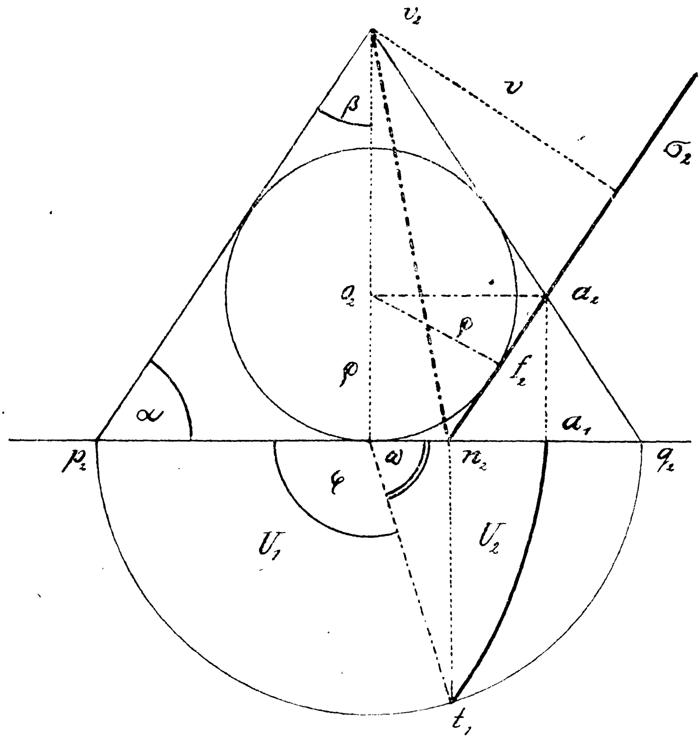
*) Viz J. Vojtěch, Geometrie pro VII. tř. reálek str. 62.

Dle dříve stanoveného je

$$y_2 = -y_1 = \overline{n_2 t_1} = 2\sqrt{m \sin \beta \, (r - m \sin \beta)}$$

a pro

$$r = \lambda \, . \, r_1 = \lambda m \sin \beta$$



Obr. 3.

je

$$y_2 = -y_1 = 2\sqrt{m^2 \sin^2 \beta \, (\lambda - 1)} = 2m \sin \beta \sqrt{\lambda - 1}.$$

Tedy

$$\acute{U} \equiv Z = \frac{[4m \sin \beta \sqrt{(\lambda - 1)}]^3}{12 \, . \, 2m \sin^2 \beta} = \tfrac{8}{3} m^2 \sin \beta \sqrt{(\lambda = 1)^3}$$

tedy výraz shodný s výrazem prvým způsobem odvozeným (7).

Nehledíme-li k omezené části kužele, potom krychlový obsah kužele seříznutého v parabole $= \infty$. To vyplývá ze vzorce pro seříznutou část kužele řezem elliptickým. Bylo tam odvoveno, že

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin \beta \,.\, \sqrt{\left[\frac{\sin(\psi+\beta)}{\sin(\psi-\beta)}\right]^3}.$$

Položíme-li v tomto výraze $\psi = \beta$ bude

$$K = \tfrac{1}{6}\pi m^3 \sin 2\beta \sin \beta \,.\, \sqrt{\left[\frac{\sin 2\beta}{\sin 0}\right]^3}$$

tudíž zlomek pod odmocninou stává se ∞ a tím i celý výraz.

Uvažujme případ, kdy rovina základny kužele dotýká se také vepsané koule. Potom lze zase jeho krychlový obsah určiti jako $\frac{1}{3} P \,.\, \varrho$. (Obr. 3.)

$P = pl + U_1 + U$; kde U_1 je úseč kruhová omezená tětivou $2 \,.\, \overline{n_2 t_1}$ a U je úseč parabolická tvořená rovinou řezu a rovinou základny

$$pl = \frac{U_1 + U_2}{\sin \beta}$$

ale

$$\frac{U_2}{\sin \beta} = U$$

tedy

$$P = \frac{U_1}{\sin \beta} + U + U_1 + U = U_1\left(\frac{1}{\sin \beta} + 1\right) + 2U$$

$$P = \left[\frac{\pi r^2}{360}(2\varphi^0) + \tfrac{1}{2} r^2 \sin(4R - 2\varphi)\right]\left(\frac{1}{\sin \beta} + 1\right) + 2U$$

$$P = \left(\frac{\pi r^2}{180}\varphi^0 - \tfrac{1}{2} r^2 \sin 2\varphi\right)\frac{1 + \sin \beta}{\sin \beta} + 2 \,.\, \tfrac{8}{3}\sqrt{\frac{m(r - m\sin\beta)^3}{\sin \beta}}$$

$$K = \tfrac{1}{3}\left[r^2\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\frac{1 + \sin\beta}{\sin\beta}\right.$$

$$\left. + \tfrac{16}{3}\sqrt{\frac{m(r - m\sin\beta)^3}{\sin\beta}}\right] \,.\, \tfrac{1}{2} m \sin 2\beta$$

$$K = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2} r^2 m \sin 2\beta\left(\frac{\pi\varphi^0}{180} - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\frac{1 + \sin\beta}{\sin\beta}\right.$$

$$\left. + \tfrac{8}{3} m \sin 2\beta\sqrt{\frac{m(r - m\sin\beta)^3}{\sin\beta}}\right].$$

Položíme-li opět $r = \lambda r_1 = \lambda m \sin\beta$ bude

$$K = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}\lambda^2 m^3 \sin^2\beta \sin 2\beta \left(\frac{\pi\varphi^0}{180} - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\frac{1+\sin\beta}{\sin\beta}\right.$$
$$\left. + \tfrac{8}{3} m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{(\lambda - 1)^3}\right]$$

$$K = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}\lambda^2 m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left(\tfrac{1}{180}\pi\varphi^0 - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)(1+\sin\beta)\right.$$
$$\left. + \tfrac{8}{3} m^3 \sin 2\beta \sin\beta \sqrt{(\lambda - 1)^3}\right]$$

$$K = \tfrac{1}{3} m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\tfrac{1}{2}\lambda^2 \left(\tfrac{1}{180}\pi\varphi^0 - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)(1+\sin\beta)\right.$$
$$\left. + \tfrac{8}{3}\sqrt{(\lambda - 1)^3}\right].$$

Výraz tento shoduje se s výrazem prvně odvozeným (8) až na to, že $\frac{1}{2}\lambda^2 (1 + \sin\beta) = \frac{1}{2}\lambda^3$ t. j. musíme ukázati, že pro uvažovaný případ je $\lambda = (1 + \sin\beta)$.

$$\lambda = \frac{r}{r_1}$$

pro uvažovaný zvláštní případ platí

$$r = (m + a_2 q_2) \sin\beta,$$

je-li

$$m = \overline{v_2 a_2}$$

$$\overline{a_2 q_2} = \frac{\overline{a_2 a_1}}{\cos\beta} = \frac{\varrho}{\cos\beta}$$

tedy

$$r = \left(m + \frac{\varrho}{\cos\beta}\right)\sin\beta$$

ale

$$\varrho = \tfrac{1}{2} m \sin 2\beta$$

tedy

$$r = \left(m + \frac{m \sin 2\beta}{2\cos\beta}\right)\sin\beta$$

čili

$$r = m(1 + \sin\beta)\sin\beta$$
$$r_1 = \overline{a_2 o_2} = m \sin\beta$$

tedy

$$\lambda = \frac{m(1+\sin\beta)\sin\beta}{m\sin\beta} = 1 + \sin\beta$$

jak bylo dokázati.

Potom je

$$K = \tfrac{1}{3} m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\tfrac{1}{2}(1+\sin\beta)^3 \left(\tfrac{1}{180}\pi\varphi^0 - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right) + \tfrac{8}{3}\sqrt{(1+\sin\beta-1)^3}\right]$$

$$K = \tfrac{1}{3} m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\tfrac{1}{4}(1+\sin\beta)^3 \left(\tfrac{1}{90}\pi\varphi^0 - \sin 2\varphi\right) + \tfrac{8}{3}\sqrt{\sin^3\beta}\right]$$

ale

$$1 + \sin\beta = \sin R + \sin\beta = 2\sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta)\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)$$

ale

$$\cos(45^0 - \tfrac{1}{2}\beta) = \sin[R - (45^0 - \tfrac{1}{2}\beta)] = \sin(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta)$$

z toho

$$1 + \sin\beta = 2\sin^2(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta)$$

tedy

$$K = \tfrac{1}{3} m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\tfrac{1}{4} 8 \sin^6(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta)\left(\tfrac{1}{90}\pi\varphi^0 - \sin 2\varphi\right) + \tfrac{8}{3}\sqrt{\sin^3\beta}\right]$$

a

$$K = \tfrac{2}{3} m^3 \sin\beta \sin 2\beta \left[\sin^6(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta)\left(\tfrac{1}{90}\pi\varphi^0 - \sin 2\varphi\right) + \tfrac{4}{3}\sin\beta\sqrt{\sin\beta}\right].$$

Kužel seříznutý v hyperbole.

Přepokládáme-li, že $\beta > \psi$ je řez hyperbolický (obr. 4.). Z $\triangle\, v_2 a_2 b_2$ plyne $\overline{a_2 b_2} : m = \sin 2\beta : \sin(\beta - \psi)$ tedy

$$a = \frac{m \sin 2\beta}{\sin(\beta - \psi)}.$$

Pro hyperbolu platí $b^2 = e^2 - a^2$ z $\triangle\, a_2 f_2 o_2$ plyne

$$e - a = \varrho \operatorname{cotg}(R - \tfrac{1}{2}(\beta + \psi))$$

z $\triangle\, b_2 f_2 o_2$ plyne

$$e + a = \varrho \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(\beta - \psi)$$

tedy

$$\varrho = (e - a)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\psi + \beta)$$
$$\varrho = (e + a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta - \psi)$$

z toho

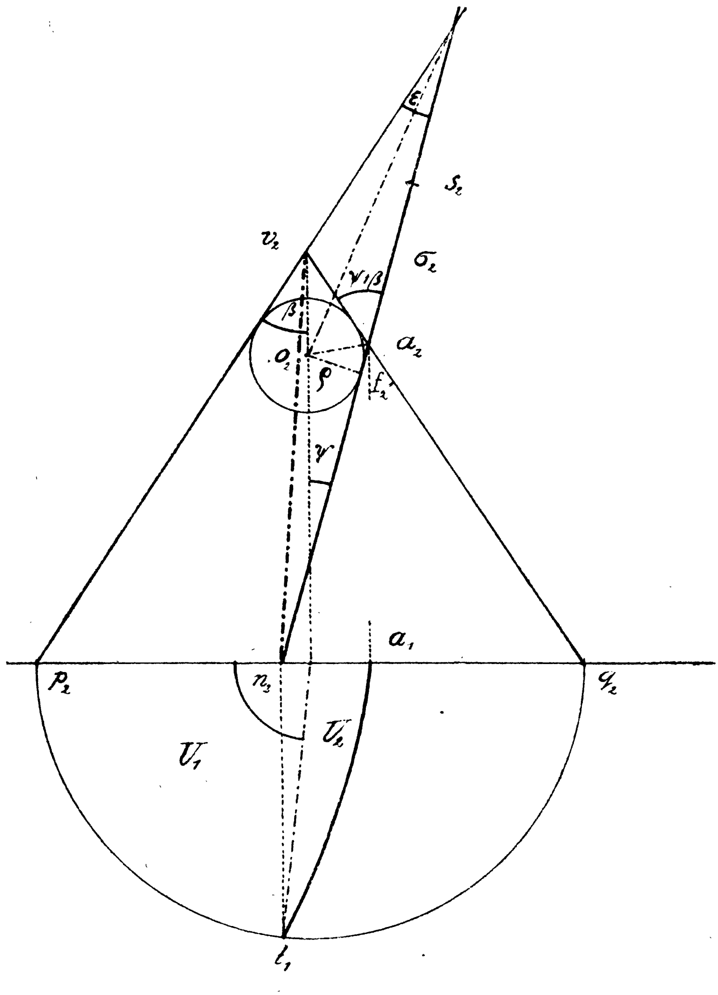
$$(e - a)\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\psi + \beta) = (e + a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\beta - \psi)$$

a obdobnou úpravou jako pro řez elliptický dostaneme

$$e \cdot \cos\beta = a \cos\psi$$

a z toho

$$e = a \frac{\cos \psi}{\cos \beta}$$



Obr. 4.

a tedy

$$b = \sqrt{a^2 \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \beta} - a^2} = \frac{a}{\cos \beta} \sqrt{\cos \quad \psi - \cos^2 \beta}$$

a konečně nahradíme-li opět polovičními součty a rozdíly bude

$$b = \frac{a}{\cos\beta}\sqrt{\sin(\psi+\beta)\sin(\beta-\psi)}.$$

Pro hyperbolu není možno tak jednoduchými výpočty vyčísliti plochu úseče hyperbolické a zabývá se touto úlohou počet integrální a docházíme jím k výsledku, že

$$\acute{U} = xy - abl\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),$$

kde $x = \overline{s_2 n_2}$; $y = \overline{n_2 t_1}$; hodnoty tyto vyčíslíme obdobně jako pro případy dřívější.

$$\overline{s_2 n_2} = \overline{n_2 a_2} + a; \quad \overline{n_2 t_1}^2 = \overline{q_2 n_2} \,.\, \overline{n_2 p_2}$$

z $\triangle p_2 n_2 b_2$ plyne $\overline{p_2 n_2} : \overline{n_2 a_2} + 2a = \sin(\beta - \psi) : \cos\beta$

$$\overline{p_2 n_2} = \frac{(\overline{n_2 a_2} + 2a)\sin(\beta-\psi)}{\cos\beta}$$

z $\triangle n_2 q_2 a_2$ plyne $\overline{q_2 n_2} : \overline{n_2 a_2} = \sin(\beta+\psi) : \cos\beta$

$$\overline{q_2 n_2} = \frac{\overline{n_2 a_2} \,.\, \sin(\beta+\psi)}{\cos\beta}.$$

a tedy

$$\overline{n_2 t_1}^2 = \frac{\overline{n_2 a_2}\sin(\beta+\psi)}{\cos\beta} \cdot \frac{(\overline{n_2 a_2} + 2a)\sin(\beta-\psi)}{\cos\beta}$$

$$\overline{n_2 t_1} = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt{(\overline{n_2 a_2} + 2a) \,.\, \overline{n_2 a_2}\sin(\beta+\psi)\sin(\beta-\psi)}$$

Z $\triangle n_2 q_2 a_2$ plyne $\overline{n_2 a_2} : (s - m) = \cos\beta : \cos\psi$

$$\overline{n_2 a_2} = \frac{(s-m)\cos\beta}{\cos\psi} \quad \text{a} \quad \overline{s_2 n_2} = \frac{(s-m)\cos\beta}{\cos\psi} + a.$$

Krychlový obsah obdržíme zase obdobně jako u řezu parabolického složením z kužele o základně řezu a výšce

$$v = m\sin(\beta+\psi)$$

kde $m = \overline{v_2 a_2}$ a krychlového obsahu kužele jehož základnou je úseč kruhová U_1 a výškou výška celého kužele.

Čtenář sám dovede si dosaditi hodnoty potřebné dle příkladu předchozího. Rovněž lze výsledek touto cestou odvozený zkontrolovati výsledkem získaným pro kužel odříznutý, jehož rovina základny dotýká se vepsané koule, počítáme-li tento obsah opět jako $\frac{1}{3}$ součinu povrchu a poloměru koule vepsané.

Některé důsledky: Pro $m = o$ je $a = o$, $b = o$ tedy $Z = \acute{U} = x \,.\, y = \overline{s_2 n_2} \,.\, \overline{n_2 t_1}$ tedy

$$\acute{U} = \frac{s \cos\beta}{\cos\psi} \cdot \frac{1}{\cos\beta} \sqrt{\left(\frac{s \cos\beta}{\cos\psi}\right)^2 \sin(\beta + \psi) \sin(\beta - \psi)}$$

$$= \frac{s^2 \cos\beta}{\cos^2\psi} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\beta - \psi)}$$

t. j. plocha $\triangle$ vzniklého řezem roviny vrcholové, při čemž úhel při vrcholu řezu ω je dán podmínkou, že

$$\sin\omega = \frac{\cos\beta}{2\cos^2\psi} \sqrt{\sin(\beta + \psi) \sin(\beta - \psi)}.$$

Položíme-li pro $m = o$ ještě podmínku $\psi = \beta$ bude

$$Z = \acute{U} = 0$$

t. j. rovina řezu dotýká se povrchové přímky.

Pro $\psi = o$ a $m = o$ bude $\overline{s_2 n_2} = s \cos\beta =$ výšce úplného kužele a

$$\overline{n_2 t_1} = \frac{1}{\cos\beta} \sqrt{\overline{n_2 a_2}^2 \sin\beta \,.\, \sin\beta}$$

$$\overline{n_2 a_2}^2 = s^2 \cos^2\beta$$

tedy

$$\overline{n_2 t_1} = \frac{1}{\cos\beta} \sqrt{s^2 \cos^2\beta \sin^2\beta} = s \,.\, \sin\beta$$

ale $s \,.\, \sin\beta = r$ jak musí býti, neboť je to řez rovinou vrcholovou kolmý k základně.

Roentgenologická stanice.

Dr. Viktor Teissler.

Koncem roku 1895 uveřejněna byla první zpráva sdělující s veřejností objev würzburského univ. professora W. C. Roentgena. Po jeho prvním pojednání „O novém druhu paprsků“ uveřejněném v prosinci r. 1895 následovala v lednu 1896 přednáška, provázená demonstracemi ve fysikálně-lékařské společnosti ve Würzburku. Od prvé chvíle ujala se objevu nejen fysika, ale