Matyáš Lerch

Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 46 (1917), No. 2-3, 225--232

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120909

Poznámky o inversi řad a o číselných rovnicích.

Sdílí **M. Lerch** v Brně.

1. Buď $f(x)$ funkce analytická a vytvořme na její základě řadu

$$S = x - \Phi_1 f + \frac{1}{2!}\Phi_2 f^2 - \frac{1}{3!}\Phi_3 f^3 + \dots, \tag{1}$$

jejíž součinitelé jsou stanoveni dle zákona

$$\Phi_1 f'(x) = 1, \quad \Phi_\nu(x) f'(x) = \Phi'_{\nu-1}(x), \quad (\nu = 2, 3, 4 \dots) \tag{2}$$

Derivováním*) řady (1) po členech vychází

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx} &= 1 - [\Phi_1 f' + \Phi_1' f] + \frac{1}{2!}[2\Phi_2 f' f + \Phi_2' f^2] \mp \dots \\ &\quad + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}[\nu\Phi_\nu f' f^{\nu-1} + \Phi_\nu' f^\nu] + \dots \\ &= 1 - [1 + \Phi_2 f' f] + \frac{1}{2!}[2\Phi_2 f' f + \Phi_3 f' f^2] \pm \dots \\ &\quad + (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}[\nu\Phi_\nu f' f^{\nu-1} + \Phi_{\nu+1} f' f^\nu] + \dots,\end{aligned}$$

tedy

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \Phi_{\nu+1} f' f^\nu}{\nu!}.$$

Pokud x náleží jistým intervallům, bude $f'(x)$ absolutně nad stálou mezí a $f(x)$ malé, a pravá strana blíží se s rostoucím ν svojí mezi nulle; v takovém intervallu je pak řada S na x nezávislou. Má-li pak funkce $f(x)$ v takovém intervallu nul-

*) Přesnější postup viz „O novém zobecnění řady Taylorovy a Lagrangeovy“ Rozprav české Akademie roč. XX., čís. 36. (1911).

lové místo x', podá nám dosazení hodnot $x = x'$, $f(x) = 0$ do (1) hodnotu $S = x'$, t. j.

„řada S podává hodnotu kořene $x' = S$ rovnice $f(x') = 0$“.

Podotýkáme, že

$$\Phi_1 = \frac{1}{f'(x)}, \quad \Phi_2 = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}, \quad \Phi_3 = -\frac{f'''(x)}{f'(x)^4} + \frac{3f''(x)^2}{f'(x)^5},$$

$$\Phi_4 = -\frac{f^{(4)}(x)}{f'(x)^5} + 10\frac{f'''(x)f''(x)}{f'(x)^6} - 15\frac{f''(x)^3}{f'(x)^7},$$

$$\Phi_5 = -\frac{f^{(5)}(x)}{f'(x)^6} + 15\frac{f^{(4)}(x)f''(x)}{f'(x)^7} + 10\frac{f'''(x)^2}{f'(x)^7} - 105\frac{f'''(x)f''(x)^2}{f'(x)^8} + 105\frac{f''(x)^4}{f'(x)^9}.$$

Inverse řady

$$z = \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu \tag{3}$$

vychází z předchozího výsledku substitucí

$$f(x) = -z + \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu ;$$

pro malá z je kořen x' rovnice $f(x') = 0$ také malý a můžeme v příslušné rovnici (1) voliti $x = 0$; máme pak

$$f = -z, \quad \Phi_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \Phi_2 = -\frac{a_2}{a_1^3}, \quad \Phi_3 = -\frac{a_3}{a_1^4} + \frac{3a_2^2}{a_1^5},$$

$$\Phi_4 = -\frac{a_4}{a_1^5} + 10\frac{a_2a_3}{a_1^6} - 15\frac{a_2^3}{a_1^7},$$

$$\Phi_5 = -\frac{a_5}{a_1^6} + 15\frac{a_2a_4}{a_1^7} + 10\frac{a_3^2}{a_1^7} - 105\frac{a_2^2a_3}{a_1^8} + 105\frac{a_2^4}{a_1^9},$$

$$\cdots\cdots$$

a inverse řady (3) zní:

$$x = \frac{z}{a_1} - \frac{a_2}{2a_1^3}z^2 + \frac{3a_2^2 - a_1a_3}{6a_1^5}z^3 - \frac{15a_2^3 - 10a_1a_2a_3 + a_1^2a_4}{24a_1^7}z^4$$
$$+ \frac{105a_2^4 - 105a_1a_2^2a_3 + 10a_1^2a_3^2 + 15a_1^2a_2a_4 - a_1^3a_5}{120a_1^9}z^5$$
$$- \ldots \tag{3*}$$

2. Iterační methoda (m. postupného blížení) řešení rovnice

$$x = F(x) \tag{4}$$

spočívá v stanovení veličin

$$x_1 = F(x_0),\quad x_2 = F(x_1),\quad x_3 = F(x_2),\ \ldots$$

Konverguje-li posloupnost hodnot x_ν, podá nám rovnice

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \tag{4'}$$

limitním přechodem rovnici (4) pro $x = \lim\limits_{\nu=\infty} x_\nu$.

Podle Rolleovy věty (o střední hodnotě) máme dle (4')

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} \equiv F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) = (x_{\nu+1} - x_\nu)\, F'(\xi_\nu),$$

kde ξ_ν značí určitou veličinu intervallu $(x_\nu \ldots x_{\nu+1})$, a odtud*)

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0)\, F'(\xi_0)\, F'(\xi_1)\, F'(\xi_2) \ldots F'(\xi_{n-1}). \tag{5}$$

Je-li tedy $F(x)$ té vlastnosti, že stanovené hodnoty $x_0, x_1, x_2, \ldots$ spadají v intervall, v němž derivace $F'(\xi)$ jest absolutně menší než určitý ryzí zlomek ϱ, bude dle (5)

$$|\, x_{n+1} - x_n \,| < |\, x_1 - x_0 \,| \cdot \varrho^n,$$

a proces je konvergentní asi tak rychle, jako geometrická řada s poměrem ϱ.

3. Rovnici $f(x) = 0$ možno převésti na tvar (4) volbou

$$F(x) \equiv x - A(x)\, f(x), \tag{6}$$

kde $A(x)$ je funkce (neb konstanta), jež nemizí v okolí nulového místa funkce $f(x)$; neboť rovnice (4) v tom případě přechází v

$$A(x)\, f(x) = 0.$$

Poněvadž tu

$$F'(x) = 1 - A'(x) f(x) - A(x)\, f'(x),$$

bude tato methoda výhodna pro $A(x)$ blízké reciproké derivaci

$$A(x) \backsim \frac{1}{f'(x)},$$

neboť pak $F'(x) \backsim - A'(x) f(x)$ je velmi malé v okolí kořene rovnice $f(x) \doteq 0$.

---

*) Sur l'approximation des racines d'équations numériques (L'Enseignement mathématique, VIIe année, p. 300; 1905). O řešení rovnice Keplerovy methodou iterační (Časop. math. a fys. roč. XXV., str. 109; 1896).

Volíme-li zvláště

$$A = \frac{1}{f'(x)},$$

vychází methoda Newtonova

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \equiv F(x_\nu), \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Pro její posouzení konvergence máme

$$F'(\xi) = \frac{f(\xi) f''(\xi)}{f'(\xi)^2},$$

což sblíženě — značí-li x hodnotu kořene hledaného — jest

$$F'(\xi) \doteq \frac{f''(x)}{f'(x)} (\xi - x);$$

a tu jest $\xi_\nu - x$ absolutně menší než jedna z obou veličin $x_\nu - x$, $x_{\nu+1} - x$.

Znamenáme-li $x - x_\nu = h_\nu$, máme z (7)

$$x - x_{\nu+1} = h_{\nu+1} = h_\nu + \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)},$$

$$\frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} = \frac{f(x - h_\nu)}{f'(x - h_\nu)} = -h_\nu - \frac{1}{2} h_\nu^2 \frac{f''(x)}{f'(x)} + \ldots$$

t. j.

$$h_{\nu+1} = -\frac{1}{2} h_\nu^2 \frac{f''(x)}{f'(x)} + \ldots, \tag{8}$$

z čehož vychází sblíženě

$$h_\mu \sim -\left(\frac{f''(x)}{2f'(x)}\right)^{2^\mu - 1} h_0^{2^\mu}. \tag{8*}$$

Podmínka konvergence tedy bude obecně

$$\left|\frac{f''(x)}{2f'(x)} h_0\right| < 1,$$

pokud ovšem vynechané členy v rozvojích (8) lze zanedbati.

Methoda Newtonova vyžaduje stanovení hodnot $f(x_\nu)$, $f'(x_\nu)$ a je tedy spojena s velkou námahou, a někdy vůbec nelze jí užíti, kdy totiž výraz $f(x)$ nelze dle známých pravidel derivo-

vati (třeba funkce byla analytická). V těchto případech a v oněch, kdy nejsme u kořene dosti blízko, stačí operovati dle methody (6), kde A je konstanta blízká reciproké hodnotě derivace $f'(x)$ v okolí hledaného kořene. Tak na př. můžeme bráti

$$F(x) \equiv x - Af(x),$$

$$A = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{aneb} \quad A = \frac{a - b}{f(a) - f(b)},$$

kde veličiny a, b jsou zvoleny v okolí hledaného kořene. Při tomto postupu třeba postupně počítati toliko hodnoty $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots$

Methodu illustruje příklad*) $x^3 - 5 = 0$. Pro $x_0 = 1{\cdot}71$ máme $f(x_0) = 0{\cdot}000211$, $f'(x_0) = 8{\cdot}7723$,

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0{\cdot}000024052,$$

$$f(x_1) = -\frac{29679}{10^{13}},$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_0)} = \frac{30755}{10^{14}},$$

$$x_2 = 1{\cdot}7099.7594.7692.45.$$

Při této approximaci řídí se odchylky h_ν sblíženě zákonem

$$h_{\nu+1} \backsim -\frac{f''(x)}{f'(x)} h_0 h_\nu, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$h_1 \backsim -\frac{f''(x)}{2f'(x)} h_0^2,$$

tedy obecně

$$h_\nu \backsim \frac{1}{2}\left(\frac{-f''(x)}{f'(x)}\right)^\nu h_0^{\nu+1}.$$

Srovnáme-li s (8*), nacházíme překvapující rozdíl co do výhodnosti obou method.

---

*) Sur une amélioration de la méthode d'approximation de Newton Enseignement math., VI[e] année, p. 292, 1904). Zde věc provedena pro soustavy rovnic algebraických neb transcendentních.

Methoda Newtonova vzniká z řady (1) podržením dvou prvních členů; další methoda vznikne, podržíme-li členy tři:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)\,f(x)^2}{f'(x)^3}\,; \quad x_{\nu+1} = F(x_\nu).$$

Pro derivaci máme

$$F'(x) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x)\,f'''(x)}{2f'(x)^4}\,f(x)^2.$$

Pro odchylky $h_\nu = x - x_\nu$ nalezneme

$$h_{\nu+1} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{f'''(x)}{f'(x)}\right] h_\nu^3 + \ldots,$$

takže jsou postupně typu

$$B h_0^3, \quad B^4 h_0^9, \quad B^{13} h_0^{27}, \ldots$$

4. Methodu zvanou regula falsi zobecníme takto: Provedeme inversi funkce

$$f(x) = y$$

tím, že rozvineme x na způsob interpolační řady

$$x = x_0 + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)(y - y_1)$$
$$+ B_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \ldots,$$

při čemž psáno $y_\nu = f(x_\nu)$ a za x_ν zvoleny hodnoty v okolí kořene rovnice $f(x) = 0$. Rozvoj podává kořen této rovnice, vložíme-li tam $y \doteq 0$.

Součinitelé B_ν stanoví se postupnými substitucemi $y = y_1$, $y_2, \ldots$ t. j. z rovnic

$$x_1 = x_0 + B_1(y_1 - y_0),$$
$$x_2 = x_0 + B_1(y_2 - y_0) + B_2(y_2 - y_0)(y_2 - y_1),$$
$$\ldots\ldots$$

Poněvadž čísla $y_\nu - y_0,\ y_\nu - y_1, \ldots y_\nu - y_{\nu+1}$ jsou velmi malá, dlužno počítati s velkým počtem desetinek, aby se do hodnot součinitelů B nevloudily značné chyby. Z toho důvodu ztrácí tato methoda velmi na ceně.

První dva členy dávají meth. regula falsi:

$$x \doteq x_0 - B_1 y_0, \quad B_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}.$$

5. Učebnice se omezují na případ, kdy hledaný kořen jest jednoduchý ($f'(x) \gtrless 0$), poněvadž stanovením nejv. spol. dělitele se u algebraických rovnic toho dá docíliti. Avšak proces podobný neexistuje u rovnic transcendentních a jest velmi únavný u rovnic algebraických, vyjma několik školních příkladů. Ve svých přednáškách a na uv. m.*) doporučuji řešení rovnic derivovaných $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, ... $f^{(p-1)}(x) = 0$, je-li kořen p-násobný.

Není-li multiplicita kořene předem známa, řeší se rovnice ty až až k oné derivaci, která má na sbližném místě x_0 ještě malou hodnotu.

V některých případech podaří se zjistiti, že rovnice

$$f^{(\nu)}(v) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots p-1) \quad [f^{(p)}(v) \gtrless 0],$$

mají společný kořen ležící blízko kořene hledaného rovnice

$$f(x) = 0.$$

V okolí bodu v platí pak rozvoj tvaru

$$f(x) - f(v) = \frac{f^{(p)}(v)}{p!}(x-v)^p + \frac{f^{(p+1)}(v)}{(p+1)!}(x-v)^{p+1} + \ldots \tag{9}$$

Zde stanovivše rozvoj

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt[p]{\left\{(x-v)^p + \frac{f^{(p+1)}(v)}{(p+1)f^{(p)}(v)}(x-v)^{p+1} + \frac{f^{(p+2)}(v)}{(p+1)(p+2)f^{(p)}(v)}(x-v)^{p+2} + \ldots\right\}} \\ &\qquad = (x-v) + \frac{a_2}{2!}(x-v)^2 + \frac{a_3}{3!}(x-v)^3 + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{9*}$$

můžeme provésti inversi řady

$$\eta = \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu!}(x-v)^\nu, \quad a_1 = 1,$$

t. j. (dle (3*))

$$x - v = \sum_1^\infty \frac{c_\nu}{\nu!}\eta^\nu, \tag{9a}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -a_2, \quad c_3 = 3a_2^2 - a_3,$$
$$c_4 = -15a_2^3 + 10a_2a_3 - a_4, \ldots,$$

*) Enseignement, VII., p. 302.

načež nám $f(x) = 0$ podá pro η hodnotu

$$\eta = \sqrt[p]{-\frac{p!\,f(v)}{f^{(p)}(v)}}, \tag{9^b}$$

kterou třeba do řady (9^a) dosaditi, aby určená jí veličina x byla řešením rovnice $f(x) = 0$. Všem p různým hodnotám výrazu (9^b) odpovídá tak p kořenů této rovnice. (Dokončení.)

Elementární prostorový důkaz věty Brianchonovy a Pascalovy.

Dr. Q. Vetter.

V učebnici Vojtěchově (V. R. str. 51.) dokazuje se věta Pascalova pro kružnici pomocí věty Menelaovy a věta Brianchonova (V. R. str. 69) pomocí polarity z věty Pascalovy. Obě tyto věty lze dokázati jednoduchou prostorovou úvahou.*)

V nákresně (obr.), kterou považujeme za průmětnu, budiž dána kružnice a na ní 6 bodů A, B, C, D, E a F. Body těmi vedeme tečny a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 a f_1. Průsečík G_1 tečen a_1 a b_1 považujeme za průmět bodu G nad průmětnou ve vzdálenosti $g = \overline{G_1 A} = \overline{G_1 B}$ se nacházejícího, což označíme $G_{1(g)}$ (dle učebnice Pithardt-Seifertovy IV. R. str. 35., Rg. V. str. 12.). Podobně sestrojíme nad body I_1 a L_1 a pod body H_1, K_1 a M_1 body I, L, H, K a M ve vzdálenostech rovných tečnám z půdorysů vedeným. Úsečky $\overline{GA}$ a $\overline{MA}$, jež se promítají do přímky a_1, svírají s průmětnou úhel 45^0 a leží proto v jediné přímce a. Podobně lze také o ostatních spojnicích $\overline{GBH}$, $\overline{HCI}$, $\overline{IDK}$, $\overline{KEL}$ a $\overline{LFM}$ dokázati, že leží v přímkách b, c, d, e a f.

Přímky a a d jsou různoběžné, neboť průsečík

$$X_1 \equiv (a_1, d_1)$$

jest od dotyčných bodů A a D vzdálen o tutéž délku x a tedy

*) Dvorní rada prof. K. Pelz podal ve své: „Deskriptivní geometrii“ (lith. přednášky) díl II. str. 44 a nn. důkazy těchto vět pomocí rotačního jednoplochého hyperboloidu. Důkazy ty, které již r. 1874, jak mi laskavě sdělil p. šk. rada Osovský, přednášel prof. K. Küpper, lze s malými změnami přiblížiti našemu učivu středoškolskému, což jest účelem tohoto článku.