Matyáš Lerch

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 121–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120920

Důkaz. Má-li křivka K_{III} čtyři reálné body a, b, c, d, jsou diagonálné body o, p, q úplného čtyřúhelníka $abcd$ vrcholy jediného reálného polárného trojúhelníka křivky K_{III}. Kollineací lze transformovati $\triangle opq$ ve $\triangle o_1 p_1 q_1$ tak, by úhel $p_1 o_1 q_1$ byl pravý a strana $\overline{p_1 q_1}$ by připadla do nekonečna; zároveň křivka K_{III} transformuje se v křivku K_{II}, jejíž osy jsou $\overline{o_1 p_1} \equiv X_1$, $\overline{o_1 q_1} \equiv Y_1$, $X_1 \perp Y_1$; reálné body a_1, b_1, c_1, d_1 jsou podvojně souměrny dle os Křivka K_{II} musí míti dle věty hořejší (odst. II.) také čtyři reálné tečny T_1, U_1, V_1, W_1, jež zpětnou transformací dají čtyři *reálné* tečny T, U, V, W křivky K_{III}. Má-li imaginárná plocha 2. stupně druhu třetího φ_{III} reálnou površku 4. řádu L^4, lze touto proložiti čtyři kužele 2. stupně[1]), jichž vrcholy o, p, q, r jsou vrcholy jediného polárného tetraedru plochy φ_{III}. Kollineací lze transformovati tetraedr $opqr$ v jiný $o_1 p_1 q_1 r_1$ tak, aby všecky jeho úhly při vrcholu o_1 byly pravé, a stěna $p_1 q_1 r_1$ by připadla do nekonečna; zároveň plocha φ_{III} transformuje se v plochu druhu druhého φ_{II}, jejíž osy jsou $\overline{o_1 p_1} \equiv X_1$, $\overline{o_1 q_1} \equiv Y_1$, $o_1 r_1 \equiv Z_1$; křivka L^4_1 je souměrna dle hlavních rovin plochy φ_{II}. Plocha φ_{II} musí míti dle věty hořejší (odst. III.) také reálnou tečnou plochu rozvinutelnou λ_1^{IV}, jež zpětnou transformací dá také reálnou plochu rozvinutelnou λ^{IV}, tečnou ku ploše φ_{III}.

Poznámky o soustavě paraboloidů procházejících dvěma danýma mimoběžkama a o útvarech s nimi souvislých.

Podává **M. Lerch** v Brně.

(Pokračování.)

5.

Uvažujme řadu paraboloidů $\lambda =$ konst., jichž vrcholové přímky s, s_1 svírají úhel stálý; vrcholy jejich V probíhají na konoidu (V) určitou čáru A. Přímky s_1 tvoří určitou plochu sborcenou, její strikční čára má za půdorys obalovou čáru přímek s'_1, jichž rovnici lze psáti

$$x \sin \omega - y \cos \omega = \lambda a (\cos 2\alpha - \cos 2\omega);$$

---

[1]) Jarolímek, Geometrie polohy II, str. 64. a 65.

bod čáry obalové náleží přímce (derivuje se podle ω)

$$x \cos \omega + y \sin \omega = 2 \lambda a \sin 2 \omega;$$

tato však splývá s půdorysem osy o; obě přímky se protnou v bodě V', poněvadž průsečíkem přímek o, s_1 je právě bod V, vrchol paraboloidu. Odtud vychází:

„*Přímky vrcholové s_1 paraboloidů, procházejících pevnýma přímkama δ, δ_1, které jsou rovnoběžny se základní rovinou Oxy a svírají stálý úhel s druhou vrcholovou přímkou s, tvoří sborcenou plochu stupně 6.*

$$a(x^2 + y^2) - 2xyz = (x^2 - y^2)\sqrt{a^2 - z^2} + 2a\lambda^2 (a \cos 2\alpha - \sqrt{a^2 - z^2})^2;$$

její strikční čára je křivka Λ na konoidu (V), souhrn vrcholů uvažovaných paraboloidů.“

„*Tečna půdorysu Λ' čáry Λ splývá s půdorysem vrcholových přímek.*“

Půdorys osy o je normálou křivky Λ' a její evoluta je tedy obalová čára přímek o'

$$x \cos \omega + y \sin \omega = 2 a\lambda \sin 2 \omega;$$

střed křivosti čáry Λ' tedy leží na přímce

$$- x \sin \omega + y \cos \omega = 4 a\lambda \cos 2 \omega;$$

řešením obou rovnic vypočteme

$$x + iy = \lambda a i (3 + e^{4i\omega}) e^{-i\omega}, \qquad (12)$$

jako parametrické vyjádření evoluty čáry Λ'. Evoluta uvažovaná jest patrně astroida, již vytvoří hybný kruh poloměru $a\lambda$ při jeho kotálení po vnitřní straně kruhu poloměru $4a\lambda$, jehož střed leží v bodě O.

Táž astroida jest obalovou čarou přímek stálé délky $4a\lambda$, jejíž koncové body se šinou po přímkách Ox, Oy.*)

„*Čára Λ má za půdorys křivku rovnoběžnou s určitou astroidou, jejíž vrcholy leží na přímkách Ox, Oy, a sice u vzdálenosti $a\lambda$ od bodu O.*“

---

*) Jednoduchá konstrukce středu křivosti odtud plynoucí je známá kinematická konstrukce bodu na astroidě.

Sama však čára A' astroidou obecně není. Z rovnic (9) vypočteme při stálém λ

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{d\omega} &= a\lambda \cos\omega(\cos 2\alpha + 3\cos 2\omega),\\ \frac{dy}{d\omega} &= a\lambda \sin\omega(\cos 2\alpha + 3\cos 2\omega),\\ \frac{dz}{d\omega} &= 2a\cos 2\omega.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Pro prvek oblouku $d\sigma$ na půdoryse A' vychází odtud

$$d\sigma = a\lambda(\cos 2\alpha + 3\cos 2\omega)\, d\omega,$$

a oblouk je vyjádřen ve tvaru

$$\sigma = a\lambda(\omega \cos 2\alpha + \tfrac{3}{2}\sin 2\omega);$$

přítomnost lineárného členu s ω vysvětluje, že čára A' není kotálnicí. Pouze ve zvláštním případě $\alpha = 45^0$ vypadne tento člen a čára jest astroidou, jež se vytvoří šinutím konců délky $2a\lambda$ po přímkách $y = \pm x$.

V tomto zvláštním případě $\alpha = 45^0$ jest

$$\frac{d\sigma}{dz} = \tfrac{3}{2}\lambda$$

veličina stálá, čára A protíná přímky promítajícího válce pod stálým úhlem γ, a sice

$$\operatorname{tg}\gamma = \tfrac{3}{2}\lambda.$$

„*V případě, kdy základní přímky δ, δ_1 jsou na sobě kolmy* ($\alpha = 45^0$), *je čára A šroubovicí na válci astroidy.*“

Astroida (12) je zároveň půdorys strikční čáry na ploše tvořené osami paraboloidů $o(\lambda = \text{konst.})$. Plocha ta má rovnici

$$[2xyz + a(x^2 + y^2 - 8\lambda^2 z^2)]^2 + (z^2 - a^2)(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Stopa paraboloidu (ω, λ) na rovině střední (základní) $z = 0$ má rovnici

$$x \operatorname{tg}\alpha \sin\omega + y \operatorname{cotg}\alpha \cos\omega = \lambda c, \qquad (14)$$

a je tedy tečnou ellipsy (v případě $\lambda = \text{konst.}$)

$$x = \lambda c \operatorname{cotg}\alpha \sin\omega, \quad y = \lambda c \operatorname{tg}\alpha \cos\omega; \qquad (14^a)$$

ve zvláštním případě $\alpha = 45^0$ tedy stopy paraboloidů $\lambda =$ const. obalují kruh poloměru λc.

Tato ellipsa (14[a]) je stopou sborcené plochy přímek s, jak to plyne z (11) pro $z = 0$. Plocha ta sestává z přímek, jež protínají přímky δ, δ_1 a svírají se základní rovinou stálý úhel. Je stupně 4. a má rovnici

$$(xz - 2ay\cos^2\alpha)^2 + (yz - 2ax\sin^2\alpha)^2 = \lambda^2(z^2 - c^2)^2; \quad (15)$$

její obrys půdorysný je patrně čára Λ, kdežto pro obrys v nárysu nám druhá z rovnic (11) dává

$$z = 2a\cos^2\alpha \operatorname{cotg}\omega,$$

takže nárysný obrys plochy (s) pro $\lambda =$ konst. jest hyperbola

$$\left(\frac{x}{2\lambda a\cos^2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{z}{2a\cos^2\alpha}\right)^2 = 1;$$

mimo to leží dotyková čára s opsaným tímto válcem na paraboloidu

$$xy = 2\lambda^2 az.$$

Řezy $z =$ konst. této plochy (s) jsou ellipsy mající své středy na Oz; vrcholy jejich naplňují racionální čáru stupně 6., jejíž parametrické vyjádření jest*)

$$\left.\begin{aligned} x &= a\lambda\frac{\cos 2\varphi + \cos 2\alpha}{\cos 2\varphi}\cos\varphi, \\ y &= a\lambda\frac{\cos 2\varphi + \cos 2\alpha}{\cos 2\varphi}\sin\varphi, \\ z &= a\cos 2\alpha \operatorname{tg} 2\varphi; \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

rovnice půdorysu

$$(x^2 - y^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2\lambda^2(x^2\cos^2\alpha - y^2\sin^2\alpha)^2.$$

Úběžná přímka roviny základní ($z = 0$) je dvojnou čarou této plochy (s), rovněž přímky δ, δ_1. Roviny vedené jednou či druhou z těchto posledních přímek protínají plochu ve dvojici přímek a sice tak, že přímky ležící na rovině obsahující přímku δ protínají se v bodě přímky δ_1.

---

*) Předpokládá se $\alpha \gtrless 45^0$. Ve vyloučeném případě naplňují vrcholy čtyři přímky v rovinách $y = \pm x$.

Vyšetřme ještě průseč plochy (s) (15) s konoidem Plückerovým; jeho body mají parametrické vyjádření

$$(a) \qquad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = a \sin 2\varphi;$$

vložíme-li tyto hodnoty do rovnice (15), obdržíme

$$r = -2\lambda a (1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha)$$

čili

$$(a^*) \qquad r = \lambda a (\cos 2\varphi + \cos 2\alpha) = 2\lambda a \cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)$$

jakožto polární rovnicí pro průmět průseče, který je tedy konchoidou růžice. Čáru prostorovou znamenejme $\mathfrak{L}$, její vyjádření dávají rovnice (a) (a^*). Hodnota $\cos(\varphi + \alpha) = 0$ poskytne bod $(0, 0, c)$, který je bod dvojný naší čáry, podobně jako bod $(0, 0, -c)$ pocházející od hodnoty $\cos(\varphi - \alpha) = 0$.

Uvažujme kužel, kterým se čára $\mathfrak{L}$ promítá z bodu $(0, 0, c)$; hodnota plynoucí z rovnice (a^*)

$$\frac{r}{z - c} = \lambda \operatorname{cotg}(\varphi - \alpha)$$

ukazuje, že strana kužele obsahující bod φ na čáře $\mathfrak{L}$ má stopu na rovině $z = 0$ určenou úhlem φ a průvodičem

$$(b) \qquad r = -c\lambda \operatorname{cotg}(\varphi - \alpha);$$

tato rovnice jest polární rovnicí centrálního průmětu čáry $\mathfrak{L}$ z bodu $(0, 0, c)$. Naproti tomu je průmět této čáry ze středu $(0, 0, -c)$ dán rovnicí

$$(b') \qquad r = c\lambda \operatorname{cotg}(\varphi + \alpha).$$

„*Ze středů* $(0, 0, \pm c)$ *se do centrální roviny promítá čára* $\mathfrak{L}$ *ve dvě kappa.*“

Uvažujme ještě válec směru δ, který obsahuje čáru $\mathfrak{L}$; jeho povrchová přímka φ má rovnice

$$(c) \qquad \begin{aligned} z - c &= 2a \cos(\varphi + \alpha) \sin(\varphi - \alpha), \\ y \cos \alpha - x \sin \alpha &= r \sin(\varphi - \alpha) = \\ 2\lambda a \cos(\varphi + \alpha) &\cos(\varphi - \alpha) \sin(\varphi - \alpha), \end{aligned}$$

z nichž plyne

$$(c') \qquad \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{z - c} = \lambda \cos(\varphi - \alpha).$$

Eliminací φ z rovnic (c) (c') plyne rovnice válce, která obecně je stupně 6. Ve zvláštním případě $\alpha = 45^0$ však poslední rovnice znějí

$$z + a = 2a\cos^2(\varphi - \alpha), \quad \frac{y - x}{z - a} = \lambda\sqrt{2}\cos(\varphi - \alpha),$$

a rovnice válce směru δ obsahujícího čáru $\mathfrak{K}$ zní

$$a(x - y)^2 = \lambda^2(z + a)(z - a)^2;$$

druhý válec vedený touto čarou ve směru δ_1 je pak

$$-a(x + y)^2 = \lambda^2(z - a)(z + a)^2.$$

Křivka $\mathfrak{K}$ jeví se tak jako pronik dvou kubických válců majících v přímkách δ, δ_1 dvojné hrany; mimo to leží čára na rotačním ellipsoidu

$$\frac{x^2 + y^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

6.

Uvažujme průseč konoidu vrcholů (V) s libovolným paraboloidem (β, μ) naší soustavy (2*); do průseče se čítají přímky δ, δ_1 každá dvakráte a úběžná přímka roviny základní třikráte, takže zbývá jako zajímavá část této průseče čára Γ stupně $10 - 7 = 3$.

Rovnici paraboloidu (β, μ) lze psáti

$$(a) \qquad \begin{aligned} \mu(z^2 - c^2) &= z(x\cos\beta + y\sin\beta) \\ &\quad - 2a(y\cos^2\alpha\cos\beta + x\sin^2\alpha\sin\beta); \end{aligned}$$

vložíme-li sem hodnoty (9), obdržíme pro bod na průsečnici vztah mezi parametry λ, ω na konoidu:

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{\lambda}\left(\sin^2 2\omega - \sin^2 2\alpha\right) \\ &= 2\sin 2\omega\,[\sin\omega\cos\beta(\cos^2\omega + \cos^2\alpha) \\ &\qquad + \cos\omega\sin\beta(\sin^2\omega + \sin^2\alpha)] \\ &- 4[\cos^2\alpha\cos\beta\cos\omega(\sin^2\omega + \sin^2\alpha) \\ &\qquad + \sin^2\alpha\sin\beta\sin\omega(\cos^2\omega + \cos^2\alpha)]; \end{aligned}$$

pravá strana se po redukci upraví na

$$(\sin^2 2\omega - \sin^2 2\alpha)\cos(\omega - \beta),$$

a tak bude rovnice splněna jednak hodnotami

$$\sin 2\omega = \pm \sin 2\alpha$$

při libovolném λ, což dává přímky základní δ a δ_1, a jednak hodnotami vázanými vztahem

$$\lambda = \frac{\mu}{\cos(\omega - \beta)}. \tag{17}$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnice (9), vychází parametrické vyjádření křivky Γ

$$x = \frac{2a\mu \sin\omega(\cos^2\omega + \cos^2\alpha)}{\cos(\omega - \beta)} = g\frac{t(1 + \cos^2\alpha + t^2\cos^2\alpha)}{(1 + t^2)(1 + t \operatorname{tg}\beta)},$$

$$y = \frac{2a\mu \cos\omega(\sin^2\omega + \sin^2\alpha)}{\cos(\omega - \beta)} = g\frac{\sin^2\alpha + (1 + \sin^2\alpha)t^2}{(1 + t^2)(1 + t \operatorname{tg}\beta)},$$

$$z = a \sin 2\omega = 2a\frac{t}{1 + t^2}, \tag{17*}$$

kde položeno

$$t = \operatorname{tg}\omega, \quad g = 2a\mu \sec\beta.$$

Rovnice ty skutečně definují prostorovou čáru stupně třetího, poněvadž by rovinná čára jako řez s paraboloidem byla kuželosečkou, a plocha (V) kuželoseček neobsahuje, ana by musila býti stupně nanejvýš 4.

Námitka ta odpadá v případě, kdy se paraboloid rozpadá v roviny; to nastane pro

$$\beta = \alpha + \tfrac{1}{2}\pi, \tag{17a}$$

kdy paraboloid se skládá z rovin

$$z + c = 0, \quad y - x \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu}{\cos\alpha}(z - c),$$

dále pro

$$\beta = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha, \tag{17b}$$

kdy paraboloid sestává z rovin

$$z - c = 0, \quad y + x \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu}{\cos\alpha}(z + c).$$

V těchto zvláštních případech (17^a), (17^b) *podává* (17^*) *parametrické vyjádření rovinné čáry stupně 3., v níž seče plochu* (V) *rovina obsahující přímku* δ *neb* δ_1; podmínka parametrická zní tu

$$\lambda = \frac{\mu}{\sin(\omega - \alpha)}, \quad \text{resp. } \lambda = \frac{\mu}{\sin(\omega + \alpha)}.$$

Z rovnic (9) vychází ostatně přímo při hořejším významu litery m

$$\frac{y - mx}{z - c} = \frac{\lambda}{\cos\alpha}\sin(\omega - \alpha), \quad \frac{y + mx}{z + c} = \frac{\lambda}{\cos\alpha}\sin(\omega + \alpha). \tag{17^c}$$

Pro plochu os paraboloidů příslušných k podmínce (17) t. j.

$$x\cos\omega + y\sin\omega = \frac{2a\mu\sin 2\omega}{\cos(\omega - \beta)}, \quad z = a\sin 2\omega \tag{18}$$

nalezneme rovnici

$$(x^2 + y^2)z^2 + 2az(x\sin\beta + y\cos\beta)(x\cos\beta + y\sin\beta - 4\mu z)$$
$$+ 4a^2(x\cos\beta - 2\mu z)(y\sin\beta - 2\mu z) = 0. \tag{18*}$$

Ve zvláštním případě, kdy $\sin\beta \,.\, \cos\beta = 0$, odštěpí se faktor z a rovnice bude stupně 3.; plocha je pak konoid Plückerův tvořený osami, jež sekou určitou přímku; a sice dává (18)

α) pro $\beta = 0$, $x\cos\omega + y\sin\omega = 4a\mu\sin\omega$,

osy sekou přímku $x = 0$, $y = 4a\mu$;

β) pro $\beta = \frac{1}{2}\pi$, $x\cos\omega + y\sin\omega = 4a\mu\cos\omega$

osy sekou přímku $x = 4a\mu$, $y = 0$.

V tomto posledním případě odpadá druhý tvar výrazů (17*), rovnice znějí

$$(\Gamma) \quad x = 2a\mu(\cos^2\omega + \cos^2\alpha), \quad y = 2a\mu\cot\omega(\sin^2\omega + \sin^2\alpha), \quad z = a\sin 2\omega;$$

vzhledem k jednoduchosti výsledků přihlédneme poněkud blíže k této křivce.

Předně nám rovnice

$$x = a\mu(2 + \cos 2\alpha) + a\mu\cos 2\omega, \quad z = a\sin 2\omega$$

ukazují, že nárys Γ' jest ellipsa, jejíž střed a délky i poloha os jsou dány.*) Dále jest

$$x - 4a\mu = -2a\mu\frac{\sin^2\omega + \sin^2\alpha}{\sin\omega}\sin\omega,$$

$$y = 2a\mu\frac{\sin^2\omega + \sin^2\alpha}{\sin\omega}\cos\omega;$$

*) Tato ellipsa přejde v kruh pro $\mu = 1$, kdy tedy osy paraboloidů sekou přímku $x = 4a$, $y = 0$.

zvolíme-li patu $(4\,a\mu,\ 0,\ 0)$ řídící přímky konoidu os za pól soustavy polárních souřadnic r a Θ, má bod půdorysu Γ' čáry Γ souřadnice

$$r = 2\,a\mu\,\frac{\sin^2\omega + \sin^2\alpha}{\sin\omega}, \quad \Theta = \omega + \tfrac{1}{2}\pi,$$

takže polární rovnice půdorysu má tvar

$$(\Gamma')\quad r = -\,2\,a\mu\cos\Theta - \frac{2\,a\mu\sin^2\alpha}{\cos\Theta}.$$

Křivka Γ' se tak jeví jako cissoida kruhu a přímky: $r = r_1 - r_2$,

$$r_1 = -\,2\,a\mu\cos\Theta,\ r_2 = \frac{2\,a\mu\sin^2\alpha}{\cos\Theta}.$$

V pravoúhlých souřadnicích zní rovnice půdorysu

$$(\xi^2 + y^2)\,(\xi + 2\,a\mu\sin^2\alpha) + 2\,a\mu\,\xi^2 = o,$$

kde
$$\xi = x - 4\,a\mu.$$

Rovnice (a) pro uvažovaný paraboloid $\beta = \frac{1}{2}\pi$ zní

$$\mu\,(z^2 - c^2) = yz - 2\,ax\sin^2\alpha,$$

jeho stopa na rovině střední $z = 0$ tedy jest přímka

$$x = 2\,a\mu\cos^2\alpha;$$

těmito údaji jest křivka Γ dostatečně vyznačena, a přístupna rozmanitým konstrukcím.

Dosadíme-li hodnotu

$$\lambda = \frac{\mu}{\sin\omega}$$

do rovnice stopy paraboloidu (14), obdržíme

$$mx\sin\omega + y\,\frac{\cos\omega}{m} = \frac{\mu c}{\sin\omega};$$

Plückerovy souřadnice této přímky

$$u = -\,\frac{m\sin^2\omega}{c\mu}, \quad v = -\,\frac{\sin\omega\cos\omega}{mc\,\mu}$$

jsou kvadratické funkce proměnné $\operatorname{cotg}\omega$; obalová čára těchto stop paraboloidů je parabola, jejíž ohnisko jest

$$y = 0, \quad x = \frac{1 - m^4}{m}\,c\mu = 2\,a\mu\,\frac{\cos 2\,\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

V rovnici (a) jsme dosud předpokládali μ od nully různé. V případě $\mu = 0$, kdy paraboloid je rovnostranný a jeho vrchol leží na přímce řídící Oz, má paraboloid s konoidem (V) společné tři přímky dvojné Oz, δ, δ_1, a přímku trojnásobnou v nekonečnu; i zbývá jako poslední část průseče čára stupně $10 - (6 + 3) = 1$, t. j. přímka, i musí to býti přímka povrchová obyčejná.

Rovnice dává

$$(\sin^2 2\omega - \sin^2 2\alpha)\cos(\omega - \beta) = 0,$$

t. j. *rovnostranný paraboloid*

$$(b) \qquad z = 2a\,\frac{y\cos^2\alpha\cos\beta + x\sin^2\alpha\sin\beta}{x\cos\beta + y\sin\beta}$$

protíná konoid vrcholů (V) *v přímce* $\omega = \beta + \frac{1}{2}\pi$.

Přímky konoidu (V) *lze charakterisovati jako řez roviny* $z = a\sin 2\omega$ *s paraboloidem rovnostranným*

$$z = 2a\,\frac{y\cos^2\alpha\sin\omega - x\sin^2\alpha\cos\omega}{x\sin\omega - y\cos\omega}.$$

Tento jest určen přímkami δ, δ_1 a stopou $z = 0$

$$x\sin^2\alpha\cos\omega - y\cos^2\alpha\sin\omega = 0,$$

aneb lépe řídící rovinou $y = x\operatorname{tg}\omega$, která je rovnoběžna s přímkou ω na základním konoidu Plückerově.

Konstruktivně se tímto výsledkem pouze opakuje stanovení vrcholu V na dané transversále s přímek δ a δ_1, které bylo výše podáno.

Také pohyblivá část průseče rovnostranného paraboloidu (b) s Plückerovým konoidem (5*) sestává z jediné povrchové přímky. Skutečně dosadíme-li do rovnice paraboloidu

$$z(x\cos\beta + y\sin\beta) = 2a(y\cos^2\alpha\cos\beta + x\sin^2\alpha\sin\beta)$$

hodnoty (5) pro souřadnice bodu na konoidu, vypadne h a zbude vztah

$$(\cos^2\alpha - \cos^2\omega)\sin(\omega - \beta) = 0,$$

z něhož vychází, že přímka $\omega = \beta$ na konoidu (5) náleží paraboloidu (b). Tato přímka q ($\omega = \beta$) protíná kolmo veškery přímky s s ní různoběžné [jsou dány rovnicemi (11) při $\omega = \beta + \frac{1}{2}\pi$]; tyto jsou normály dvou rotačních hyperboloidů s osami

δ a δ_1, jež se vespolek dotýkají podél přímky q. Odtud vychází vlastnost známého mechanismu ku převádění pohybu rotačního na osy mimoběžné. Existuje ∞^1 dvojic rotačních hyperboloidů s mimoběžnými osami (δ, δ_1), které se dotýkají podél jistých přímek q; tyto přímky vyplňují Plückerův konoid.

Buď nyní s libovolná příčka $D D_1$ přímek základních δ, δ_1; jest jí určen rovnostranný paraboloid naší soustavy (b) a sice značí β úhel sevřený přímkou Ox a normálou promítající svislé roviny vedené přímkou s; rovina ta je očividně druhá rovina řídící našeho paraboloidu.

Přímka s seče přímky δ, δ_1 v bodech D, D_1 a konoidy (V) a Plückerův v bodech V, Q; třetí souřadnice těchto průsečíků mají hodnoty

$$z = a \sin 2\omega, \; z_1 = a \sin 2\omega_1,$$

kde $\omega = \beta + \frac{1}{2}\pi$, $\omega_1 = \beta$, a tedy platí $z + z_1 = 0$.

Odtud vychází, že střed délky QV leží na rovině střední $z = 0$; tím dokázána známá věta, že

střed délky QV splývá se středem délky DD_1, určené příčkou na přímkách základních δ, δ_1.

Pro její konstruktivní využití odkazuji čtenáře na citovaná pojednání. Věta ukazuje, že jsou oba konoidy vůči přímkám $\delta \delta_1$ v jistém vztahu, který by bylo lze nazvati cissoidálním.

Obraťme se k rovinným řezům Γ 3. stupně na konoidu (V); jich roviny procházejí jednou z řídících přímek δ, δ_1, a vrcholové přímky s vycházející z bodů na těchto čarách Γ sekou druhou z těchto přímek v bodě pevném.

Uvažujme pevný bod S na δ_1 a řez Γ roviny (S, δ) s konoidem (V). Vrcholem V procházejí přímky s a s_1 o společném půdoryse $s' \equiv s'_1$, který obsahuje bod S', půdorys bodu S; tudíž přímky s_1 protínají pevnou přímku SS' rovnoběžnou s Oz, a tvoří následkem toho Plückerův konoid (s_1), jenž vznikne z konoidu (5*) pošinutím o vektor OS', kterým osa Oz přechází do polohy SS'. Čára Γ (bodů V) je geometrické místo průseků uvažovaných přímek s, s_1, a tedy je to řez roviny (S, δ) s konoidem (s_1).

Rovina Π, jež vznikne z roviny (S, δ) pošinutím opačným $S'O$, seče pak základní konoid Plückerův (5*) v čáře (Π) 3. stupně, shodné a rovnoběžné s čarou Γ, která z ní vznikne pošinutím o vektor OS',

Kubické řezy konoidu (V) *vzniknou z určitých rovinných řezů základního konoidu Plückerova pošinutím o určitý vektor ležící ve směru jedné z přímek* δ, δ_1.

Podobně bychom shledali, že hyperboloid určený přímkami δ, δ_1 a přímkou SS' ($\| Oz$), která žádnou z nich neprotíná, seče konoid (V) v čáře stupně 6., průseči to daného hyperboloidu s konoidem (s_1) shodným se základním konoidem Plückerovým.

Analytické vyjádření čáry Γ obsaženo jest v hořejších obecných úvahách; předešlá konstrukce je podává přímo. Uvažujme na př. rovinu procházející přímkou δ; její rovnice zní

$$z - c = n\,(y \cos\alpha - x \sin\alpha),$$

a bod S, její stopa na přímce δ_1, má souřadnice

$$(S')\quad x_0' = \frac{c}{n \sin\alpha},\qquad y_0 = -\frac{c}{n \cos\alpha},$$

a pošineme-li počátek souřadnic do bodu S',

$$x = x_0 + \xi,\ y = y_0 + \eta,$$

máme rovnici roviny naší v nové soustavě*)

$$z = -c + n\,(\eta \cos\alpha - \xi \sin\alpha),$$

Tato rovina určuje čáru Γ jako řez s konoidem (s_1)

$$z\,(\xi^2 + \eta^2) = 2\,a\,\xi\eta;$$

průmět řezu hoví tedy rovnici

$$(\xi^2 + \eta^2)\,(n\,\eta \cos\alpha - n\,\xi \sin\alpha - c) = 2\,a\,\xi\eta,$$

z níž snadno přejdeme k rovnici v souřadnicích polárních

$$r = \frac{a}{n}\,\frac{\sin 2\varphi + \sin 2\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)},$$

a z té lze reprodukovati známé věty.

---

*) Rovnice roviny Π je tedy

$$z + c = n\,(y \cos\alpha - x \sin\alpha);$$

tyto roviny kubických řezů Plückerova konoidu přenosných na konoid (V) tvoří svazek, jehož osa je přímka ležící souměrně s δ_1 vůči nárysně. Analogicky pro druhý svazek takových rovin.

Z (11) plyne pro souřadnice stopy přímky s

$$x_0 = 2\,a\,\lambda\,\cos^2\alpha\,\sin\omega,\; y_0 = 2\,a\,\lambda\,\sin^2\alpha\,\cos\omega;$$

jsou-li xyz souřadnice bodu V a $x'y'z'$ souřadnice bodu Q na konoidu (5), jenž s bodem V leží na téže příčce s, podají nám vzorce

$$x' = 2\,x_0 - x,\; y' = 2\,y_0 - y,\; z' = -z$$

na základě hodnot (9) následující výrazy pro souřadnice bodu Q

$$(Q)\quad \begin{aligned} x' &= 2\,a\,\lambda\,\sin\omega\,(\sin^2\omega - \sin^2\alpha),\\ y' &= -2\,a\,\lambda\,\cos\omega\,(\sin^2\omega - \sin^2\alpha),\\ z' &= -a\,\sin 2\,\omega. \end{aligned}$$

Klademe-li tedy $\Theta = \omega - \frac{1}{2}\pi$, máme

$$x' = r\cos\Theta,\; y' = r\sin\Theta,\; z' = a\sin 2\,\Theta,$$
$$r = 2\,a\,\lambda\,(\cos^2\Theta - \sin^2\alpha) = a\,\lambda\,(\cos 2\,\Theta + \cos 2\,\alpha),$$

takže čáře $\lambda =$ konst. na konoidu (V) odpovídá na Plückerově konoidu (Q) čára stupně 6., která se promítá v konchoidu jednoduché růžice.*)

Čára sama leží na rotační ploše stupně 4.**)

$$\sqrt{x^2 + y^2} - \lambda\sqrt{a^2 - z^2} = a\,\lambda\cos 2\alpha.$$

Pro výše uvažovanou čáru 3. stupně na ploše (V), která je charakterisována podmínkou, aby osy o protínaly přímku $x = 4a\mu$, $y = 0$, t. j. kdy

$$\lambda = \frac{\mu}{\sin\omega},$$

nám rovnice (Q) stanoví příslušnou čáru na konoidu Plückerově; její půdorys

$$r = 2a\mu\left(\cos\Theta - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\Theta}\right)$$

je cissoida kruhu a přímky, podobně jako u čáry jí příslušné na konoidu (V).

---

*) Čáru tuto jsme uvažovali na konci čl. 5., značíce ji Ω.

**) Meridián je tu ellipsa

$$\left(\frac{x - a\,\lambda\cos 2\,\alpha}{a\,\lambda}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1.$$

7.

Rovina vedená osou Oz konoidu (V)

$$x = \mu y$$

protíná tento v přímkách, jichž parametry ω se určí z rovnice plynoucí z (9)

$$(c) \qquad tg\,\omega \frac{\cos^2\omega + \cos^2\alpha}{\sin^2\omega + \sin^2\alpha} = \mu;$$

ta se vůči neznámé $t = tg\,\omega$ přepíše na rovnici kubickou

$$(c') \quad t^3 - \mu\frac{2-k}{k}t^2 + \frac{1+k}{k}t - \mu\frac{1-k}{k} = 0, \; k = \cos^2\alpha.$$

Kubická rovnice

$$t^3 - \mathfrak{f}_1 t^2 + \mathfrak{f}_2 t - \mathfrak{f}_3 = 0$$

má tři stejné kořeny, platí-li podmínky

$$3\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_1^2, \quad 27\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_1^3;$$

applikovány na rovnici (c) dávají tyto podmínky hodnoty určité $k = \frac{1}{2}$, $\mu^2 = 1$, t. j. $\alpha = 45^0$.

Společná hodnota kořene je tu

$$t = \tfrac{1}{3}\mathfrak{f}_1,$$

t. j.

$$tg\,\omega = \mu = \pm 1,$$

takže povrchové přímky hledané jsou přímky základní δ, δ_1.*)

Buď v obecném případě Γ čára stupně 3. na ploše (V); rovina $y = \mu x$ protne ji ve třech bodech M, jimiž jsou určeny tři přímky povrchové p. Je-li Γ čára rovinná, leží na př. v rovině vedené přímkou δ, má tuto za asymptotu, a protne ji tedy každá rovina obsahující přímku δ v jednom bodě obyčejném a

*) Pro $\omega = \alpha$ dává v obecném případě rovnice (c) hodnotu

$$\mu = \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{m}.$$

Zvolíme-li za μ tuto hodnotu, přejde (c') na tvar

$$(t-m)^2\left(t - \frac{1}{m}\right) = 0,$$

t. j. rovina (δ, Oz) protíná plochu (V) v přímce δ dvojmo a v přímce $\omega = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, která se obdrží z druhé přímky konoidu (Q) ležící na rovině $z = c$, jako místo vrcholů příslušných k osám O tuto přímku protínajícím.

v jednom bodě úběžném. Roviny svazku (Oz), blízké této krajní poloze, stanoví na Γ jeden bod v normální vzdálenosti a dva body velmi vzdálené; případ ten odpovídá řešení dvojnásobnému rovnice kubické (c'). Kořen trojnásobný — jenž existuje pouze při $\alpha = 45^0$ — nastane, jen když také třetí průsečný bod zapadne do nekonečna, t. j. je-li přímka δ inflexní asymptotou čáry Γ. Odtud máme větu:

„*V případě orthogonálního konoidu* (V) $(\alpha = 45^0)$ *jsou roviny* (δ, Oz) *a* (δ_1, Oz) $(y = \pm x)$ *oskulační ke všem čarám 3. stupně na ploše ležícím, resp. obsahují jich tečny inflexní, když tyto čáry jsou rovinné.*"

„*Půdorysy všech čar 3. stupně na orthogonálním konoidu* (V) *ležících, mají přímky* $y = \pm x$ *za tečny inflexní neb vratní.*"

Dotykové jich body se v konkretním případě určí bez obtíží, ježto je znám vztah mezi parametry λ a ω, a v inflexních bodech jest $\omega = \pm 45^0 + \nu\pi$ (ν cel. číslo). Rovnice (9) dávají pro tyto body

$$x = 2a\lambda \sin \omega, \quad y = 2a\lambda \cos \omega.$$

Z tohoto výsledku lze odvoditi stanovení bodů a tečen inflexních u četných cirkulárních čar 3. stupně (racionálních), jakmile se podaří je vytvořiti jako půdorysy našich čar Γ.

Abychom odvodili tangenciální rovnici konoidu (V), vyjadřme podmínku, aby rovina

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

obsahovala přímku ω konoidu; dosadíme výrazy (9) a identifikujeme výsledek vůči λ; obdržíme tak dvě rovnice

$$aw \sin 2\omega + 1 = 0$$

$$u \sin \omega (\cos^2 \omega + \cos^2 \alpha) + v \cos \omega (\sin^2 \omega + \sin^2 \alpha) = 0;$$

z nich třeba vyloučiti ω, aby vyšla rovnice hledaná.

Zaveďme na okamžik zkráceniny

$$t = tg\, \omega, \quad k = \cos^2 \alpha;$$

rovnice naše tím nabudou tvaru

$$1 + t^2 + 2awt = 0,$$

$$[(2 - k)(1 + t^2) - 1]\frac{v}{u} + t[1 + k(1 + t^2)] = 0;$$

do druhé rovnice vložíme hodnotu $1 + t^2$ plynoucí z první, a rovnici tak vzniklou

$$\left[1 - 2(2 - k)\frac{awv}{u}\right]t - \frac{v}{u} - 2k\,awt^2 = 0$$

snížíme pomocí první na stupeň 1. Vyjde

$$\left[1 - 2(2 - k)\frac{awv}{u} + 4ka^2w^2\right]t + 2kaw - \frac{v}{u} = 0.$$

Při označení

$$P = 4ka^2w^2u - 2(2 - k)awv + u$$

máme tedy rovnici

$$Pt + (2kawu - v) = 0,$$

která ve spojení s rovnicí první dává

$$P^2 + (2kawu - v)^2 - 2awP(2kawu - v) = 0,$$

čili

$$[u - 2(1 - k)awv][4ka^2w^2u - 2(2 - k)awv + u] + (2kawu - v)^2 = 0. \tag{19}$$

Toť tangenciální rovnice konoidu (V), při čemž k značí $\cos^2\alpha$.

(Dokončení.)

O jedné ploše stupně čtvrtého.

Napsal Dr. **L. Seifert**, prof. reálky v Praze-I.

Buď F ohniskem rotačních ploch druhého stupně, které jdou pevnými body A, B. Jak patrno, jest geometrickým místem druhého ohniska dvojina rotačních ploch (ellipsoid a dvojdílný hyperboloid) o společných ohniskách A, B.

V tomto článku chci odpověděti k podobné otázce: *jaké jest geometrické místo druhého ohniska F' při stálém F, mají-li plochy za tečny pevné přímky a, b.*