Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 2, 78--89

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120898

Úlohy.

Řešení úlohy 26. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Karel Herzán*, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové.)

Mějmež $(n-1)$ různoběžku dělící rovinu v P_{n-1} části. Vedeme-li různoběžku n-tou, přibude celkem n částí nových. Protož jest

$$P_n = P_{n-1} + n$$

a dle obdoby dále

$$P_{n-1} = P_{n-2} + n - 1$$
$$P_{n-2} = P_{n-3} + n - 2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P_2 = P_1 + 2.$$

Sečtením rovnic těchto obdržíme

$$P_n = P_1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

čili, poněvadž $P_1 = 2$,

$$P_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + 1$$

a z toho konečně

$$P_n = \binom{n+1}{2} + 1.$$

Správné řešení této úlohy zaslali pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Doležal* a *Jan Andres* z VIII. tř. vyššího r. g. na Malé Straně v Praze, *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Josef Kábrle* a *Karel Novák* z VIII. tř. g. v Hradci Králové, *K. Fr. Janoušek* ze VII. tř. r. v Brně.

Řešení úlohy 27. z roč. XVI.

Buďtež M, N dva sdružené průměry ellipsy E, Q pak průměr sdružený s průměrem kolmým ku M. Trojúhelník *enp* má vrchol *e* na ellipse E, *n* na průměru N a přepona *np* jest rovnoběžna s normálou v *e*. Prostou úvahou vychází na jevo, že hledané místo geometrické musí se ellipsy E dotýkati v bodech průměru Q.

Pokládejme velkou osu $2a$ této ellipsy za osu X, malou $2b$ za osu Y pravoúhlé soustavy souřadné, A budiž směrnice průměru M, q průsečík prodloužené odvěsny *ep* s průměrem Q. Pro rozdíly odseček x_e, x_p, x_q bodů e, p, q, vychází cestou analytickou toto;

$$x_p - x_e = \frac{A^2 b^2 x_1 - A a^2 y_1}{A^2 a^2 + b^2},$$

$$x_e - x_q = \frac{A^2 b^2 x_1 - A a^2 y_1}{A^2 b^2 + a^2}.$$

Uvážíme-li ještě, že

$$(x_p - x_e) : (x_e - x_q) = \overline{pe} : \overline{eq},$$

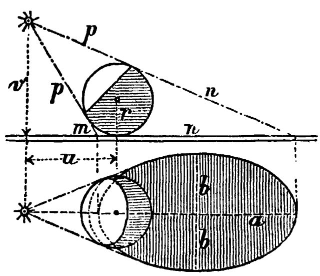
poznáváme, že

$$\overline{pe} : \overline{eq} = (A^2 b^2 + a^2) : (A^2 a^2 + b^2).$$

Z toho však jde, že poměr ten jest konstantní, tudíž hledané geom. místo ellipsa příbuzná ellipse dané pro průměr O jako osu příbuznosti.

Řešení zaslal p. *Karel Petr*, stud. VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 28. z roč. XVI.



Užívajíce téhož označení jako na obrazci připojeném, máme rovnice

$$p^2 = u^2 + (v - r)^2 - r^2 = u^2 + v(v - 2r)$$

$$(m + p)^2 = (u - m)^2 + v^2, \quad (n + p)^2 = (u + n)^2 + v^2,$$

ze kterých vypočítáme

$$m = \frac{rv}{p + u}, \quad n = \frac{rv}{p - u}.$$

Při $v > 2r$ jest mezí vrženého stínu ellipsa, jejíž hlavní osa $2a = m + n$; klademe-li $v - 2r = t$, bude

$$a = \frac{prv}{p^2 - u^2} = \frac{pr}{t}.$$

Místo, ve kterém se koule desky dotýká, jest dle věty *Dandelinovy* *) ohniskem této ellipsy, tudíž výstřednosť její $e = a - m$, vedlejší osa pak

*) Viz *Zahradník*, Analytická geometrie v rovině, str. 117.

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = r\sqrt{\frac{v}{t}}.$$

Značí-li tedy P plochu hlavního kruhu koule, S plochu vrženého stínu, jest

$$P : S = t\sqrt{t} : p\sqrt{v}.$$

Při zvláštních hodnotách daných najdeme

$$p = 45,\ m = 8,\ n = 72,\ a = 40,\ b = 24,$$
$$P : S = 27 : 125.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli, *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 29. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Ant. Nový*, technik v Praze).

Z prvé a třetí z rovnic daných ustanovíme

$$y = \frac{(ab - 1)x - a(b - 1)}{(a - 1)x},\quad z = \frac{c(a - 1)}{(ca - 1) - (c - 1)x},$$

a vloživše tyto hodnoty do druhé rovnice dané, nabudeme kvadratické rovnice pro x. Rovnice ta bude na pohled dosti složita; upravíme-li ji však náležitě, snadno poznáme, že ji lze krátiti součinem $(b - 1)(c - 1)(abc - 1)$. Po výkonu tom obdržíme rovnici velmi jednoduchou

$$x^2 - (a + 1)x + a = 0,$$

jejíž kořeny jsou patrně

$$x_1 = 1,\quad x_2 = a;$$

z hořejších rovnic najdeme pak

$$y_1 = 1,\quad y_2 = b,$$
$$z_1 = 1,\quad z_2 = c.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Lud. Novotný* a *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 30. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Václav Kadlec*, stud. VI. tř. české vyšší realné šk. v Praze.)

V lichoběžníku $abcd$ buď

$$ab \parallel cd,\ \overline{ab} = a,\ \overline{cd} = b,\ \frac{1}{2}(a + b) = p;$$

hledaná příčka ef nechť jest rovnoběžna s úhlopříčnou ac. Dle úlohy má býti $\triangle bef = \frac{1}{2} abcd$; ježto však

$$\triangle abc : \triangle acd = a : b,$$

a tedy také

$$\triangle abc : abcd = a : (a + b),$$

bude

$$\triangle abc : \triangle bef = a : \frac{1}{2}(a + b).$$

Převedena tudíž úloha daná na úlohu známou: trojúhelník abc rozděliti příčkou $ef \parallel ac$ v poměru $a : p$. Označíme-li $be = x$, jest platnou úměra

$$\triangle abc : \triangle bef = a^2 : x^2,$$

která ve spojení s předešlou poskytuje

$$a : x = x : p.$$

Odtud sestrojení samo sebou se podává.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Ant. Vík* z VIII. tř. v N. Bydžově, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Ant. Radešinský* z VIII. tř. v Litomyšli a *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Řešení úlohy 31. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Karel Klír* ze VI. tř. r. v Karlíně.)

Značí-li P plochu trojúhelníka, jest

$$r = \frac{abc}{4P}, \quad \varrho = \frac{P}{s};$$

odtud plyne

$$abc = 4\varrho r s.$$

Dosadíme-li do vzorce

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

obdržíme zmocněním

$$\varrho^2 s^2 = s^4 - s^3(a + b + c) + s^2(ab + bc + ca) - abcs$$

čili

$$\varrho^2 s^2 = s^4 - 2s^4 + s^2(ab + bc + ca) - 4\varrho r s^2$$

a odtud konečně

$$ab + bc + ca = \varrho^2 + 4\varrho r + s^2.$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Alois Tichý* ze VI. tř. r. v Karlíně, *K. Fr. Janoušek* ze VII. tř. a *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně, *Václav Kadlec* ze VI. tř. české vyšší r. šk.

v Praze, *Karel Petr* a *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Pan prof. *A. Strnad*, jenž úkol ten navrhl, podal elegantní řešení toto:

Nechť jest x kterákoli strana trojúhelníka a φ úhel proti ní ležící. Potom jest

$$x = 2r \sin \varphi, \tag{1}$$

$$\varrho = (s - x) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \tag{2}$$

Dle známého vzorce

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$$

a dle rovnice (1) najdeme

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - x^2}}{x};$$

dosadíce pak tuto hodnotu do rovnice (2), obdržíme

$$\varrho x = (s - x)(2r - \sqrt{4r^2 - x^2}).$$

Rovnice tato přiměřenou úpravou nabude tvaru racionálného

$$x^3 - 2sx^2 + (\varrho^2 + 4\varrho r + s^2) - 4\varrho rs = 0;$$

kořeny rovnice této jsou strany a, b, c trojúhelníka, o kterých tudíž mimo známé relace

$$a + b + c = 2s, \quad abc = 4\varrho rs$$

objevuje se též správným vztah

$$ab + bc + ca = \varrho^2 + 4\varrho r + s^2,$$

kterýž jsme dokázati měli.

Řešení úlohy 32. z roč. XVI.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

a) Pišme rovnici kružnice v obecném tvaru

$$K \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \tag{1}$$

a ustanovme součinitele m, n, p dle podmínek daných. Souřadnice bodů a, b musí vyhověti rovnici (1), pročež dosazením obdržíme

$$5n + p + 25 = 0, \quad 3m - 4n + p + 25 = 0;$$

z těchto dvou rovnic a rovnice (1) můžeme nyní m i n vyloučiti, a v rovnici tak nalezené

$$5x^2 + 5y^2 - (75 + 3p)x - (25 + p)y + 5p = 0 \tag{2}$$

zůstává pouze p dosud neurčeným. Toto ustanovíme z podmínky, že kružnice má se dotýkati přímky

(3) $$T_1 \equiv 3x - 4y + 25 = 0.$$

Vyloučíme-li z posledních dvou rovnic y, vyjde pro x rovnice kvadratická

(4) $$25x^2 - 2(75 + 6p)x + 125 - 4p = 0,$$

kteráž aby měla oba kořeny stejné, musí diskriminant její rovnati se nulle, t. j.:

$$9p^2 + 250p + 625 = 0.$$

Odtud najdeme $p_1 = -25, \quad p_2 = -\frac{25}{9},$

k čemuž přísluší hodnoty

$$m_1 = 0, \quad m_2 = -\frac{40}{3}; \quad n_1 = 0, \quad n_2 = -\frac{6}{40}.$$

Kružnice daným podmínkám vyhovující jsou tedy dvě a rovnice jich jsou:

(5) $$K_1 \equiv x^2 + y^2 - 25 = 0,$$
$$K_2 \equiv 9x^2 + 9y^2 - 120x - 40y - 25 = 0.$$

b) Značí-li ξ_i, η_i, r_i souřadnice středu s_i a poloměr kružnice K_i, jest dle rovnic právě vyvinutých

$$\xi_1 = \eta_1 = 0, \quad r_1 = 5; \quad \xi_2 = \frac{20}{3}, \quad \eta_2 = \frac{20}{9}, \quad r_2 = \frac{65}{9}.$$

c) Hledaný úhel φ rovná se úhlu poloměrů as_1, as_2 a protož

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\xi_2}{y_a - \eta_2} = \frac{12}{5},$$
$$\varphi = 67^0 22' 48{\cdot}5''.$$

d) Přímka T_2 určená normálnou rovnicí

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - 5 = 0$$

jest tečnou kružnice K_1; aby byla též tečnou ke K_2, musí vzdálenost bodu s_2 od T_2 rovnati se r_2, t. j.

$$\xi_2 \cos \alpha + \eta_2 \sin \alpha - 5 = -r_2$$

čili $$3 \cos \alpha + \sin \alpha = -1.$$

Bude proto $\alpha = -90^0$ a rovnice tečny

(6) $$T_2 \equiv y + 5 = 0.$$

e) Body, v nichž se T_1 kružnic K_1, K_2 dotýká, najdeme pomocí rovnice (4), kladouce do ní příslušné p; obdržíme tak souřadnice $(-3, 4)$; $\left(2\frac{1}{3}, 8\right)$.

Tečna druhá dotýká se kružnic v bodech

$$(0, -5); \quad \left(6\frac{2}{3}, -5\right).$$

f) Jelikož jest $T_2 \parallel X$, rovná se úhel ψ obou tečen odchylce přímky T_1 od X, totiž

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{3}{4}, \quad \psi = 36^0 52' 11{\cdot}6''.$$

Souřadnice průsečíku jsou patrně $(-15, -5)$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně, *K. Fr. Janoušek* ze VII. tř. r. v Brně, *Lud. Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 33. z roč. XVI.

(Podává *Ant. Radešinský,* stud. VIII. tř. v Litomyšli.)

Dán-li na ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ bod (x, y), jest příslušný poloměr

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

průvodiče pak jsou

$$r_1 = a + \frac{ex}{a}, \quad r_1 = a - \frac{ex}{a}.$$

Bude proto, jak snadným počtem shledáme,

$$r^2 + r_1 r_2 = a^2 + b^2.$$

Při hyperbole jest

$$r_1 = \frac{ex}{a} + a, \quad r_2 = \frac{ex}{a} - a$$

a tudíž

$$r^2 - r_1 r_2 = a^2 - b^2.$$

Při $a = b$ vyplývá odtud zajímavá věta: *Poloměr příslušný k bodu rovnostranné hyperboly jest střední měř. úměrnou průvodičů k témuž bodu náležejících.*

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Josef Kábrle* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Frant. Zelinka* ze VI. tř. r. v Brně a *K. A. Klír* ze VII. tř. r. v Karlíně.

Řešení úlohy 34. z roč. XVI.

a) Poněvadž tečny AC a BD jsou rovnoběžny, jest

$$AM : MD = AC : BD;$$

avšak $AC = CO, \quad BD = OD,$
pročež $AM : MD = CO : OD,$
i jest tedy $MO \parallel AC$. Buďtež N a P body, v nichž přímka OM průměr AB a kružnici seče. Jest patrno, že

$$OM = \tfrac{1}{2}\, ON = \tfrac{1}{4}\, OP,$$

protož jest geometrickým místem bodu M kružnice podobně položená s kružnicí danou vzhledem k středu podobnosti O a poměru $\frac{1}{4}$.

b) Střed S daného kruhu budiž počátkem, přímka SO osou X pravoúhlé soustavy souřadnic. Tečnám AC a BD náležejí rovnice

(1) $$x \cos \varphi + y \sin \varphi - r = 0,$$

(2) $$x \cos \varphi + y \sin \varphi + r = 0,$$

kdež $\sphericalangle\, OSA = \varphi, \quad SA = r.$

Souřadnice bodů A, B, C, D jsou:

$$x_1 = r \cos \varphi, \qquad x_2 = -r \cos \varphi,$$
$$y_1 = r \sin \varphi, \qquad y_2 = -r \sin \varphi,$$
$$x_3 = r, \qquad x_4 = r,$$
$$y_3 = r\,\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad y_4 = -r\,\frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Rovnice přímky AD jest

$$y - r \sin \varphi = \frac{\sin^2 \varphi + 1 + \cos \varphi}{\sin \varphi\,(\cos \varphi - 1)}\,(x - r \cos \varphi),$$

a přímka BC má rovnici

$$y + r \sin \varphi = \frac{\sin^2 \varphi + 1 - \cos \varphi}{\sin \varphi\,(1 + \cos \varphi)}\,(x + r \cos \varphi).$$

Rovnice tyto můžeme též psáti takto:

$$x \sin^2 \varphi - y \sin \varphi \cos \varphi + y \sin \varphi + (x - r) \cos \varphi + (x - r) = 0,$$
$$-x \sin^2 \varphi + y \sin \varphi \cos \varphi + y \sin \varphi + (x - r) \cos \varphi - (x - r) = 0.$$

Sečtením a odečtením rovnic těchto obdržíme

(3) $$y \sin \varphi + (x - r) \cos \varphi = 0,$$

(4) $$x \sin^2 \varphi - y \sin \varphi \cos \varphi + (x - r) = 0.$$

Z rovnice (3) lze obdržeti napřed

$$\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{(x - r)^2}{y^2},$$

a potom dle známé vlastnosti úměry

(5) $$\sin^2 \varphi = \frac{(x - r)^2}{(x - r)^2 + y^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{y^2}{(x - r)^2 + y^2}.$$

Z rovnic (4) a (5) můžeme již vyloučiti úhel φ, i obdržíme

$$\frac{x(x-r)^2}{(x-r)^2+y^2}+\frac{y^2(x-r)}{(x-r)^2+y^2}+(x-r)=0,$$

odkudž plyne po krátkém zjednodušení

$$2(x^2+y^2)-3rx+r^2=0.$$

Geometrickým místem průsečíku M jest tedy kružnice poloměru $r'=\frac{r}{4}$ a středu S' $\left(\frac{3}{4}r,\ 0\right)$.

Poznámka. Kružnice tato a hyperbola, která má své ohnisko ve středu S kružnice dané a jejížto osa realná OQ co do směru i délky rovná se poloměru SO, jsou polárně reciprokými křivkami vzhledem ke kruhu danému.

Je-li průměr AB pevný a tečna T pohyblivá, jest geom. místem bodu M ellipsa, neboť jest

$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{AB},\quad \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}.$$

Správné analytické řešení této úlohy zaslali pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 35. z roč. XVI.

a) V bodu P, který poloměr OD rozpoluje, vztyčme kolmici k tomuto poloměru, která nechť protíná přímku OM v bodu N. Pak jest

$$\mathrm{OM} \parallel \mathrm{AC},\quad \mathrm{MP} \parallel \mathrm{OC} \parallel \mathrm{BD},$$

tedy

$$\sphericalangle\, \mathrm{OMP}=\mathrm{ACO},\quad \sphericalangle\, \mathrm{MPN}=\mathrm{OCD}$$

a také

$$\sphericalangle\, \mathrm{OMP}=\mathrm{MPN}.$$

Proto jest MN $=$ NP, což jest známá vlastnost strophoidy, mající bod P za bod dvojný, střed O za vrchol a tečnu T za asymptotu.

b) Budiž $\sphericalangle\, \mathrm{DOC}=\varphi$, tedy $\sphericalangle\, \mathrm{DOA}=2\varphi$; souřadnice bodů B a C jsou pak

$$x_1=-r\cos 2\varphi,\qquad y_1=r\sin 2\varphi,$$
$$x_2=r,\qquad y_2=r\operatorname{tg}\varphi.$$

Bod M půlící BC má souřadnice

$$x = r\frac{1-\cos 2\varphi}{2} = r\sin^2\varphi,$$

$$y = r\frac{\operatorname{tg}\varphi - \sin 2\varphi}{2} = \frac{r}{2}\operatorname{tg}\varphi\,(1-2\cos^2\varphi).$$

Vyloučíme-li z těchto dvou rovnic funkce úhlu φ, obdržíme rovnici místa geometrického. Dle prvé z nich jest

$$\cos^2\varphi = \frac{r-x}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{x}{r-x}};$$

dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice druhé, najdeme, kladouce $r = 2a$, po krátkém zjednodušení

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}.$$

Odtud opět jest patrno, že geom. místem bodu M jest strophoida.

Tuto úlohu analytickým způsobem správně řešili pp.: *Karel Petr* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 36. z roč. XVI.

Buďtež polárné souřadnice bodu C

$$AC = \varrho, \quad \sphericalangle BAC = \alpha = 2\omega;$$

dále položme

$$AB = AA' = a, \quad \sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle ACB = \gamma.$$

Jest patrno, že $\beta = 90^0 - \frac{\omega}{2}$, tedy

$$\sin\beta = \cos\frac{\omega}{2} = \cos\frac{\alpha}{4};$$

dále jest $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\left(90^0 + \frac{3\alpha}{4}\right) = \cos\frac{3\alpha}{4}.$

Dosadíme-li hodnoty za $\sin\beta$ a $\sin\gamma$ do úměry

$$\varrho : a = \sin\beta : \sin\gamma,$$

obdržíme $\varrho : a = \cos\frac{\alpha}{4} : \cos\frac{3\alpha}{4}$

čili $\frac{\varrho + a}{\varrho} = \frac{\cos\frac{\alpha}{4} + \cos\frac{3\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}} = 2\cos\frac{\alpha}{2},$

a odtud konečně polárnou rovnici místa geometrického

$$\varrho = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2} - 1}.$$

Chceme-li najíti rovnici této křivky v pravoúhlé soustavě souřadnic, která má počátek ve vrcholu A a osu X v přímce AB, dejme rovnici obdržené tvar

$$2\varrho \cos\frac{\alpha}{2} = a + \varrho,$$

načež umocněním obdržíme

$$4\varrho^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = a^2 + 2a\varrho + \varrho^2;$$

avšak $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{\varrho + x}{2}.$

Dosadíme-li tuto hodnotu do předešlé rovnice, najdeme po krátké redukci

$$\varrho^2 - a^2 = 2\varrho\,(a - x),$$

a položíme-li nyní $\varrho^2 = x^2 + y^2$, bude konečně

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4\,(x^2 + y^2)\,(a - x)^2.$$

Hledaná křivka jest stupně 4ho, souměrná ku ose X, má v bodu B bod trojnásobný a protíná X ještě v bodu $x = -\frac{a}{3}$. Dvě realné asymptoty tvoří s osou X úhly $\pm 60^0$. V jednotlivých bodech křivky lze snadno sestrojovati tečny; najdeme totiž, že polárná subtangenta má hodnotu a cosec $\frac{\alpha}{2}$.

Řešení této úlohy podali pp.: *Karel Petr* a *Ludvík Novotný* ze VII. tř. g. v Chrudimi a *Ant. Radešínský* z VIII. tř. v Litomyšli.

Řešení úlohy 23. a 25. zaslal též p. *Ant. Radešínský*, stud. VIII. tř. v Litomyšli.*)

---

*) Tímto jsme dokončili řešení úloh z roč. XVI.

Úloha 7.

Při kterých hodnotách veličiny x jest hodnota zlomku

$$z = \frac{2x^3 - 3x^2 - 17x + 30}{8x^3 - 42x^2 + 49x + 15}$$

rovna nulle, kdy jest nekonečna a kdy neurčita? Která jest v případě posledním pravá hodnota zlomku? Prof. *A. Strnad.*

Úloha 8.

V lichoběžníku sestrojiti příčku rovnoběžnou s půdicemi a rovnou jich harmonickému průměru. *Týž.*

Úloha 9.

Ustanoviti středový úhel kulové výseče, při které plocha obliny kuželové rovná se ploše vrchlíka. *Týž.*

Úloha 10.

Na břehu jezera stojí věž výšky $v = 40\,m$; s vrcholu jejího spatřiti lze téměř blízké hory v úhlu $\alpha = 5^0 31'$ nad obzorem a obraz temene v hladině jezerní v úhlu $\beta = 5^0 54'$ pod obzorem. Vypočítati výšku hory nad hladinou jezera a vzdálenosť její od věže. *Týž.*

Úloha 11.

Jest dán kruh a v bodu O tečna T, pohyblivá tečna kruhu v bodu A protíná tečnu T v bodu P; přenesme na tečnu onu od bodu P délku PM = AP. Má se dokázati, že geom. místem bodu M jest cissoida. Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 12.

Jest dán kruh a na něm pevný bod O, dvě rovnoběžné tečny AM, BN dotýkají se kruhu toho v bodech A a B; tečna AM protíná přímku BO v bodu M, tečna BN přímku AO v bodu N. Má se nalézti geom. místo bodu Q půlícího délku MN.

Týž.