Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička
O sploštěnosti země

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 256--267

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120892

Bessela, *Airyho* a jinými, kteří vždy více protříbili všechny otázky sem spadající. A výsledek? Výsledek jest ten, že posud přes všechny vynikající v oboru tom práce nejsme u cíle, že ještě mnoho zbývá na poli theorie i skutečného měření, by tvar země a okolnosti s ním souvisící přesně byly určeny.

Nynější stav věcí můžeme vysloviti takto: Tvar země liší se v míře jen nepatrné od rotačního ellipsoidu; pro ellipsicitu čili sploštěnost jeho obdrželi:

a) *Bessel* z desíti měření stupňů poledníkových $\varepsilon_1 = \frac{1}{299.15}$.

b) *Sabine* z diskusse pozorování kyvadlových $\varepsilon_1 = \frac{1}{289.1}$.

c) *Laplace* z nepravidelností v pohybu luny $\varepsilon_1 = \frac{1}{305.05}$.

d) *Ivory* přímým výpočtem, při němž předpokládal, že hutnost země menší se od středu (5.48) ku povrchu, $\varepsilon_1 = \frac{1}{289}$.

Souhlas je dosti značný, není však úplný; zbývá pak ještě dále otázka, zdali nelze tvar země nejlépe zobraziti ellipsoidem trojosým. *Jacobi* dokázal, že při jistém poměru os může ellipsoid takový též býti tvarem rovnovážným. Zdali jím je při naší zemi skutečně, o tom rozhodne při pilném v oboru tom pracování budoucnost snad nedaleká.

O sploštěnosti země.

Pro žáky středních škol sestavil

dr. F. J. Studnička.

V mathematickém zeměpisu se učí, že země naše má tvar sploštěné koule, a že průřez, vedený osou zemskou, může se považovati za ellipsu, jejíž velká osa připadá do roviny rovníkové, malá tedy splývá s osou zemskou, takže sploštěnost se měří poměrem

$$\frac{a-b}{a} = s,$$

značí-li a, b známé tyto poloosy. Při tomto výkladu se pak zároveň uvádí, že měřením stupňů poledníkových se přichází ku poznání velikosti poloos těchto a, b, a končí se poznámkou historickou, která měření tohoto druhu byla dosud provedena a jaké jsou nejpřesnější výsledky dosavadní. A tím bývá celá tato důležitá věc odbyta, ač vnitřní spojení a podrobné mathematické provedení úsudků zde se sbíhajících jedině poskytuje pravý názor a úplné přesvědčení.

Poněvadž úkol tento jest zároveň dobrým cvičištěm pro abiturienty našich středních škol, neváhám zde příslušné výklady podle *Martusova* zeměpisu hvězdářského, o němž tuto byla na str. 199. zpráva podána, dopodrobna vyvinouti a sestaviti s tím přáním jediným, aby každý čtenář, pokud toho má zapotřebí, všechny výpočty, zejmena i logarithmické, podle tohoto udání se snažil opakovati a výsledky porovnati.

Takovýmto podružným počítáním, kde známe výsledky zcela přesně, nejlépe se cvičíme v různých praktikách početních, majíce zároveň nevšední potěšení z toho, když i nejposlednější místo desetinné s naším výsledkem souhlasí.

Ačkoli sploštění země není veliké, takže poledníková ellipsa není značně výstředna, musíme přece pro jasnější vyniknutí některých přímek pomocných položiti názoru svému za základ ellipsu valné výstřednosti APQ (ob. 3.), při čemž značí AQ rovník, OT poloosu malou procházející točnou, P pak polohu nějakého místa na povrchu zemském, dejme tomu *Prahy*, takže souřadnice pravoúhlé tu jsou

$$PC = y, \quad OC = x.$$

Při tom uzavírá poloměr OP a normala KP s osou úseček OA úhel

$$\sphericalangle POA = \beta, \quad \sphericalangle PKA = \varphi,$$

při čemž měří β *geocentrickou*, φ pak *geografickou* šířku místa P; zároveň z výkresu patrno, kde PS jest tečnou ellipsy v bodu P, že platí

$$\sphericalangle PKA = \sphericalangle SPC = \sphericalangle NPY = \varphi,$$

takže φ jest též *polarní výška* bodu P.

A tu především nutno vyjádřiti φ pomocí pravoúhlých souřadnic příslušného bodu, což přímo*) se provede takto:

*) Uvážíme-li, že $\sphericalangle PSX = \tau$, můžeme i rovnici tečny vzíti ku pomoci.

Rovnice ellipsy jest, jak známo,

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

a máme-li na zřeteli jiný bod, dejme tomu P_1, jehož souřadnice jsou x_1, y_1, platí podobně

$$y_1^{\,2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^{\,2}).$$

Vezme li se rozdíl na obou stranách a rozvede-li se příslušně, obdrží se tedy napřed

$$(y + y_1)(y - y_1) = \frac{b^2}{a^2}(x_1 + x)(x_1 - x)$$

a po jednoduchém přeložení členů

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x}{y_1 + y};$$

jakož se snadno pozná, přibliží-li se bod P_1 bodu P tak, že stane se sousedním a přímka těmito body vedená tedy *tečnou*, značí poměr na levé straně se vyskytující kotangentu úhlu φ, takže kladouce pro zmíněné sousedství obou bodů

$$x = x_1, \quad y = y_1,$$

konečně obdržíme hledaný vzorec

$$\cot \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \qquad (1)$$

Poněvadž se při ellipse liší směr poloměru OP a normaly KP, nutno dále vyšetřiti, jak veliký jest rozdíl tento se zřetelem k ose velké čili v jaké vzdálenosti od středu O protíná normala KP velkou poloosu, tedy jak veliká jest vzdálenost OK. A tu na první pohled patrno, že

$$OK = OC - KC$$
$$= x - y \cot \varphi,$$

takže užijeme-li vzorce (1) a výrazu pro číselnou výstřednost ellipsy

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{e^2}{a^2} = \varepsilon^2, \qquad (2)$$

konečně obdržíme vzorec (3)

$$OK = \varepsilon^2 x,$$

z něhož patrno, že tento rozdíl jest tím menší, čím více se ε blíží nulle, jíž se rovná u kruhu.

Sestrojíme-li i v sousedním bodu P_1 normalu, protne první normalu KP v bodu M, při čemž sektor PMP_1, v němž MP

i MP_1 stojí kolmo na oblouku PP_1, shoduje se co do této vlastnosti s kruhem, o němž se též zkráceně tvrdí, že poloměr tu stojí kolmo na obvodu; i praví se tedy, že M jest *středem* a MP *poloměrem* křivosti ellipsy v bodu P.

Abychom pak vyšetřili velikost tohoto poloměru, hledejme napřed vzdálenost středu M od rovníku, tedy délku $MH = z$. Tu platí především se zřetelem ku bodu P

$$HO = OK - KH$$

$$= \varepsilon^2 x - z \cot\varphi = \varepsilon^2 x - z \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

a podobně se zřetelem ku bodu P_1

$$HO = \varepsilon^2 x_1 - z \cot\varphi = \varepsilon^2 x_1 - z \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1},$$

takže porovnáme-li tyto výrazy, obdržíme

$$\varepsilon^2 x - z \frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = \varepsilon^2 x_1 - z \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1}$$

a po jednoduchém členů přeložení

$$\varepsilon^2 (x_1 - x) y y_1 = \frac{b^2}{a^2} (x_1 y - x y_1) z;$$

přidáme-li na pravé straně v závorkách $\pm xy$ a rozvedeme-li pak, povstane tam

$$(x_1 - x) y + (y - y_1) x$$

a dělíme-li celou rovninu rozdílem $x_1 - x$, bude konečně

$$\varepsilon^2 y y_1 = \frac{b^2}{a^2} \left(y + x \frac{y - y_1}{x_1 - x}\right) z;$$

se zřetelem ke známé hodnotě poměru rozdílů souřadnicových bude pak dále

$$\varepsilon^2 y y_1 = \frac{b^2}{a^2} (y + x \cot\varphi),$$

z čehož plyne pomocí vzorce (1)

$$\varepsilon^2 y = \left(\frac{b^2}{a^2} + \cot^2\varphi\right) z;$$

a poněvadž platí, jak známo,

$$\frac{b^2}{a^2} + \cot^2\varphi = \frac{a^2 - e^2}{a^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi} - \varepsilon^2,$$

povstane z poslední rovniny vzorec hledaný

$$z = \frac{\varepsilon^2 \sin^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot y, \tag{4}$$

z něhož opět patrno, že vzdálenost z se stává tím menší, čím více se ε blíží nulle, jíž se rovná u kruhu.

Znajíce nyní z, vyjádříme snadno vzdálenost bodu P od roviny rovníkové čili délky y pomocí poloměru křivosti

$$PM = \varrho;$$

jestiť patrně na výkresu našem

$$y = PI - MH$$

$$= \varrho \sin\varphi - z = \varrho \sin\varphi - \frac{\varepsilon^2 \sin^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} y,$$

z čehož plyne pro y hodnota

$$y = \varrho \sin\varphi \, (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi). \qquad (5)$$

Pomocí těchto vzorců ustanoví se snadno hodnoty poloos a, b a ε.

Dosadíme-li totiž do středové rovnice ellipsy hodnotu

$$y = x \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}\varphi,$$

plynoucí ze vzorce (1), povstane z ní napřed

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2\varphi\right) = 1,$$

a vyjádříme-li b pomocí ε a převedeme-li výraz v závorkách obsažený na stranu pravou,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi};$$

podobně obdržíme ze vzorce (5)

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{\varrho^2 \sin^2\varphi}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2,$$

takže sečteme-li na obou stranách, obdržíme se zřetelem ke středové rovnici ellipsy napřed

$$1 = \frac{\cos^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} + \frac{\varrho^2 \sin^2\varphi}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^2;$$

odstraníme-li pak jmenovatele $1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi$, krátíce na obou stranách činitele $\sin^2\varphi$, na levé straně složeného z $1 - \cos^2\varphi$, zjednáme si

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{\varrho^2}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^3,$$

z čehož plyne řešením podle b vzorec konečný

$$b = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)^{3/2}. \qquad (6)$$

Pro velkou pak poloosu platí vzorec

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \qquad (7)$$

Abychom konečně i pro ε si zjednali hodnotu z měření plynoucí, uvažme, že pro jiné místo povrchu zemského platí podle vzorce (6)

$$b = \frac{\varrho}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} (1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi_1)^{3/2},$$

takže porovnáním obou výrazů obdržíme napřed

$$\varrho_1 (1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi_1)^{3/2} = \varrho (1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi)^{3/2},$$

a odmocníme-li příslušným spůsobem,

$$\varrho_1^{2/3} (1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi_1) = \varrho^{2/3} (1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi),$$

kteroužto rovnici nutno řešiti podle ε^2, načež povstane

$$\varepsilon^2 = \frac{\varrho^{2/3} - \varrho_1^{2/3}}{\varrho^{2/3} sin^2 \varphi - \varrho_1^{2/3} sin^2 \varphi_1}. \qquad (8)$$

Jak patrno, uvedeno zde počítání konečně na udání hodnoty φ a φ_1, jakož i příslušného poloměru ϱ a ϱ_1; zeměpisná šířka konečných dvou bodů daného oblouku poledníkového s ustanoví se pak známými prostředky hvězdářskými. A tu platí, značí-li

$$\varphi - \varphi_1 = \alpha,$$

podle známé srovnalosti

$$\varrho = \frac{s}{\alpha} \cdot \frac{obvod''}{2\pi},$$

aneb uvážíme-li, že

$$360^0 = 1296000'',$$

$$\varrho = \frac{648000}{\pi} \cdot \frac{s}{\alpha}, \qquad (9)$$

při čemž pro logarithmické počítání jednou pro vždy se vyhledá

$$lg \frac{648000}{\pi} = 5{\cdot}3144251{,}3.$$

Abychom nyní ukázali na určitém případě, jak se počet příslušný provádí, položme za základ *ruské* měření poledníkového oblouku, sahající od *Fuglenäsu* severně od Hammerfestu přes *Derpt* až k *Staro-Nekrasovce* u Ismailu poblíž ústí Dunaje, při čemž ustanovena severní šířka zeměpisná

Fuglenäsu . . .	70⁰	40′	11″23
Derptu	58⁰	22′	47·56
St. Nekrasovky .	45⁰	20′	2·94,

takže zeměpisná šířka středního bodu oblouku prvního jest

$$\varphi = 64^0\ 31'\ 29''395,$$

a podobně oblouku druhého, jižnějšího

$$\varphi_1 = 51^0\ 51'\ 25''25;$$

zároveň pak měří oblouk severní

$$\alpha = 12^0\ 17'\ 11''23 = 44243''67$$

a podobně oblouk jižní

$$\alpha_1 = 13^0\ 2'\ 44''62 = 46964''62.$$

Velmi bedlivým měřením ustanoveno konečně, že vzdálenost trigonometrického bodu u Fuglenäsu od středu věže hvězdárny Derptské měří

$$s = 1370{\cdot}2159^{\text{km}}$$

a odtud až k bodu trigonometrickému u St. Nekrasovky

$$s_1 = 1451{\cdot}5730^{\text{km}},$$

kteréžto měření provedeno během 40 let, počínajíc rokem 1816 a sice za dozoru slavného hvězdáře *W. Struveho* a generala *Tennera.*

Pomocí logarithmů sedmimístných vypočte se pak podle vzorce (9) v případě prvním

$$\varrho = 6387{\cdot}973^{\text{km}}$$

a podobně v případě druhém

$$\varrho_1 = 6375{\cdot}192^{\text{km}},$$

takže podle toho a vlastně dříve již podle známého logarithmu obou ϱ se ustanoví

$$\varrho^{2/3} = 344{\cdot}27751$$
$$\varrho_1^{2/3} = 343{\cdot}81819,$$

načež podle vzorce (8) nutno ustanoviti napřed

$$\varepsilon^2 = 0{\cdot}006\ 7626$$

a pak tedy

$$\varepsilon = 0{\cdot}082\ 235 = \frac{1}{12{\cdot}16}.$$

Znajíce ε, ϱ, φ, vypočteme dále podle vzorce (6) a (7) pro severní oblouk

$$a = 6378{\cdot}368^{\text{km}}$$
$$b = 6356{\cdot}765^{\text{km}},$$

z čehož plyne pro sploštění výraz poměrný

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{295{\cdot}2538},$$

kdežto oblouk jižní poskytuje hodnoty jen málem se lišící

$$a = 6378{\cdot}366^{\text{km}}$$
$$b = 6356{\cdot}763^{\text{km}}$$

a při této nepatrné odchylce sploštění skoro stejné, totiž

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{295{\cdot}2537}.$$

Co arithmetický průměr obou měření plynou pak výsledky tyto:

Poloměr rovníkový $a = \mathbf{6378367^m}$
„ **točnový** . $b = \mathbf{6356764^m}$
rozdíl obou . . $a - b = \mathbf{21603^m}$
sploštění země $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{295{\cdot}25}$.

Podle toho jest tedy osa zemská o $43{\cdot}2^{\text{km}}$ kratší nežli průměr rovníkový.

Abychom konečně poznali, jak přesnost měření délky s a s_1 jest podmínkou správnosti výsledku konečného, dejme tomu, že by se byl severní oblouk jen o 10^m větším, jižní pak o 10^m menším býti shledal a naopak a počítejme s těmito daty znova; shledáme tu ϱ větší o 47^m, ϱ_1 menší o $45{\cdot}5^m$, a se sníží o 20^m, b pak o 174^m, takže sploštění bude

$$\frac{b-a}{a} = \frac{1}{293{\cdot}16},$$

kdežto podle jižního oblouku se a sníží o 19^m a b jen o 173^m, což vede k témuž výsledku pro velikost sploštění; průměrně pak bude

$$a = 6378348^m$$
$$b = 6356590^m.$$

Kdybychom pak severní oblouk shledali o 10^m menším, jižní pak o 10^m větším býti, vyšlo by počtem na jevo, že průměrem jest

$$a = 6378388^m$$
$$b = 6356937{\cdot}5^m$$
$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297{\cdot}35}.$$

Jak patrno, zmenší se v prvním případě obě poloosy nepatrně, zvětší však značně zlomek udávající sploštění, kdežto v druhém případě opačný zjev nastává, z čehož zároveň i poznáváme, jak nesmírné bedlivosti jest zapotřebí při geodätickém měření tohoto druhu.

Znajíce délky poloos, můžeme nyní snadno vypočítati krychlový obsah země, považované za rotační ellipsoid čili těleso povstávající otočením ellipsy kolem své malé osy; obdrží se tu vzorec

$$O = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b,$$

takže kdybychom chtěli ustanoviti poloměr koule mající *stejný obsah*, řešiti musíme rovnici

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b,$$

z níž se obdrží

$$r = \sqrt[3]{a^2 b} = 6371158^{\mathrm{m}}. \tag{10}$$

Z výsledku tohoto patrno, že rozdíl

$$a - r = 7209^{\mathrm{m}}$$
$$r - b = 14394^{\mathrm{m}},$$

takže by kruh poloměru r, mající týž střed co ellipsa poloos a, b, protínal ji s každé strany ve dvou bodech, koule tedy protínala ellipsoid ve dvou kruzích od rovníku stejně daleko vzdálených, jichž zeměpisnou šířku podle předešlého taktéž lze vypočítati.

Především nutno ustanoviti poměr mezi šířkou zeměpisnou a geocentrickou.

Jak z výkresu našeho patrno, jest

$$tg\,\beta = \frac{y}{x},$$

takže užijeme-li vzorce (1), přímo obdržíme

$$tg\,\beta = \frac{b^2}{a^2}\,tg\,\varphi. \tag{11}$$

A uvážíme-li, že o průsečných bodech kruhu a ellipsy platí

$$x = r\cos\beta, \quad y = r\sin\beta,$$

promění se analytická rovnice ellipsy v

$$b^2 r^2 \cos^2\beta + a^2 r \sin^2\beta = a^2 b^2;$$

uvedeme-li vše na jmenovatele

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1 + tg^2\beta},$$

zjednáme si dále

$$b^2 r^2 + a^2 r^2 tg^2\beta = a^2 b^2 (1 + tg^2\beta),$$

z čehož jde řešením

$$tg^2\beta = \frac{b^2 (a^2 - r^2)}{a^2 (r^2 - b^2)},$$

a užijeme-li vzorce (11), konečně

$$cot\,\varphi = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}.$$

Pomocí vzorce (10) přemění se pak odmocnina, takže povstane

$$cot\,\varphi = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^{4/3}b^{2/3} - b^2}{a^2 - a^{4/3}b^{2/3}}} = \frac{b^{4/3}}{a^{4/3}}\sqrt{\frac{a^{2/3} + b^{2/3}}{a^{2/3}}};$$

a zavedeme-li k vůli snadnějšímu počítání úhel pomocný vzorcem

$$cot\,u = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3},$$

obdržíme konečně pro hledanou šířku vzorec

$$cot\,\varphi = \frac{cot^4 u}{sin\,u},$$

z něhož příslušným řešením plyne

$$\varphi = 35^0\ 24'\ 6''8.$$

Rovnoběžník tímto úhlem určený běží na severní polokouli přes severní cíp ostrova Kandie (Krety) a Alžírska, na jižní pak polokouli jest asi $^2/_3{}^0$ vzdálen od nejjižnějšího cípu Afriky, jakož na dobré mapě snadno si vyhledáme.

Všechna místa zemského povrchu, připadající mezi tyto dva rovnoběžníky, mají tedy od středu zemského *větší* vzdálenost nežli jest poloměr koule r, kdežto místa blíže k polům položená čili větší zeměpisnou šířku mající, nežli jest předcházející φ, *menší* vzdáleností nežli r se vyznamenávají, což i dopodrobna lze vyšetřiti, určíme-li r_1 co vzdálenost určitého místa od středobodu zemského pomocí vzorců snadno odvoditelných

$$tg\,\omega = \frac{b}{a}\,tg\,\varphi, \tag{12}$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a}\,tg\,\omega, \tag{13}$$

$$r_1 = a\frac{cos\,\omega}{cos\,\beta}. \tag{14}$$

Pro Prahu na př. platí

$$\varphi = 50^0\ 5'$$
$$\omega = 49^0\ 59'\ 15''$$
$$\beta = 49^0\ 53'\ 31''$$
$$r_1 = 6365727^m.$$

Jak velké tu vyskytují se rozdíly mezi r a r_1, poznati lze z následujícího sestavení, kdež vytknuto několik bodů na severní polokouli země naší, při čemž značí v výšku nadmořskou:

φ	Místo	$r_1 - r$	v	$r_1 - r + v$
90°	Severní točna	—14394^m	0^m	—14394^m
71°15'	Severní mys Evropy	—12144	500	—11644
60°	Christiania	— 8958	8	— 8950
52°31'	Berlín	— 6351	34	— 6317
50° 5'	Praha	— 5431	200	— 5231
46°33'	Finsteraahorn (Alpy)	— 4129	4275	+ 146
45°50'	Montblank	— 3860	4810	+ 950
45° 6'	Turin	— 3584	250	— 3334
42°33'	Maladetta (Pyreneje)	— 2625	3480	+ 855
40°	Cuenza u Madridu	— 1671	1300	— 371
37°46'	Aetna	— 851	3330	+ 2479
35°24'	Břeh Kandie	± 0	0	0
28°	Pic de Teneriffa (Kanary) . .	+ 2478	3710	+ 6188
28°	Everest v Himalaji	„	8840	+11318
15°	Vulkan na Fuego (Kapverd.) .	+ 5773	2400	+ 8173
0°	Rovník	+ 7209	0	+ 7209
— 1°30'	Chimborasso	+ 7196	6530	+13726

Tabulka tato jest nanejvýš poučná, uvážíme-li, co by se stalo, kdyby země naše přestala se točiti*) a moře tudíž s rovníkových krajin steklo k točnám, takže by povrch jeho představoval kulovou plochu poloměru r.

Na rovníku by se hladina mořská snížila o 7209^m, takže by všechny části moře, mající menší hloubku, octly se tu na suchu; pás zeměpisné šířky ± 35° 24′ zůstal by nezměněn; točna konečně ponořila by se 14394^m hloub pod vodu nežli nyní. Krásný kužel Pic de Teneriffa trčel by o 2478^m výše nad hladinu mořskou, kdežto by Montblank stal se vrchem jen 950^m vysokým a celé Čechy se Sněžkou byly vodou zality, ba Praha byla 5231^m hluboko pod povrchem mořským; tam, kde nyní rozprouděn jest čilý život národní, sotva by živořil nějaký ba-

*) Viz Studnička „O konečném osudu naší zeměkoule“ Časopis pro pěst. math. a fys. R. IX. pag. 8.

thybius a vůbec by poměr obyvatelnosti zemské nesmírně se změnil, o čemž poučuje nás i vypočtení povrchu kulového z ellipsoidu vyčnívajícího a sotva $\frac{5}{12}$ celého povrchu obnášejícího.

Konečně poznáváme z celého pojednání tohoto, jak skrovných vědomostí mathematických jest zapotřebí, aby se tyto a podobné vývody mathematického zeměpisu pochopily, a máme zároveň dosti dobrou ukázku ze spisu Martusova, kterouž se zajisté odporučení dříve zde podané co nejvíce podporuje.

O křivosti ploch.

Napsal

Jaroslav Simonides.

V následujících řádcích se chceme pokusiti některé poučky ze všeobecné theorie ploch, vyjádřených pomocí dvou neodvisle proměnných parametrů, dokázati cestou přímou, kdežto obyčejně jich důkaz pomocí jistých identických rovnic se vede.

Jsou-li u, v dvě neodvisle proměnné, f, φ, ψ tři libovolné funkce, můžeme každou plochu určiti následujícími třemi rovnicemi.

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v). \tag{1}$$

Význam těchto parametrů leží na bíledni. Udělíme-li jednomu z nich stálou hodnotu ku př. $u = u_0$, určují nám rovnice (1) jistou křivku na dané ploše; pro všechny možné hodnoty u_0 obdržíme tedy celý systém křivek, tak že každým bodem plochy jedna prochází; jelikož o parametru v platí totéž, nahlížíme, že daná plocha jest pokryta dvěma soustavami křivek, jež mají tu vlastnost, že každá křivka jednoho systemu protíná všechny křivky druhého systemu, kdežto křivky téhož systemu se nikdy neprotínají. Z toho plyne, že v každém bodu plochy se dvě křivky protínají; udáním hodnot jistému bodu příslušících jsou tyto dvě křivky, následovně i bod sám určen.

Volmę si zvláštní případ, na př. hyperbolický paraboloid, jehož rovnice jest:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$