Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

August Seydler

# Dějiny všeobecné gravitace. [III.]

*Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, Vol. 9 (1880), No. 5, 243--256

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120891

kuželi příslušných. Této vlastnosti kužele řídícího užívá se v deskriptivní geometrii hojně k řešení úloh k rovinám tečným plochy rozvinutelné se vztahujících, jako určení tečných rovin daným bodem v prostoru procházejících, neb k určité přímce neb rovině rovnoběžných atd. Při analytickém vyšetřování, jehož jsme se v předcházejícím výhradně přidrželi, řešiti lze úlohy takové bezprostředně bez řídícího kužele, pouze užitím rovnice (5) roviny tečné plochy rozvinutelné.

---

# Dějiny všeobecné gravitace.

Od

Dr. A. Seydlera.

(Pokračování.)

## IV. O tvaru země.

Tvar země naší jest problem, jenž přes dva tisíce let zaměstnává mysl lidskou, aniž by byl dosud nalezl úplného řešení. Jest to problem, k jehož řešení přispívaly po staletí nejbystřejší hlavy z oboru věd mathematických, nejbedlivější pozorovatelé, jichž zrak vynikal schopností, oceniti minimalní veličiny, nejpilnější počtáři, kteří leta živobytí svého věnovali výpočtům, jichž výsledek lze vyjádřiti několika číslicemi; problem, jenž důrazně hlásá, že jest sebe mohutnější práce jednotlivce pouhou buňkou v organismu vědy, ovšem buňkou, jejíž plastická síla témuž organismu vykazuje na staletí, snad na vždy určitý směr rozvoje, byl-li původcem jejím — Newton!

Otázku po tvaru země lze řešiti ze dvou stránek, které se k sobě mají jako zkušenost a theorie, indukce a dedukce, vzájemně se takto doplňujíce. Můžeme totiž tvar země vyšetřiti skutečným měřením, které ovšem vede, ačkoli jest na pohled velmi jednoduché, k velmi komplikovaným diskussím mathematickým. Řadu mužů, kteří v tomto směru byli činni, zahajuje ctihodný *Eratosthenes* (III. stol. př. Kr.). O pracích v ohledu tom podniknutých nalezne čtenář důkladného poučení ve stati prof. *Em. Čubra: O měření země* (tohoto časopisu r. III. a IV., vyšla též co samostatný spisek).

Můžeme se však též, znajíce na základě vykonaných měření alespoň *přibližně* tvar země, tázati, *proč*, na základě jakých sil země tento tvar přijala a vyšetřivše síly ty, zkoumati dále, jaký musí býti zcela *přesně* tvar země, čímž výsledky měření předstihujeme, kladouce jim zároveň novou úlohu, potvrditi totiž výsledky dedukce přesnějším měřením a pobádati ji zároveň dalšími vyskytujícími se snad neshodami k ještě důkladnějšímu spracování našeho problemu. Jsou tu jako ve všech podobných případech, indukce a dedukce věrnými družkami na společné pouti: první, vynikající jemným hmatem slepců, ohledává nejbližší okolí; druhá, těkající bystrým zrakem svým po dáli, postrádající však hmatu, ranila by se při každém kroku o nejbližší trn a kámen, kdyby se neopírala o rámě společnice své, které splácí dluh svůj, řídíc kroky její do dálky.

S touto právě vytknutou theoretickou stránkou problemu tvaru země chceme se zde obírati, obmezíme se však jen na starší práce v oboru tom, neboť jinak by článek tento vzrostl na objemný spis.*) Netřeba připomínati, že stránka tato mnohem později byla v úvahu vzata, nežli stránka empirická a že první, s jehož jmenem se zde setkáváme, jest *Newton.* (Co byl v té věci Koperník pronesl, bylo pouhým tušením; v. t. roč. str. 17.)

Práce Newtonova, vztahující se ku tvaru země, jest obsažena v třetí knize jeho „Principia“ ve větách:

*Prop. XVIII.:* Axes Planetarum, quae ad eosdem axes normaliter ducuntur, minores esse.

*Prop. XIX.:* Invenire proportionem axis Planetae ad diametros eidem perpendiculares.

*Prop. XX.:* Invenire et inter se comparare pondera corporum in Terrae hujus regionibus diversis.

Věta první jest výrazem zkušenosti t. j. pozorování, že všechny oběžnice se nám jeví býti sploštěnými.

---

*) Kdo by si přál důkladného poučení o historickém rozvoji theorie našeho problemu, tomu budiž odporučen spis, jenž na mnoze sloužil za základ našeho stručného líčení: *J. Todhunter*: A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth, from the time of Newton to that of Laplace; London 1873 [I svazek: XXXVI a 477 str.; II. svazek, 508 str.]

Věta druhá klade úlohu, vyložiti úkaz ten ze známých sil a určiti přesně poměr délek různých průměrů oběžnic, zejmena oběžnice nám nejdůležitější, naší země.

*Newton* vychází při tom dle svého „pravidla filosofování," dle něhož nesmíme více příčin k vysvětlení úkazů přibírati, nežli jest nutně zapotřebí, od věty (ovšem ne výslovně, avšak fakticky upotřebené), že k vysvětlení tvaru oběžnic dostačí gravitace hmotných jejich částic. Je-li hmota oběžnice kapalná a neotáčí-li se tato kolem své osy, musí tvar její býti pravidelně kulatý, neboť tíže vlastních částic působí ze všech stran stejným způsobem. Otáčí-li se však, jakož tomu zkušenost svědčí, oběžnice kolem jakési osy, snaží se částice její, pokud jsou kapalné tudíž volně pohyblivé, vzdáliti se od osy a nakupiti u větší míře na rovníku. To platí též o takových oběžnicích, jichž hmota není úplně kapalná, které jsou na př. jen jako země naše, pokryté na povrchu svém částečně mořem. Moře vystouplo by z břehů svých a pokrylo by krajiny rovníkové, kdyby ty nebyly dále od středu země vzdálené, nežli krajiny točnové. Můžeme tudíž považovati co tvar rovnovážný takové oběžnice idealnou plochu, jež jest částečně utvořena hladinou moře, kterou si myslíme dle stejného zákona rozšířenou pod pevninami. Skutečný tvar země liší se ovšem poněkud od tohoto tvaru, právě následkem pevnin, leč při rozměrech země jest rozdíl tento nepatrný.

Máme tudíž prozatím tento výsledek: dle dosavádních měření (až po dobu Newtonovu) jest země tvaru od koule velmi málo rozdílného, čili sféroidického; při tom jest, dle analogie s ostatními pozorovanými oběžnicemi a dle úvahy předcházející, na pólech svých sploštěna. Nastává nyní otázka: jak lze tvar země *přesně* vytknouti? *Newton* neváhal, dáti na otázku tu odpověď, která byla ovšem nejbližší: země jest *splоštěný rotační ellipsoid*. Výrok svůj Newton neodůvodnil, jest tedy (ač on to výslovně nepodotýká) pouhou hypothesou, ovšem velmi pravdě podobnou, a toť jediná mezera ve vývodech Newtonových, mezera, kterou teprvé po padesáti letech vyplnili *Stirling* a *Clairaut*. Na základě této hypothesy jal se Newton vypočítávati splоštěnost země, t. j. poměr rozdílu $a-b$ mezi velkou a malou polosou poledníka země, k délce velké polosy $a$; poměr ten $(a-b) : a$

nazveme $\varepsilon$. Výpočet ten opírá se ovšem o rozdíl mezi tíží na rovníku a na polu; rozměry země musí býti takové, aby mezi oběma silami byla rovnováha. Rozdíl obou sil lze stanoviti, určíme-li nejprvé poměr síly odstředivé k attrakci na rovníku, pro kterýž poměr nalezl Newton známý výraz 1 : 289, jejž nazveme $\gamma$.

Sestrojme nyní rotační ellipsoid, jehož poledník jest $AB$ (obr. 1) a osa rotační $CB$; sestrojme k němu tři pomocné plochy: rotační ellipsoid se stejným poledníkem a s osou $CA$, kouli s poloměrem $CA$ a kouli s poloměrem $CB$. Přitažlivosti hmot (stejné hustoty), vyplňující tyto čtyry plochy, vzhledem k témuž bodu nazveme v naznačeném pořádku: $E$, $e$, $S$, $s$; přitažlivost vzhledem k bodu $A$ naznačíme příponou 1, vzhledem k bodu $B$ příponou 2. Newton volí určitý případ, totiž takový rotační ellipsoid, pro který jest

$$CA : CB = 101 : 100.$$

Pro tento případ shledává *Newton*, že jest

*a)* $E_2 : s_2 = 126 : 125$

*b)* $s_2 : S_1 = 100 : 101$

*c)* $S_1 : e_1 = 126 : 125$

$e_1 : E_1 = E_1 : S_1$, tudíž dle *c)*

*d)* $e_1 : E_1 = 125\frac{1}{2} : 126$.

Násobíme-li srovnalosti *a) b) c) d)*, obdržíme

$$e)\ E_2 : E_1 = \frac{126}{125} \cdot \frac{100}{101} \cdot \frac{125\frac{1}{2}}{125},$$

čili přibližně

$$= 1 + \frac{1}{125} - \frac{1}{101} + \frac{1}{250} = 1 + \frac{1}{500}.$$

Mysleme si nyní podél poloměrů $AC$ a $BC$ dva sloupce kapaliny. Váhy sloupců $AC$, $BC$ následkem pouhé attrakce mají se k sobě jako délky, násobené příslušnými attrakcemi aneb jako

$$101 \times 500 : 100 \times 501 = 505 : 501.$$

Z toho následuje: mají-li vzdor tomu oba sloupce býti v rovnováze, musí váha sloupce $AC$ následkem odstředivosti, vznikající při rotaci ellipsoidu kolem osy $BC$, zmenšena býti v témž poměru 505 : 501, čili o $\frac{4}{505}$ celé váhy své. Kdyby obnášelo sploštění země ($\varepsilon$) $\frac{1}{100}$, byl by poměr odstředivé síly k tíži na rovníku ($\gamma$) $\frac{4}{505}$; skutečný poměr ten jest však dle pozorování (měření rozměru země) $\frac{1}{259}$; jak velké jest tu skutečné sploštění země? Patrně máme jednoduchou srovnalost

$$x : \tfrac{1}{100} = \tfrac{1}{259} : \tfrac{4}{505}$$

a tudíž

$$x = \varepsilon = \tfrac{1}{230}.$$

Dle Newtona jest tedy poměr polos $CA$ a $CB$ čili $a$ a $b$ $230:229$.

Newton byl nucen, bráti se oklikami naznačenými srovnalostmi ($a$) — ($d$), by dospěl k potřebnému výsledku ($e$); on byl stanovil toliko (v první knize „Principia“) přitažlivost rotačních těles na body ležící na ose rotační, na základě čehož si mohl zjednati srovnalosti ($a$) a ($c$), dále pak jednoduchou úvahou ($b$) a ($d$). Pro poměr $E_2 : E_1$ nalezli bychom nyní, znajíce přitažlivost ellipsoidu na jakýkoli bod v prostoru, přímou cestou výraz $1 + \frac{\varepsilon}{5} + \ldots$, což úplně souhlasí s výsledkem Newtonovým, považujeme-li $\varepsilon$ za malou veličinu prvního stupně a zanedbáme-li tudíž druhé a vyšší mocnosti její. Dále obdržíme se stejnou mírou přesnosti

$$\gamma = \tfrac{4}{5}\varepsilon, \quad \varepsilon = \tfrac{5}{4}\gamma.$$

Výsledek, k němuž dospěl Newton, jest tudíž následující: má-li země tvar rotačního ellipsoidu, ode tvaru koule málo rozdílný, a je-li stejnoměrně hutná, obnáší sploštěnost její $\frac{1}{230}$. Výsledek ten jest jenom prvním přiblížením se k pravdě; víme nyní, že sploštěnost země jest menší, víme však zároveň, že hutnost její není stejnorodá, že jest uvnitř větší nežli na povrchu.

Také pro Jupitera vypočítal Newton na základě známé doby rotační jeho sploštění a obdržel výraz větší, nežli jej podává pozorování.

Zbývá nám ještě rozbor třetí věty. Zde vyhledává Newton váhu těles na rozličných místech na povrchu země, opíraje se při tom opět o stanovení váhy dvou sloupců kapaliny, vedených z rozličných míst ku středu země. Výsledek vyjádřen jest známou větou: kráčíme-li od rovníka k polům, přibývá tíži v témž poměru, v jakém přibývá čtverci sinusu zeměpisné šířky. Že tomu skutečně tak, ukazuje Newton na délce sekundového kývadla, stanovené pro rozličná místa povrchu zemského od *Richera* (1672), *Halleye* a jiných. Na základě svých úvah sděluje Newton tabulku pro délku sekundového kyvadla a jednoho stupně poledníkového pro všechny zeměpisné šířky. Pro porovnání klademe sem tři hodnoty pro délku stupně dle *Newtona* a dle *Bessela*:

| Zeměpisná šířka | Délka stupně dle | |
|---|---|---|
| | Newtona | Bessela |
| 0° | 56637 | 56727 |
| 45° | 57010 | 57012 |
| 90° | 57382 | 57300 |

Sploštěnost země jest dle Bessela $\frac{1}{299}$. Vzdor tomuto rozdílu souhlasí čísla Newtonova s nejnovějšími výsledky překvapujícím spůsobem.

Historický rozvoj vede nás nyní k *Huygensovi*. Týž vydal r. 1690 známý svůj spis: Traité de la lumière... Avec un Discours de la Cause de la Pesanteur. K předmětu našemu vztahuje se dodatek k tomuto spisu, který vyšel později též o sobě v latinském překladu: De causa gravitatis. Hlavní zásluha Huygensova záleží v tom, že vyslovil důležitý, ano základní princip hydrostatiky, jehož lze při řešení našeho problemu upotřebiti: výslednice sil působících na kapalinu musí v každém bodu býti kolmá k volnému povrchu jejímu. Věta tato hodí se lépe k vyšetření rovnováhy kapalné hmoty, nežli věta o rovnováze sloupců kapaliny, vedených od povrchu ku středu (Newton) a zejmena mohla sloužiti k vyšetření skutečného tvaru rovnovážného tekutého povrchu země, tedy k vyplnění mezery, zanechané v Newtonově theorii. Avšak Huygens neuznával Newtonův zákon gravitace; předpokládal, že přitažlivost, jevící se na povrchu země co tíže, má sídlo své ve středu země a jest veličinou stálou. Následkem toho obdržel pro poměr rotační osy k průměru rovníku výraz 577 : 578, pro sploštění tudíž výraz

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{289} = \frac{\gamma}{2}.$$

Pro tvar země obdržel rotační plochu, vytvořenou otočením poledníkové křivky, jejíž rovnice jest:

$$\lambda \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{\omega^2 y^2}{2} = \lambda a - \frac{\omega^2 a^2}{2}.$$

Zde znamená $\lambda$ stálou hodnotu přitažlivosti, $\omega$ úhlovou rychlost rotace zemské, $a$ poloměr rovníka; osa $X$ má směr osy rotační, osa $Y$ směr poloměru rovníkového. Pro složky síly ve směrech os souřadnic obdržíme snadno výrazy:

$$X = \frac{\lambda x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Y = \frac{\lambda y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \omega^2 y.$$

Má-li výslednice těchto sil býti v každém bodu kolmá ku povrchu plochy, tudíž i k obloukové částici $ds$ poledníka a nazveme-li $dx$, $dy$ průměty oblouku $ds$ na osy, bude výrazem oné podmínky rovnice:

$$Xdx + Ydy = 0,$$

jejíž integralem jest rovnice svrchu uvedená.

Lze dokázati, že se výraz pro sploštění, $\varepsilon = \frac{\gamma}{2}$, nemění, pokud jest dostatečně malý, takže druhé a vyšší mocnosti jeho můžeme vynechati, nechať jest zákon tíže, který Huygens předpokládal stálým ($= \lambda$), jakýkoli, pokud závisí pouze na vzdálenosti od středu země. Rovnice poledníka země byla by pro zákon tíže, vyjádřený úkonem $\varphi(r)$, kde $r$ jest vzdálenost od středu země:

$$\int_r^a \varphi(r)\, dr = \frac{\omega^2}{2}(a^2 - y^2),$$

a větu právě uvedenou lze snadno dokázati, předpokládáme-li, že jest $a - r$ velmi malá veličina. Výsledek ten mohl by snadno v omyl uvésti toho, kdo by položil $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, a spatřoval následkem toho spor mezi výsledkem Huygensova $\left(\varepsilon = \frac{\gamma}{2}\right)$ a Newtonova $\left(\varepsilon = \frac{5\gamma}{4}\right)$ bádání. Spor ten jest jenom zdánlivý; dle Newtonova zákona nepůsobí přitažlivost vždy ku středu země, poněvadž jest tato tvaru ellipsoidického.

Přehledneme-li stav věcí na konci XVII. století, objeví se nám zajímavý výsledek: panovaly totiž tři různé náhledy o tvaru země, z nichž žádný však nebyl úplně správným. Názor Newtonův byl pravdě nejbližší, chybil však předpokládáním, že jest hustota země stejnoměrná, a další nesprávnou domněnkou, že by při větší uvnitř země hustotě sploštěnost země větší býti musela. Názor Huygensův vycházel od nesprávného zákona tíže a vedl tudíž také ku tvaru, který dle pozdějších zkušeností se neosvědčil. Oba názory souhlasily v tom, že udělily zemi tvar sploštěný; avšak následkem měření *Cassini-ho* ve Francii soudil týž učenec a četní přívrženci jeho, že má země tvar podlouhlý, vejčitý! Spor povstalý v této otázce nabyl velikých rozměrů*) a trval déle než 50 let (srv. tohoto časopisu r. III., str. 238). Theoretikové, na př. *J. Hermann* ve své Phoronomii (1716), byli ovšem na straně Newtonově a Huygensově; trvalo to však velmi dlouho, nežli další mathematické práce *Stirlinga* a *Clairauta*, spojené se správnějšími výsledky měření (zejmena peruanského), razily dráhu jedině správné, byť i neúplné theorii Newtonově.

*Stirling* byl první, který ve svém pojednání: *Of the Figure of the Earth, and the Variation of Gravity on the Surface* (Phil. Transact. XXXIX. 1735) poukázal k mezeře, která se jevila v theorii Newtonově. Praví zde výslovně: „Ačkoli jest země sploštěného tvaru sferoidického, není přece posud tvar tohoto sferoidu objeven; za tou příčinou chci předpokládati, že jest to sferoid, vzniklý otočením ellipsy kolem její menší osy, ačkoli shledávám při výpočtu, že jest to přibližně, nikoli přesně správné..."

Stirling provádí nyní následující konstrukci:

*) Nechybělo při sporu tom lecjaké komické intermezzo. *Eisenschmidt* (1691) poukazuje k tomu, že měření dosavádní dokazují, že délky jednoho stupně na poledníku ubývá s rostoucí zeměpisnou šířkou; a z toho soudí Eisenschmidt (formalně zcela správně, jenom praemissa nebyla pravdivá), že má země tvar podlouhlý. Jakýsi *Keill* vydal na to (r. 1698) spis o tvaru země, kde polemisuje proti náhledu, že by země byla tvaru vejčitého, a zmíniv se o Eisenschmidtovi a o důvodu od tohoto uvedeného, pokračuje takto: „Nikdo, leda člověk úžasné obmezenosti a neprozřetelnosti mohl by souditi tímto spůsobem! Kdyby byl tvrdil, že země jest vejčitá, poněvadž na ní tráva roste a domy se staví, bylo by to poněkud omluvitelné; neboť důvod takový, byť by nevedl k soudu pronešenému, nemohl by nikdy dokázati opak jeho. Avšak uvésti důvod, který očividně dokazuje, že má země tvar právě opačný proti tomu, jenž měl býti dokázán, jest omyl nesnesitelný, jejž nelze prominouti . . ." Milý Keill spletl si patrně normaly k elliptickému poledníku s průvodiči ze středu uvedenými!

Budiž $P$ (obr. 2.) bod na povrchu rotačního ellipsoidu, o němž se předpokládá, že má býti tvarem země; veďme normalu $PG$ a ustanovme bod $H$ na větší ose $CA$ tak, aby bylo $CH = \frac{3}{5} CG$. Pak jest $PH$ úměrná attrakci ellipsoidu vyplněného stejnorodou hmotou a směr $PH$ jest zároveň směrem této attrakce. To platí pro kterýkoli bod na povrchu ellipsoidu.

Výsledek tento zjednáme si snadno nynějším spůsobem. Je-li rovnice elliptického poledníka

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a nazveme-li $X$, $Y$ složky attrakce ellipsoidu rotačního ve směrech, $h$ jeho hustotu a $e$ numerickou výstřednost čili výraz $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$, obdržíme známými methodami:

$$X = x \, . \, \frac{2\pi hb}{ae^3} \left(arc \sin e - e\sqrt{1 - e^2}\right),$$

$$Y = y \, . \, \frac{4\pi hb}{ae^3} \left(\frac{ae}{b} - arc\, tg \frac{ae}{b}\right),$$

aneb, rozvineme-li v řadu dle $e$:

$$X = x \, . \, \frac{4\pi h}{3} \left(1 - \frac{1}{5} e^2 - \frac{4}{35} e^4 - \ldots\right),$$

$$Y = y \, \frac{4\pi h}{3} \left(1 + \frac{2}{5} e^2 + \frac{8}{35} e^4 + \ldots\right).$$

Považujeme-li $e^2$ za malou veličinu prvního stupně a vynecháme-li veličiny druhého a vyšších stupňů, obdržíme:

$$\frac{Y}{X} = \frac{y\left(1 + \frac{2}{5} e^2\right)}{x\left(1 - \frac{1}{5} e^2\right)} = \frac{y}{x\left(1 - \frac{3e^2}{5}\right)}.$$

Je-li $PH$ (obr. 2.) směr výsledné síly, obdržíme na základě předcházející rovnice, poněvadž jest $\overline{PM} = y$, pro délku $\overline{HM}$ a $\overline{CH}$ výrazy

$$\overline{HM} = x\left(1 - \frac{3e^2}{5}\right), \quad \overline{CH} = \frac{3e^2}{5} x.$$

Dle známé vlastnosti normaly k ellipse (v obr. 2. přímky $PG$) jest však $\overline{CG} = e^2 . \overline{CM} = e^2 x$, tudíž konečně $\overline{CH} = \frac{3}{5} \overline{CG}$, čímž Stirlingova věta dokázána.

Otáčí-li se nyní země kolem své osy, přibude k síle $X$ síla odstředivá jednotlivých částic, mající opáčný směr původní síly $X$ a vyjádřena (pro bod $P$) výrazem $x\omega^2$, kde $\omega$ jest otáčecí rychlost země. Síla tato musí býti tak velká, že jest $PG$ směr tíže (která vzniká spojením attrakce a odstředivosti). To můžeme však vhodnou volbou rychlosti $\omega$ docíliti, a naopak, je-li rychlost ta dána, můžeme ustanoviti výstřednost $e$ a tudíž i sploštěnost $\varepsilon$ tak, aby oné podmínce bylo vyhověno; a stalo-li se tak pro jeden bod $P$, platí to pro všechny body povrchu, t. j. *ellipsoid takto sestrojený jest skutečným tvarem rovnovážným*, poněvadž můžeme docíliti, že směr tíže jest na všech místech kolmý k jeho povrchu.

Analytická příčina tohoto pamětihodného výsledku záleží patrně v tom, že oba výrazy pro složku attrakce $X$ a pro odstředivou sílu vznikající při otáčení země, jsou úměrny téže souřadnici $x$; ano okolnost ta má za následek, že jest výsledek ten (totiž ellipsoidický tvar rovnovážný) všeobecně platný a ne jenom, jak se sám Stirling domníval, při vynechání malých veličin vyšších stupňů. Věta, od které Stirling vyšel, totiž rovnice $CH = \frac{4}{5}\, CG$ jest ovšem jen přibližně správná, což přivedlo Stirlinga k jeho domněnce.

Pro poměr mezi výstředností ellipsy, tvořící poledník a rychlostí otáčecí země zjednáme si snadno na základě hořejších výrazů pro $X$ a $Y$ přesnou rovnici. Obdržíme totiž

$$\frac{X - x\omega^2}{Y} = \frac{GM}{PM} = \frac{x(1-e^2)}{y},$$

čili po přiměřených substitucích:

$$arc\,sin\, e - e\sqrt{1-e^2} - 2(1-e^2)\left(\frac{ae}{b} - arc\,tg\,\frac{ae}{b}\right) = \frac{ae^3\omega^2}{2\pi hb}.$$

Rovnice ta nabude přehlednějšího tvaru a zároveň budeme ji moci přibližně řešiti, volíme-li pro $X$ a $Y$ druhé dva výrazy. Obdržíme tu

$$\omega^2 = \frac{4\pi h}{3}\left[1 - \frac{1}{5}e^2 - \frac{4}{35}e^4 - \dots \right.$$
$$\left. - (1-e^2)\left(1 + \frac{2}{5}e^2 + \frac{8}{35}e^4 + \dots\right)\right],$$

čili

$$\omega^2 = \frac{8\pi h}{15}\, e^2\left(1 + \frac{1}{7}e^2 + \dots\right).$$

Attrakce na rovníku, kterou nazveme $G_0$, jest $X$, položíme-li do výrazu toho $a$ místo $x$; obdržíme tudíž pro poměr odstředivé síly $a\omega^2$ a attrakce $G_0$ výraz:

$$\gamma = \frac{a\omega^2}{G_0} = \tfrac{2}{5} e^2 (1 + \tfrac{12}{35} e^2 + \ldots).$$

Z výrazu toho následuje s vynecháním veličin druhého stupně

$$\gamma = \tfrac{2}{5} e^2, \quad \varepsilon = \frac{e^2}{2} = \tfrac{5}{4} \gamma = \tfrac{1}{230},$$

tudíž výraz Newtonův pro vztah mezi sploštěním a poměrem odstředivé síly k attrakci.

Totéž následuje z konstrukce Stirlingovy (obr. 2.). Značí-li $PH$ sílu attrakce, $PG$ sílu tíže, musí $HG$ býti síla odstředivá, připojená k attrakci, kdežto $HM$ jest složka attrakce ve směru osy $X$. Poměr obou veličin jest:

$$\gamma = \overline{HG} : \overline{GM} = \tfrac{2}{5} e^2 x : \left(1 - \frac{3e^2}{5}\right) x = \tfrac{2}{5} e^2,$$

vynecháme-li opět veličiny malé vyšších stupňů.

Zásluhu Stirlingovu můžeme nyní vytknouti následovně: On dokázal, ovšem jen přibližně, co byl Newton pouze předpokládal, že jest rotační ellipsoid tvarem rovnovážným pro kapaliny a tudíž také tvarem možným naší země, předpokládáme-li, že jest hmota její stejnorodá.

Doba, v které Stirling vystoupil, totiž první polovice XVIII. století, vynikala živým účastenstvím pro problem tvaru země; i nemůžeme se diviti, že pravda Newtonem hlásaná vždy více si razila cestu, ani nejčelnější oné doby mathematikové k úspěchům jejím přispívali. *Maclaurin* poukázal ve známém spise svém: A Treatise of Fluxions (1742) především k tomu, že jest tíže na otáčejícím se ellipsoidu *v přesném poměru* k délce normaly mezi povrchem a rovníkem ($PG$ v obr. 2.), jak jsme již z předeslaných úvah seznali, připojivše je k vůli lepšímu porozumění, k úvaze o práci Stirlingově. Největší zásluhy vydobyl si však Maclaurin tím, že důkladněji nežli jeho předchůdcové vyšetřil attrakci rotačních ellipsoidů, přikročiv též k tomu případu, kdy se skládá ellipsoid takový z vrstev různé hustoty.

V pracích svých nalezl Maclaurin důstojného soupeře v *Simpsonovi*, který v pojednání svém: A Mathematical Dissertation on the Figure of the Earth (1743) téměř současně s Maclaurinem uveřejnil řadu stejných výsledků, mimo to však též některé věci rozhodně nové. Sem náleží zejmena věta, že při přílišné rychlosti úhlové přestává býti sploštěný ellipsoid tvarem rovnovážným pro otáčející se kapalnou hmotu. Označíme-li poměr velké osy k malé výrazem $\sqrt{1+\lambda^2}$, jest krajní hodnotou pro $\lambda$, při které ještě rovnováha jest možná, $\lambda = 2{,}5292$.

Opomíjejíce mlčením celou řadu záslužných prací, obrátíme se nyní ku *Clairautovi* a slavnému spisu jeho: Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique (1743). Spis ten i mimo problem náš má velkou důležitost, stav se pro hydrostatiku epochálním. Clairaut položil pevné základy této vědě, vysloviv následující jednoduchý princip: Mysleme si, že všechna kapalina stuhne, vyjma částice položené podél jakési křivky buď uzavřené neb oběma konci na povrchu kapaliny končící, takže částice ty tvoří jakoby obsah jakési trubice uvnitř kapaliny umístěné; pak jest pro rovnováhu zapotřebí, aby při jakémkoli tvaru této trubice všechny síly působící na jednotlivé částice v ní obsažené na vzájem se rušily. Jest to patrně rozšíření principu, upotřebeného Newtonem, rozšíření, o němž pravil *Lagrange*, „že změnilo tvářnost hydrostatiky a učinilo z ní jakoby novou vědu."

Překročili bychom daleko meze tohoto článku, kdybychom chtěli podati sebe stručnější rozbor Clairautova spisu: způsob, jakým odvozuje z principu svého základní rovnice hydrostatiky, vyšetření četných případů, jež se vyskytují, béřeme-li v úvahu hmoty tuhé, spojené s kapalnými, na př. tuhé jádro pokryté kapalinou atd.; obmezíme se zde jen na vytknutí věty, která obdržela název *Clairautova theoremu.* Dělme rozdíl mezi tíží na pólu $g_{90}$ a na rovníku $g_0$ poslední veličinou; zlomek ten nazývají mnozí spisovatelé zlomkem Clairautovým. Theorem Clairautův praví pak: *součet zlomku Clairautova a skutečné sploštěnosti (ellipticity) země* ($\varepsilon_1$) *rovná se dvojnásobné sploštěnosti* ($\varepsilon$), *kterou by země měla, kdyby byla stejnorodou hmotou, čili pěti polovinám poměru* ($\gamma$) *síly odstředivé a tíže na rovníku.* Vzorkem vyjádřeno:

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} + \varepsilon_1 = 2\varepsilon = \tfrac{5}{2}\gamma.$$

Nemůžeme se pouštěti do důkazu důležité poučky té v případu všeobecném jakkoli proměnlivé hustoty země; ukážeme pouze ze vzorků předcházejících, že věta ta platí, je-li hmota země stejnorodou. Tehdy bude jednoduše:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{e^2}{2} = \tfrac{5}{4}\,\gamma,$$

$$g_0 = G_0 - a\omega^2 = G_0\,(1 - \tfrac{2}{5}\,e^2),$$

$$g_{90} = G_{90} = G_0\,\frac{b\,(1 + \frac{2}{5}\,e^2)}{a\,(1 - \frac{1}{5}\,e^2)} = G_0\,(1 - \tfrac{1}{2}\,e^2 + \tfrac{2}{5}\,e^2 + \tfrac{1}{5}\,e^2 + \ldots)$$

$$= G_0\,(1 + \tfrac{1}{10}\,e^2),$$

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \frac{\frac{1}{2}\,e^2}{1 - \frac{2}{5}\,e^2} = \tfrac{1}{2}\,e^2 = \varepsilon.$$

Vložíme-li tyto výrazy do Clairautova vzorku, stane se tento identitou.

Clairautova věta spojuje měření tíže (pomocí kyvadla) na rozličných místech povrchu zemského s mírou sploštěnosti země, dovoluje tudíž souditi z onoho měření na skutečný tvar země. Od té doby stalo se kyvadlo velice důležitým nástrojem pro měření tvaru země, jsouc v ohledu tom spolehlivějším, nežli přímé měření oblouků poledníkových. Clairautova věta jest pak prvním zkoumadlem pro správnost toho kterého výsledku, týkajícího se tvaru země. Nazveme-li Clairautův zlomek pro krátkost $\varkappa$, zjednáme si snadno pro tíži $g_\varphi$ v zeměpisné šířce $\varphi$ výraz

$$g_\varphi = g_0\,(1 + \varkappa\,\sin^2\varphi).$$

Clairaut podrobuje zkoušce hypothesu Cassiniho, dle níž jest země tvaru podlouhle vejčitého, s ellipsicitou $\varepsilon_1 = -\frac{1}{93}$. Z toho následuje $\varkappa = \frac{1}{31}$. Richer shledal, že jest kyvadlo sekundové na rovníku o $1\frac{1}{4}'''$ kratší nežli v Paříži. Dle hypothesy Cassiniho musel by rozdíl ten obnášeti $4\frac{1}{2}'''$, čímž okamžitě dokázána nemožnost této hypothesy.

Clairaut sám nesděluje onu hodnotu pro $\varkappa$ a $\varepsilon$, kterou má za pravdě nejpodobnější; zjednání této hodnoty na základě měření kyvadlových bylo však pouze otázkou času. Od té doby pokračuje theorie na pevné půdě, upravené Newtonem a Clairautem, šíří se sice téměř do nekonečna, zůstává však stále ve směru uvedenými pracemi jí vykázaném. Setkáváme se v dalším postupu rozvoje našeho problemu se jmeny *d'Alemberta*, *Legendrea*, *Laplacea*, *Poissona*, *Ivoryho*, *Plany*, *Gausse*, *Jacobiho*, *Bessela*, *Airyho* a jinými, kteří vždy více protříbili všechny otázky sem spadající. A výsledek? Výsledek jest ten, že posud přes všechny vynikající v oboru tom práce nejsme u cíle, že ještě mnoho zbývá na poli theorie i skutečného měření, by tvar země a okolnosti s ním souvisící přesně byly určeny.

Nynější stav věcí můžeme vysloviti takto: Tvar země liší se v míře jen nepatrné od rotačního ellipsoidu; pro ellipsicitu čili sploštěnost jeho obdrželi:

*a*) *Bessel* z desíti měření stupňů poledníkových $\varepsilon_1 = \frac{1}{299.15}$.

*b*) *Sabine* z diskusse pozorování kyvadlových $\varepsilon_1 = \frac{1}{289.1}$.

*c*) *Laplace* z nepravidelností v pohybu luny $\varepsilon_1 = \frac{1}{305.05}$.

*d*) *Ivory* přímým výpočtem, při němž předpokládal, že hutnost země menší se od středu (5.48) ku povrchu, $\varepsilon_1 = \frac{1}{289}$.

Souhlas je dosti značný, není však úplný; zbývá pak ještě dále otázka, zdali nelze tvar země nejlépe zobraziti ellipsoidem trojosým. *Jacobi* dokázal, že při jistém poměru os může ellipsoid takový též býti tvarem rovnovážným. Zdali jím je při naší zemi skutečně, o tom rozhodne při pilném v oboru tom pracování budoucnost snad nedaleká.

---

# O sploštěnosti země.

Pro žáky středních škol sestavil

dr. F. J. Studnička.

V mathematickém zeměpisu se učí, že země naše má tvar sploštěné koule, a že průřez, vedený osou zemskou, může se považovati za ellipsu, jejíž velká osa připadá do roviny rovníkové, malá tedy splývá s osou zemskou, takže sploštěnost se měří poměrem

$$\frac{a-b}{a} = s,$$