František Josef Studnička

O nejjednodušším řešení rovnic kubických

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 22 (1893), No. 3, 193--201

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120905`

Příloha k Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky.

O nejjednodušším řešení rovnic kubických.

Pro studující napsal

prof. dr. F. J. Studnička.

Přehlédneme-li rozvoj nauky o rovnicích algebraických, shledáme, že nyní jest ve stadii třetím, z nichž první končilo roku 1545 vydáním *Cardanova* spisu „Ars magna", druhé pak r. 1851 uveřejněním klassického pojednání *Sylvestrova* „Essay on canonical forms". Z čehož jde na jevo, že každé řešení zvláštních úkolů sem připadajících má již svou literaturu, z níž se poznává, jak se postupně zdokonalovalo i co do theorie i co do prakse.

Kdo by chtěl míti stručný toho doklad, nechť vystopuje nauku o řešení rovnic kvadratických ve stadiích všech; obdržíť tu nejjednodušším spůsobem obraz příslušného postupu a pozná podstatu současného pokroku.

A podobný, ač mnohem složitější zjev poskytuje řešení rovnic stupně *třetího*,*) o němž tuto hodláme podati stručný návod, jak s hlediska moderního jej možná odůvodniti spůsobem jednoduchým, učiněné pokroky předpokládajícím. Neb kdo dnes má řešiti určitou rovnici kubickou, chce míti recept k tomu co možná nejkratší.

Obecný tvar takové rovnice jest, jakož známo,

$$x^3 + 3px + 2q = 0, \tag{1}$$

takže dáme-li hledanému kořenu výraz

$$x = \sqrt[3]{p}\,[\sqrt[3]{\alpha_1} + \sqrt[3]{\alpha_2}], \tag{2}$$

*) Viz na př. *Matthiessen* „Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen."

nové veličiny α_1 a α_2 nutno tak určiti, aby x vzorce (2) uvedlo levou stranu rovnice (1) identicky na nullu. Z tohoto vzorce jde tedy napřed

$$x^3 = 3x \,.\, \sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 p^2} + p\,(\alpha_1 + \alpha_2),$$

takže porovnáním s danou rovnicí obdržíme

$$\alpha_1 \alpha_2 = -p\,, \tag{3}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2q}{p}\,, \tag{4}$$

z čehož plyne, že neznámé tyto hodnoty jsou kořeny rovnice stupně druhého tvaru *)

$$\alpha^2 + \frac{2q}{p}\,\alpha - p = 0\,. \tag{5}$$

Řešením si pak snadno zjednáme

$$\left.\begin{aligned} p\alpha_1 &= -q + \sqrt{q^2 + p^3}\,, \\ p\alpha_2 &= -q - \sqrt{q^2 + p^3}\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

čímž vzorec (2) obdrží podobu známého vzorce Cardanova.

Znajíce takto jeden kořen rovnice (1), ustanovíme ostatní dva, zredukujeme-li ji známým spůsobem na rovnici kvadratickou. Kladouce totiž

$$x_1 = \sqrt[3]{\alpha_1 p} + \sqrt[3]{\alpha_2 p} = u + v\,,$$

z čehož se zřetelem ke vzorci (3) jde

$$\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 p^2} = -p = u\,.\,v\,, \tag{7}$$

užijme známého **) schematu

*) Že tu vyskytuje se Hesse-ův kovariant příslušné formy, budiž jenom mimochodem připomenuto.

**) Viz *Studnička* „O duchu mathematickém a některých jeho zjevech.“ Časop. VIII. pag. 89.

$$\begin{array}{r|llll} & 1, & 0, & 3p, & 2q \\ \hline u+v & 1, & u+v, & (u+v)^2+3p, & 0 \end{array},$$

načež obdržíme pomocí vzorce (7) příslušnou rovnici kvadratickou

$$x^2+(u+v)x+u^2-uv+v^2=0,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_2=-\frac{u+v}{2}+i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}, \tag{8}$$

$$x_2=-\frac{u+v}{2}-i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}. \tag{9}$$

Pokud jest tedy p *positivní*, představují vzorce (6) veličiny reálné, x_1 pak jest kořenem reálným, kdežto x_2 a x_3 jsou kořeny soujemné a sdružené. Všeobecně tu konečně platí

$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$x_1 \,.\, x_2 \,.\, x_3=-2q,$$

jakož snadno se pomocí vzorce (4) pozná.

Jakmile však p jest veličinou *negativní*, vzorce (6) mají tedy tvar

$$\left.\begin{aligned} p\alpha_1 &= q-\sqrt{q^2-p^3}, \\ p\alpha_2 &= q+\sqrt{q^2-p^3}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

nutno rozeznávati případy *tři* a to:

a) Vyhovuje p a q podmínce

$$q^2>p^3, \tag{11}$$

načež máme případ týž, jaký poskytuje positivní p, že totiž vzorce (10) obsahují veličiny reální jako vzorce (6).

b) Vyhovuje p a q podmínce

$$q^2=p^3, \tag{12}$$

načež jest ve vzorcích (10)

$$p\alpha_1=p\alpha_2=q,$$

a tedy ze vzorce (2) plyne pro kořen první, užijeme-li vzorce (12),

$$x_1 = -2\sqrt[3]{q} = -2\sqrt{p}, \tag{13}$$

kdežto ze vzorce (8) a (9), protože tu platí

$$u = v,$$

obdrží se pro kořeny ostatní

$$x_2 = x_3 = \sqrt[3]{q} = \sqrt{p}. \tag{14}$$

Zároveň tu poznáváme, že pro *negativní* q platí

$$x_1 = 2\sqrt[3]{q} = 2\sqrt{p}, \tag{15}$$

$$x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{q} = -\sqrt{p}, \tag{16}$$

jakož i jiným spůsobem možná objasniti.*)

c) Vyhovuje p a q podmínce

$$q^2 < p^3, \tag{17}$$

načež možná vzorcům (10) dáti tvar

$$\left.\begin{aligned} p\alpha_1 &= q - i\sqrt{p^3 - q^2}, \\ p\alpha_2 &= q + i\sqrt{p^3 - q^2}, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

z něhož patrno, že veličiny $p\alpha_1$ a $p\alpha_2$ jsou *soujemné* a sdružené. A poněvadž podlé vzorce (2) třeba vzíti jich odmocninu třetí, nutno provésti takovou jich proměnu, aby tato třetí odmocnina se objevila též býti číslem soujemným, což nejsnadněji provedeme takto:

Položíme-li

$$q = \alpha, \quad \sqrt{p^3 - q^2} = \beta,$$

bude patrně

$$p\alpha_1 = \alpha - \beta i, \quad p\alpha_2 = \alpha + \beta i;$$

*) Viz *Studnička* „Příspěvek ku grafickému rozboru kubických rovnic“ Časop. XXII. pag. 81.

a poněvadž platí, jakož známo,*) všeobecně ku periodě nehledíc,

$$l(\alpha+\beta i)=\frac{1}{2}l(\alpha^2+\beta^2)+i\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha},$$

obdržíme v tomto případě

$$l(p\alpha_2)=\frac{1}{2}lp^3+i\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{p^3-q^2}}{q};$$

zavedeme-li tedy kratší označení

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{p^3-q^2}}{q}=\varphi,$$

z něhož plyne

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{p^3-q^2}}{q},\qquad \cos\varphi=\frac{q}{\sqrt{p^3}} \tag{19}$$

zjednáme si z poslední relace napřed

$$\frac{1}{3}l(p\alpha_2)=\frac{1}{2}lp+i\frac{\varphi}{3},$$

a vrátíme-li se od logarithmův, konečně

$$\sqrt[3]{p\alpha_2}=\sqrt{p}\,e^{i\frac{\varphi}{3}};$$

a podobně obdržíme pro soujemnou veličinu sdruženou

$$\sqrt[3]{p\alpha_1}=\sqrt{p}\,e^{-i\frac{\varphi}{3}},$$

takže součet jich bude

$$\sqrt[3]{p\alpha_1}+\sqrt[3]{p\alpha_2}=2\sqrt{p}\,\frac{e^{i\frac{\varphi}{3}}+e^{-i\frac{\varphi}{3}}}{2}=2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}\text{ **)},$$

a tedy podlé vzorce (2) první kořen naší rovnice jest

$$x_1=-2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}. \tag{20}$$

*) Viz *Studnička* „Výklady o funkcích monoperiodických“ pag. 144.
**) Ibid. pag. 88.

Ostatní dva obdržíme pak nejrychleji, snížíme-li pomocí této hodnoty kořenové rovnici (1) na stupeň druhý pomocí známého schematu

$$\begin{array}{r|llll} & 1, & 0, & -3p, & 2q \\ \hline -2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3} & 1, & -2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi}{3}, & 4p\cos^2\frac{\varphi}{3}-3p, & 0 \end{array},$$

takže příslušná rovnice kvadratická bude

$$x^2-2\sqrt{p}\,.\cos\frac{\varphi}{3}\,.\,x+4p\cos^2\frac{\varphi}{3}-3p=0,$$

jejíž kořeny jsou, jakož snadno se zredukuje,

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{p}\left[\cos\frac{\varphi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right], \\ x_3 &= \sqrt{p}\left[\cos\frac{\varphi}{3}-\sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Uvážíme-li pak, že platí

$$\cos 60^0=\frac{1}{2},\quad \sin 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

obdržíme ze vzorců těchto též, což jinak bývá odvozováno,

$$x_2=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^0\right), \tag{22}$$

$$x_3=2\sqrt{p}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right), \tag{23}$$

takže všechny tři kořeny anebo vzorce (20), (22) a (23) možná zahrnouti společným výrazem

$$x_{1,2,3}=-2\sqrt{p}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},\quad (k=0,\ 1,\ 2). \tag{24}$$

A z těchto vzorců možná taktéž přejíti ke vzorcům (13) až (16), platícím za podmínkou (12).

Pak jest pro *positivní* q dle vzorce (19)

$$\cos\varphi=1,\quad \text{tedy}\quad \varphi=0,$$

a pro *negativní* q dle téhož vzorce

$$\cos\varphi = -1, \quad \text{tedy} \quad \varphi = \pi;$$

v prvním případě plyne tedy ze vzorce (20) přímo vzorec (13), ze vzorců pak (21) vzorce (14), kdežto v případě druhém plyne ze vzorců (20) a (23) dvojvzorec (16), ze vzorce (22) konečně vzorec (15).

Poznámka 1. Máme-li na zřeteli známou poučku,*) že binarní formě stupně *lichého*

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1} \between x, y)^{2n+1}$$

přísluší *kanonický* tvar

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k (x + \alpha_k y)^{2n+1},$$

kdež α_k představuje $(n+1)$ kořen rovnice kanonisující

$$\begin{vmatrix} \alpha^{n+1}, & \alpha^n, & \alpha^{n-1}, & \ldots, & 1 \\ a_{n+1}, & a_n, & a_{n-1}, & \ldots, & a_0 \\ a_{n+2}, & a_{n+1}, & a_n, & \ldots, & a_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{2n+1}, & a_{2n}, & a_{2n-1}, & \ldots, & a_n \end{vmatrix} = 0$$

a koëfficienty b_k určují se soustavou rovnic lineárních

$$\sum_{k=1}^{n+1} b_k \alpha_k^\lambda = a_\lambda, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

obdržíme v našem případě jednoduchém, kde

$$n = 1, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = p, \quad a_3 = 2q,$$

co kanonický tvar

$$b_1 (x + \alpha_1)^3 + b_2 (x + \alpha_2)^3,$$

kdež α_1, α_2 jsou kořeny rovnice

$$\begin{vmatrix} \alpha^2, & \alpha, & 1 \\ p, & 0, & 1 \\ 2q, & p, & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

*) Viz *Faà de Bruno* „Théorie des formes binaires," pag. 108.

kdežto součinitelé b_1, b_2 určují se rovnicovou soustavou jednoduchou

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 &= 1, \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 &= 0, \end{aligned} \tag{26}$$

takže se zdá, jakoby řešení rovnice kubické spůsobem tímto nejmodernějším bylo kratší nežli spůsobem dřívějším. Ale provedeme-li všechny substituce, jichž třeba, aby se přišlo k našemu vzorci (2), poznáme, že tato cesta, na dokonalejší theorii založená, není kratší. Neb naše rovnice (25) jest tu

$$\alpha^2 - \frac{2q}{p}\alpha - p = 0, \tag{27}$$

takže příslušné kořeny α_1, α_2, o nichž platí

$$\alpha_1\alpha_2 = -p,$$

jsou tu patrně

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{p}(q + \sqrt{q^2 + p^3}), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{p}(q - \sqrt{q^2 + p^3}), \end{aligned} \tag{28}$$

zároveň pak se obdrží řešením lineární soustavy (26)

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ b_2 &= \frac{-\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}, \end{aligned} \tag{29}$$

takže z kanonického tvaru plyne napřed

$$x[\sqrt[3]{b_1} + \sqrt[3]{b_2}] = -\alpha_1\sqrt[3]{b_1} - \alpha_2\sqrt[3]{b_2},$$

a dosadíme-li tam příslušné hodnoty za α_1, α_2, b_1, b_2, a zkrátíme-li, co možná, obdržíme konečně pro první kořen rovnice (1) vzorec

$$x_1 = -\sqrt[3]{p}[\sqrt[3]{\alpha_1} + \sqrt[3]{\alpha_2}], \tag{30}$$

který má týž tvar, jaký vzorec (2) udává, a pouze označením se liší, protože tu α_1, α_2 jsou kořeny rovnice jiné.

Uvážíme-li však, že z naší rovnice kanonisační (27) vznikne rovnice kovariantní (5), zavedeme-li tam $-\alpha$ za α, obdržíme ze vzorce (30) přímo

$$x_1 = \sqrt[3]{p}\,[\sqrt[3]{\alpha'_1} + \sqrt[3]{\alpha'_2}],$$

kdež α'_1, α'_2 jsou tedy kořeny rovnice (5), jež ve vzorci (2) nazvány byly α_1, α_2, takže poslední vzorec náš zcela souhlasí se vzorcem (2).

A tím odůvodněno tvrzení, že dřívější způsob řešení jest kratším, což se srovnává i se zkušeností, jakouž poskytuje methoda, uvádějící elementárním způsobem tvar (1) na tvar ryze kubický

$$u^3 = A.\text{*)}$$

Poznámka 2. Chceme-li přímo řešiti úplnou rovnici kubickou tvaru

$$a_0x^3 + 3a_1x^2 + 3a_2x + a_3 = 0,$$

můžeme buď užiti kanonisantu

$$\begin{vmatrix} \alpha^2, & \alpha, & 1 \\ a_2, & a_1, & a_0 \\ a_3, & a_2, & a_1 \end{vmatrix} = 0,$$

anebo jíti opačnou cestou od vzorce (5) ke všeobecnému; shledáme tu, že druhá tato cesta jest pohodlnější a rychleji poskytuje známých vzorců *Eisensteinových* **) nežli cesta přímá, jakouž teprva po dlouhých obratech přijde se k témuž cíli.***)

*) Viz *Dickmann* „Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niederen Mathematik“ pag. 51.

**) Viz *Crelle* „Journal f. d. reine u. angew. Math.“ Bd. 27.

***) *Faà de Bruno* „Théorie des formes binaires“ pag. 111.