Václav Řehořovský

O plochách rozvinutelných. [IV.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 223--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120889

O plochách rozvinutelných.

Napsal

V. Řehořovský v Praze.

(Dokončení.)

Orthogonálné trajektorie přímek povrchových.

21. Jest to soustava oněch křivek na ploše rozvinutelné, které po sobě následující přímky povrchové protínají pod pravým úhlem; každému bodu plochy náleží jedna taková křivka.

Myslíme-li v některém bodu jedné z těchto křivek tečnu, uzavírá tato s přímkou povrchovou, onomu bodu příslušnou, pravý úhel; tečna ta nalezá se tudíž v rovině normalné ku přímce povrchové. Poněvadž však jest tečnou ku křivce v ploše rozvinutelné se nalezající, jest tečna ta zároveň obsažena v rovině tečné plochy rozvinutelné a jest tedy průsečnicí této roviny tečné s rovinou normalnou ku přímce povrchové. Na základě toho můžeme rovnice tečny trajektorie snadno odvoditi a znajíce tyto, zjednati si dále differencialní rovnice průmětů křivek samých.

Vytkněme libovolný bod x, y, z na přímce povrchové t, určené rovnicemi (1); rovnice roviny v tomto bodu normalné ku přímce povrchové jest

$$X - x + \alpha (Y - y) + \gamma (Z - z) = 0,$$

a rovnice roviny tečné podle této přímky povrchové (čl. 4.)

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')(X - x) - \gamma'(Y - y) + \alpha'(Z - z) = 0;$$

rovnice tyto určují již tečnu orthogonalní trajektorie v bodu x, y, z. Abychom sobě zjednali směrnice průmětů jejích, řešme rovnice ty dle $Y - y$ a $Z - z$; obdržíme tu

$$Y - y = \frac{\gamma(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') - \alpha'}{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}(X - x),$$

$$Z - z = -\frac{\alpha(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + \gamma'}{\alpha\alpha' + \gamma\gamma'}(X - x).$$

Avšak, jak známo, rovnají se směrnice průmětů tečny křivky na rovinách XY a XZ differencialním poměrům $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{dz}{dx}$, tak že platí

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\gamma(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')-\alpha'}{\alpha\alpha'+\gamma\gamma'},$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{\alpha(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')+\gamma'}{\alpha\alpha'+\gamma\gamma'};$$

toť jsou již differencialní rovnice orthogonalních trajektorií, při čemž mezi x, y a z platí ještě rovnice

$$y=\alpha x+\beta,$$
$$z=\gamma x+\delta.$$

Na základě těchto posledních rovnic jsme v stavu udati souřadnice x, y, z trajektorie co funkce jediné proměnné t; z rovnic těch jde

$$dy=\alpha dx+(\alpha' x+\beta')\,dt,$$
$$dz=\gamma dx+(\gamma' x+\delta')\,dt,$$

což vloženo do výše odvozených differencialních poměrů vede v obou případech k stejné rovnici

$$\frac{dx}{dt}+\frac{\alpha\alpha'+\gamma\gamma'}{\alpha'(1+\alpha^2+\gamma^2)}(\alpha' x+\beta')=0;$$

rovnice ta podává x co funkci proměnné t. Integraci linearné rovnice té lze snadno provésti; obdrží se tu dle známé methody*)

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}\left[c_1-\int\frac{\beta'(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')\,dt}{\alpha'\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}\right], \tag{30}$$

aneb též, integrujeme-li po částech,

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}\left[c_1-\frac{\beta'}{\alpha'}\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}+\int\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}\,d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right], \tag{31}$$

při čemž značí c_1 integrační stálou; každé hodnotě c_1 náleží jedna křivka.

Znajíce x určíme pak druhé souřadnice y a z z rovnic

$$y=\alpha x+\beta,$$
$$z=\gamma x+\delta.$$

22. Uvažujme mimo trajektorie, určené hodnotou c_1, ještě druhou, které náleží hodnota c_2; označíme-li x_1, y_1, z_1 souřadnice bodu některého této trajektorie bude

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}\left[c_2-\int\frac{\beta'(\alpha\alpha'+\gamma\gamma')}{\alpha'\sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}}\,dt\right],$$

*) Dr. F. J. Studnička: „Vyšší mathematika,“ díl III., str. 27.

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta,$$
$$z_1 = \gamma x_1 + \delta,$$

kdež funkce α, β, atd. a jich derivace mají různé hodnoty od souhlasných funkcí ve vzorci (30), pokud libovolné body obou trajektorií v úvahu béřeme; podržíme-li však v obou soustavách vzorců totéž t, obdržíme ony body obou trajektorií, které na téže přímce povrchové se nalezají a vzdálenost těchto bodů udává zároveň vzdálenost obou trajektorií na této přímce povrchové. Vzdálenost ta dána jest vzorcem

$$d^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2;$$

jest však dle předcházejících vzorců

$$x - x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}} (c_1 - c_2);$$
$$y - y_1 = \alpha (x - x_1),$$
$$z - z_1 = \gamma (x - x_1),$$

takže nejprvé

$$d^2 = (1 + \alpha^2 + \gamma^2)(x - x_1)^2,$$

a vložíme-li za $x - x_1$ hodnotu

$$d^2 = (c_1 - c_2)^2;$$

platí tudíž: *Vzdálenost dvou orthogonalních trajektorií plochy rozvinutelné jest konstantní.*

Obě trajektorie c_1 i c_2 protnou křivku vratu plochy rozvinutelné v určitých bodech; buďtež t_1 resp. t_2 ony hodnoty t, které dosazeny do vzorce (30) neb (31) podávají nám souřadnice těchto bodů a dále α_1, β_1 . . , α'_1, β'_1, . . resp. α_2, β_2, . . , α'_2, β'_2, . . hodnoty funkcí α, β, . . , α', β', . . , dosadíme-li za t zvláštní tyto hodnoty t_1 resp. t_2.

Průsečný bod trajektorie na př. c_1 bude určen, jakmile známe příslušnou hodnotu t_1; podmínečnou rovnici pro t_1 můžeme sobě zjednati takto:

Poněvadž bod průsečný náleží trajektorii, platí dle (31)

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2 + \gamma_1^2}} \left[c_1 - \frac{\beta'_1}{\alpha'_1} \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \gamma_1^2} + \int \sqrt{1 + \alpha_1^2 + \gamma_1^2}\, d\left(\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}\right) \right],$$

a poněvadž náleží zároveň křivce vratu, též dle vzorců (10)

$$x_1 = -\frac{\beta'_1}{\alpha'_1};$$

srovnáme-li oba výrazy, přijdeme k rovnici

$$c_1 + \int \sqrt{1+\alpha_1^2+\gamma_1^2}\, d\left(\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}\right) = 0, \tag{a}$$

z které hledanou hodnotu t_1 určiti lze.

Zcela podobně nalezneme pro t_2 podmínečnou rovnici

$$c_2 + \int \sqrt{1+\alpha_2^2+\gamma_2^2}\, d\left(\frac{\beta'_2}{\alpha'_2}\right) = 0, \tag{b}$$

Znajíce podmínečné rovnice pro t_1 a t_2, kterýmiž hodnotami stanoveny jsou body x_1 a x_2, v kterých trajektorie c_1 a c_2 protínají křivku vratu, hleďme určiti délku oblouku křivky vratu mezi těmito body x_1 a x_2.

Délka oblouku křivky prostorové všeobecně dána vzorcem

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2};$$

souřadnice bodu křivky vratu dle vzorců (10) jsou

$$x = -\frac{\beta'}{\alpha'},$$

$$y = -\alpha\frac{\beta'}{\alpha'} + \beta,$$

$$z = -\gamma\frac{\beta'}{\alpha'} + \delta,$$

z čehož

$$dx = -d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

$$dy = -\beta' - \alpha\, d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right) + \beta' = -\alpha\, d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

$$dz = -\frac{\gamma'\beta'}{\alpha'} - \gamma\, d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right) + \delta' = -\gamma\, d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

na základě (2), takže

$$dx^2+dy^2+dz^2 = (1+\alpha^2+\gamma^2)\left[d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right)\right]^2$$

a tedy

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\alpha^2+\gamma^2}\, d\left(\frac{\beta'}{\alpha'}\right),$$

aneb

$$s = \int \sqrt{1+\alpha_2^2+\gamma_2^2}\, d\left(\frac{\beta'_2}{\alpha'_2}\right) - \int \sqrt{1+\alpha_1^2+\gamma_1^2}\, d\left(\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}\right)$$

a užijeme-li rovnic (*a*) a (*b*) konečně

$$s = c_1 - c_2,$$

t. j. délka oblouku křivky rovná se vzdálenosti orthogonalních trajektorií, které náleží koncovým bodům oblouku; z toho patrno, že *orthogonalní trajektorie plochy rozvinutelné jsou evolventami křivky vratu*, jak též geometrický názor jasně o tom poučuje. Kdybychom na př. chtěli určiti orthogonalní trajektorie ploch kuželových, volme střed jejich za počátek souřadnic, načež rovnice plochy určující jsou

$$y = \alpha x, \quad z = \gamma x;$$

zde jest $\beta = 0$, tedy i $\beta' = 0$, a tedy souřadnice bodů trajektorií dle (30)

$$x = \frac{c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}},$$

z čehož dále

$$y = \frac{\alpha c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}},$$

a

$$z = \frac{\gamma c_1}{\sqrt{1 + \alpha^2 + \gamma^2}}.$$

Poněvadž tu pro každý bod jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2,$$

platí:

Orthogonalní trajektorie plochy kuželové jsou křivky průsečné daného kužele s plochami kulovými, jejichž střed nalezá se ve vrcholu plochy kuželové.

Dvojné křivky.

23. Jako u ploch zborcených může i u ploch rozvinutelných nastati ten případ, že plocha sama sebe protíná; křivky, v kterých se to děje, nazýváme *křivky dvojné* plochy, poněvadž každému bodu křivek těch náleží dvě roviny tečné plochy, totiž podle oněch dvou *nesoumezných* přímek povrchových, které v bodu tom se protínají.

V nevlastním smyslu mohla by i křivka vratu považována býti za křivku dvojnou a sice takovou, kde vždy dvě *soumezné* přímky povrchové se protínají; zde však roviny tečné podle obou přímek povrchových, které dvojný bod určují, splývají v jednu, za kterouž příčinou nelze křivku vratu považovati za vlastní křivku dvojnou, předpokládají-li se u této v každém bodu dvě různé roviny tečné.

Rovnice křivek dvojných určíme opět tím spůsobem, že stanovíme souřadnice jich bodů co funkce jediného proměnného parametru.

Předpokládejme plochu rozvinutelnou danou opět rovnicemi (1) a (2), vytkněme sobě v ní přímku povrchovou t_1 a hledejme dvojné body plochy na této přímce, t. j. stanovme ony nesoumezné přímky povrchové, které přímku t_1 protínají.

Označme s α_1, β_1 atd. hodnotu funkcí α, β atd., kterou obdrží, vložíme-li v ně zvláštní hodnotu t_1 za t.

Vytknutá přímka povrchová t_1 má rovnice

$$y = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$z = \gamma_1 x + \delta_1;$$

libovolná přímka povrchová t

$$y = \alpha x + \beta,$$
$$z = \gamma x + \delta,$$

protíná tenkráte přímku t_1, pakli mezi koefficienty jich rovnic platí známá podmínka*)

$$\frac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1} = \frac{\delta-\delta_1}{\gamma-\gamma_1},$$

aneb

$$(\beta-\beta_1)(\gamma-\gamma_1)-(\alpha-\alpha_1)(\delta-\delta_1)=0. \tag{32}$$

Kořeny této rovnice, v které t_1 považujeme za stálou, jsou hledané hodnoty t, jimž příslušné přímky povrchové protínají přímku t_1; souřadnice průsečných bodů jsou pak

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1} = -\frac{\delta-\delta_1}{\gamma-\gamma_1}, \\ y &= \alpha_1 x + \beta_1, \\ z &= \gamma_1 x + \delta_1. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Vložíme-li do těchto rovnic hodnoty t vypočtěné z (32) co funkce t_1, obdržíme souřadnice dvojných bodů na přímce t_1 co funkce parametru t_1; považujeme-li t_1 co proměnnou t. j. vyčerpáme-li všechny povrchové přímky plochy, obdržíme souřadnice všech bodů dvojných plochy. Vyloučíme-li tudíž vždy ze

*) Dr. *F. J. Studnička:* Anal. geometrie v prostoru, str. 42.

dvou rovnic (33) proměnný parametr t_1, obdržíme rovnice průmětů křivek dvojných na rovinách souřadných. Mnoho-li různých kořenů t rovnice (32) podává, tolik různých bodů dvojných na každé přímce povrchové.

24. Co příklad volme plochu rozvinutelnou určenou rovnicemi

$$y = tx + (t-1)^2,$$
$$z = t^3x + 6\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}\right).$$

Zde jest

$$\alpha = t, \quad \beta = (t-1)^2,$$
$$\gamma = t^3, \quad \delta = 6\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3}\right),$$

a tedy rovnice (32)

$$(t^2 - 2t + 1 - t_1{}^2 + 2t_1 - 1)(t^3 - t_1{}^3)$$
$$- 6(t - t_1)\left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t_1{}^4}{4} + \frac{t_1{}^3}{3}\right) = 0,$$

kterouž psáti lze též ve tvaru

$$(t - t_1)^4 (t + t_1) = 0;$$

rovnice ta má čtyrnásobný kořen

$$t = t_1$$

a jeden kořen

$$t = -t_1.$$

Kořen $t = t_1$ podává křivku vratu, druhý kořen

$$t = -t_1$$

pak vlastní křivku dvojnou. Souřadnice bodů této křivky obdržíme z rovnic (33); jest tu

$$x = -\frac{(t-1)^2 - (t_1 - 1)^2}{t - t_1} = -(t + t_1 - 2),$$

a vložíme-li

$$t = -t_1,$$
$$x = 2,$$

načež

$$y = 2t_1 + (t_1 - 1)^2 = t_1{}^2 + 1,$$
$$z = 2t_1{}^3 + 6\left(\frac{t_1{}^4}{4} - \frac{t_1{}^3}{3}\right) = \frac{3}{2}t_1{}^4.$$

Poněvadž pro všechny body

$$x = 2,$$

jest křivka dvojná rovinnou křivkou a sice v rovině kolmé k ose X ve vzdálenosti 2 od počátku; průmět křivky té na rovinu YZ obdrží se vyloučením t_1 z výrazů pro y a z, totiž

$$z = \frac{3}{2}(y-1)^2.$$

Jak snadno přesvědčiti se lze, jest to parabola, jejíž vrchol leží v ose Y ve vzdálenosti $y = 1$ a jejíž osa jest rovnoběžna s kladným směrem osy Z.

Křivky geodätické.

25. Volíme-li na jakékoliv ploše dva libovolné body, můžeme od jednoho k druhému na ploše vésti nekonečné množství křivek. Mezi křivkami těmi stává jediné, jejíž délka oblouku mezi oběma body jest nejkratší; křivka taková, udávající nejkratší vzdálenost dvou bodů plochy, nazývá se *křivkou minimalní nebo geodätickou.*

Jest-li plocha pak rozvinutelnou a nalezají-li se oba body na jedné přímce povrchové, jest přímka sama křivkou nejkratší vzdálenosti obou bodů: jsou-li body na různých přímkách povrchových, obdržíme vlastní křivku geodätickou.

Poněvadž rozvinutím plochy se délka plošných útvarův nemění, zůstává křivka geodätická i po rozvinutí geodätickou t. j. při rozvinutí v rovinu promění se v přímku, poněvadž tato jest křivkou nejkratší vzdálenosti dvou bodů v rovině. Rovnice křivky té určiti lze na základě známé okolnosti křivek těch, že rovina oskulační v každém bodu jejím jest kolma k rovině tečné plochy v tomtéž bodu; podmínka tato vede k differencialní rovnici řádu druhého a všeobecný integral její obsahuje tudíž dvě konstanty, jak nutno, an křivka geodätická dvěma body plochy určena jest.

Buďtež x, y, z souřadnice bodu křivky geodätické na přímce povrchové t a bod ten určen tím, že považujeme x co jistou, dosud neznámou funkci proměnné t; y a z určeny jsou pak rovnicemi

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta.$$

Rovnice roviny oskulační v bodu x, y, z křivky takto stanovené jest

$$\begin{vmatrix} X - x, & Y - y, & Z - z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

a rovnice roviny tečné ku ploše rozvinutelné dle čl. 4.

$$(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')(X - x) - \gamma'(Y - y) + \alpha'(Z - z) = 0;$$

křivka bude tenkráte geodätickou, pak-li obě tyto roviny v každém bodu jsou k sobě normalné a to nastane tenkráte, pak-li koefficienty u X, Y, Z v obou rovnicích vyhovují rovnici *)

$$\begin{vmatrix} dy, & dz \\ d^2y, & d^2z \end{vmatrix} (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + \begin{vmatrix} dx, & dz \\ d^2x, & d^2z \end{vmatrix} \gamma' + \begin{vmatrix} dx, & dy \\ d^2x, & d^2y \end{vmatrix} \alpha' = 0. \quad (1')$$

Rovnice tato udávajíc podmínku, které souřadnice x, y, z křivky geodätické vyhovují, jest již differencialní rovnicí křivek geodätických; k ní připojiti nutno ještě rovnice

$$y = \alpha x + \beta,$$
$$z = \gamma x + \delta.$$

Z těchto tří rovnic obdržeti lze x, y, z co funkce jediného parametru t.

Pomocí druhé a třetí rovnice upraviti lze první rovnici tím spůsebem, že obsahuje pouze x a t a jich první a druhé differencialy a podává tudíž, lze-li ji integrovati, ihned x co funkci t.

Jest totiž

$$\begin{aligned} dy &= \alpha\, dx + (\alpha' x + \beta')\, dt, \\ dz &= \gamma\, dx + (\gamma' x + \delta')\, dt, \\ d^2y &= \alpha\, d^2x + 2\alpha'\, dx\, dt + (\alpha'' x + \beta'')\, dt, \\ d^2z &= \gamma\, d^2x + 2\gamma'\, dx\, dt + (\gamma'' x + \delta'')\, dt, \end{aligned}$$

a tedy dále, rozvineme li a krátíme-li

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} dy & dz \\ d^2y & d^2z \end{vmatrix} &= [\gamma(\alpha' x + \beta') - \alpha(\gamma' x + \delta')]\, d^2x\, dt \\ &\quad + 2(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')\, dx^2 dt + [\alpha(\gamma'' x + \delta'') - \gamma(\alpha'' x + \beta''\, dx\, dt^2 \\ &\quad + [(\alpha' x + \beta')(\gamma'' x + \delta'') - (\alpha'' x + \beta'')(\gamma' x + \delta')]\, dt^3, \\ \begin{vmatrix} dz & dx \\ d^2z & d^2x \end{vmatrix} &= (\gamma' x + \delta')\, d^2x\, dt - 2\gamma'\, dx^2\, dt - (\gamma'' x + \delta'')\, dx\, dt^3, \\ \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix} &= -(\alpha' x + \beta')\, d^2x\, dt + 2\alpha'\, dx^2\, dt + (\alpha'' x + \beta'')\, dx\, dt^2; \end{aligned}$$

zavedeme-li tyto hodnoty do první rovnice (1'), spořádáme-li a dělíme-li pak celou rovnici dt^3, obdržíme

---

*) ibid. pag. 25.

$$\Big\{[\gamma(\alpha'x+\beta')-\alpha(\gamma'x+\delta')]\,(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')-\alpha'(\alpha'x+\beta')-\gamma'\,(\gamma'x+\delta')\Big\}\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$+\,2[\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2]\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$+\left\{\begin{matrix}[\alpha\,(\gamma''x+\delta'')-\gamma\,(\alpha''+\beta'')\,[\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\\ +\,\alpha'\,(\alpha''x+\beta'')+\gamma'\,(\gamma''+\delta'')\end{matrix}\right\}\frac{dx}{dt}$$
$$+\,[(\alpha'x+\beta')\,(\gamma''x+\delta'')-(\gamma'x+\delta'\,(\alpha''x+\beta'')]\,(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')=0$$

co differencialní rovnici druhého řádu, z které obdržeti lze integrováním x co funkci t.

Rovnice ta obdrží jednodušší tvar, užijeme-li známé relace

$$\alpha'\delta'=\beta'\gamma';$$

jest totiž

$$\gamma'x+\delta'=\frac{\gamma'}{\alpha'}\,(\alpha'x+\beta'),$$

a

$$\gamma''x+\delta''=\frac{(\alpha'\gamma''-\gamma'\alpha'')\,(\alpha'x+\beta')+\alpha'\gamma'\,(\alpha''x+\beta'')}{\alpha'^2},$$

takže vložíme-li tyto hodnoty do hořejší rovnice, obdrží tato po krátkém upravení tvar

$$\alpha'\,[\alpha'^2+\gamma'^2+(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')^2]$$
$$\left[-\,(\alpha'x+\beta')\,\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+(\alpha''x+\beta'')\,\frac{dx}{dt}\right]$$
$$+\,(\alpha'\gamma''-\gamma''\alpha')\,(\alpha'x+\beta')\,\{[\alpha\,(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')+\gamma')\,\frac{dx}{dt}$$
$$+\,(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\,(\alpha'x+\beta')\}=0. \tag{34}$$

Někdy bývá nutno tuto rovnici ještě přetvořiti a to zejmena v případech, kde funkce α a γ jsou konstanty a tedy derivace jich nully; v případu tom nepodává rovnice (34) žádného řešení. Tu lze sobě pomoci tím spůsobem, že celá rovnice dělí se α'^3 a všude objevující se poměr $\frac{\gamma'}{\alpha'}$ nahradíme poměrem $\frac{\delta'}{\beta'}$; násobíme-li pak celou rovnici β'^3, abychom se zbavili jmenovatelů, obdržíme rovnici ve tvaru

$$\beta'\,[\beta'^2+\delta'^2+(\alpha\delta'-\gamma\beta')^2]$$
$$\left[-\,(\alpha'x+\beta')\,\frac{d^2x}{dt^2}+2\alpha'\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+(\alpha''x+\beta'')\,\frac{dx}{dt}\right]$$
$$+\,(\beta'\delta''-\delta'\beta'')\,(\alpha'x+\beta')\,\{[\alpha\,(\alpha\delta'-\gamma\beta')+\delta']\,\frac{dx}{dt}$$
$$+\,(\alpha\delta'-\gamma\beta')\,(\alpha'x+\beta')\,\}=0. \tag{35}$$

Konečně podotknouti sluší, že rovnice (34) i (35) převésti lze přiměřenou substitucí na differencialní rovnice řádu prvního; tak na př. zavedeme-li do rovnice (34) novou proměnnou u, určenou rovnicí

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha' x + \beta') u, \tag{36}$$

načež

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\alpha' x + \beta') \left(\frac{du}{dt} + \alpha' u^2 \right) + u(\alpha'' x + \beta''),$$

vymizí veškeré členy obsahující x a obdrží se rovnice prvního řádu mezi u a t, totiž

$$\alpha' [\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2] \left(-\frac{du}{dt} + \alpha' u_2 \right)$$
$$+ (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'') \{[\alpha(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + \gamma'] u + \alpha\gamma' - \gamma\alpha'\} = 0,$$

kteréž další substitucí

$$u = \frac{1}{v - \alpha} \tag{37}$$

zjednoduší se na

$$\alpha' [\alpha'^2 + \gamma'^2 + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2] \frac{dv}{dt}$$
$$+ (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'') [\gamma' + (\alpha\gamma' - \gamma\alpha') v] (v - \alpha) = 0; \tag{38}$$

dovedeme-li tuto rovnici integrovati, zjednáme si v co funkci t, načež (37) podává u a z toho dále integrováním lineárné rovnice (36) obdrží se x. Integrace rovnice řádu druhého nahražena tu tedy integracemi dvou rovnic řádu prvního, z nichž jedna jest linearní.

Toutéž transformací, kterou jsme přetvořili (34) v (35), lze (38) převésti ve tvar

$$\beta' [\beta'^2 + \delta'^2 + (\alpha\delta' - \gamma\beta')^2] \frac{dv}{dt}$$
$$+ (\beta'\delta'' - \delta'\beta'') [\delta' + (\alpha\delta' - \gamma\beta') v] (v - \alpha) = 0. \tag{39}$$

26. Co první příklad volme *plochu válcovou přímou*, kruhovou poloměru r, jejíž osou budiž osa souřadnicová X; válec takový určen jest rovnicemi

$$y = r \cos t, \quad z = r \sin t.$$

Zde jest

$$\alpha = 0, \quad \beta = r \cos t, \quad \gamma = 0, \quad \delta = r \sin t$$

a rovnice (39) zredukuje se tu na

$$-\sin t \frac{dv}{dt} + v \cos t = 0,$$

aneb

$$\frac{dv}{v} = \frac{\cos t \, dt}{\sin t},$$

z čehož jde, integrujeme-li,

$$lv + lc_1 = l \sin t,$$

aneb

$$vc_1 = \sin t,$$

a tedy

$$v = \frac{\sin t}{c_1};$$

dle (37) jest pak

$$u = \frac{c_1}{\sin t},$$

takže v tomto případu (36) jest

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin t \, . \, \frac{c_1}{\sin t} = -rc_1,$$

z čehož konečně se obdrží, integrujeme-li opět

$$x = c_2 - rc_1 t,$$

kdež c_1 a c_2 integrační stálé značí; ostatní souřadnice určeny jsou rovnicemi

$$y = r \cos t, \quad z = r \sin t.$$

Srovnáme-li tyto výrazy pro souřadnice bodu geodätické křivky s oněmi (27), shledáváme známou pravdu, že geodätickou křivkou plochy válcové jest šroubovice.

Co příklad druhý volme *plochu kuželovou* přímou, kruhovou, jejíž střed jest počátkem soustavy souřadnic a jejíž osa shoduje se s osou Z; nazveme-li t úhel průmětu některé přímky povrchové na rovinu XY s osou X, jest plocha kuželová určena rovnicemi

$$y = x \, tg \, t, \quad z = \frac{a}{\cos t} x,$$

kdež značí a jistou konstantu, udávající poměr výšky kužele a poloměru kruhu příslušného normalného řezu.

V tomto případu tedy jest,

$$\alpha = tg \, t, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{a}{\cos t}, \quad \delta = 0;$$

užijeme-li hned první rovnice (34), obdržíme po dosazení hodnot a některých redukcích rovnici

$$x\frac{d^2x}{dt^2}-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-2\,tg\,t\,.\,x\frac{dx}{dt}+\frac{a^2}{1+a^2}x^2=0.$$

Rovnici tu převedeme do prvního řádu substitucí

$$\frac{dx}{dt}=xu,$$

takže

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x\left(\frac{du}{dt}+u^2\right);$$

zavedeme-li tyto hodnoty, lze celou rovnici děliti x^2 a nová rovnice jest

$$\frac{du}{dt}-(u+tg\,t)^2+tg^2t+\frac{a^2}{1+a^2}=0.$$

Položíme-li dále

$$u+tg\,t=v,$$

přemění se rovnice v

$$\frac{dv}{dt}-v^2-\frac{1}{1+a^2}=0,$$

kterouž rozloučením proměnných lze integrovati. Obdrží se tu

$$t=c_1+\sqrt{1+a^2}\,arc\,tg\,(v\sqrt{1+a^2}),$$

z čehož naopak

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,tg\,\frac{t-c_1}{\sqrt{1+a^2}};$$

jest pak dle předcházejícího

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,tg\,\frac{t-c_1}{\sqrt{1+a^2}}-tg\,t,$$

a dále

$$\frac{dx}{x}=u\,dt=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,tg\,\frac{t-c_1}{\sqrt{1+a^2}}\,dt-tg\,t\,dt,$$

a integrujeme-li

$$lx=lc_2-l\cos\frac{t-c_1}{\sqrt{1+a_2}}+l\cos t$$

aneb

$$x=\frac{c_2\cos t}{\cos\dfrac{t-c_1}{\sqrt{1+a^2}}},$$

načež na základě rovnic přímky povrchové

$$y = \frac{c_2 \sin t}{\cos \frac{t - c_1}{\sqrt{1 + a^2}}}, \quad z = \frac{a c_2}{\cos \frac{t - c_1}{\sqrt{1 + a^2}}}$$

Výrazy tyto udávají souřadnice bodů geodätických křivek přímé plochy kuželové.

Rovinné průseky a jich asymptoty.

27. Jedná-li se o určení průseku dané plochy rozvinutelné s rovinou, třeba jen určiti průsečné body jednotlivých přímek povrchových s rovinou sečnou; veškeré tyto body vytvořují pak křivku průsečnou.

Jak patrno, může rovina sečná míti trojí polohu vzhledem ku ploše rozvinutelné: buďto má všeobecnou polohu, t. j. neobsahuje žádných přímek povrchových, aneb obsahuje jednu přímku povrchovou, aneb konečně obsahuje dvě soumezné přímky, t. j. rovina sečná jsouc rovinou tečnou podle jisté přímky povrchové protíná ještě plochu v jiných částech jejich. Případy tyto chceme po sobě uvažovati.

Plocha rozvinutelná budiž opět dána rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \gamma x + \delta \end{aligned}, \tag{1}$$

a rovina sečná rovnicí

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0, \tag{40}$$

při čemž předpokládáme všeobecnou polohu této roviny.

Souřadnice průsečného bodu některé přímky povrchové t vyhovují současně rovnicím (1) a (40), naopak obdržíme tudíž tyto souřadnice řešením těchto rovnic dle x, y, z. Zjednáme si tak

$$x = -\frac{N\beta + P\delta + Q}{M + N\alpha + P\gamma},$$

načež

$$\left.\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta \\ z &= \gamma x + \delta \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Souřadnice křivky průsečné jeví se tuto vyjádřeny co funkce proměnné t; každé hodnotě t náleží jeden bod. Vyloučíme-li tedy vždy ze dvou těchto rovnic proměnnou t, obdržíme rovnice průmětů křivky průsečné na rovinách souřadných.

U rovinných průseků ploch rozvinutelných jsou zvláště důležity body, v kterých rovina sečná protíná křivku vratu plochy, jelikož i tyto body křivce průsečné náležejí.

Body tyto budou určeny, jakmile vyhledáme přímky povrchové, v kterých body ty leží; poněvadž každá přímka povrchová jistou hodnotou t určena jest, jedná se pouze o stanovení těchto hodnot t.

Souřadnice bodu, vůbec křivky vratu jsou dle (10)

$$\xi = -\frac{\beta'}{\alpha'}, \quad \eta = \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\alpha'}, \quad \zeta = \frac{\delta\alpha' - \gamma\beta'}{\alpha'};$$

bod křivky vratu nalezati se bude tenkráte v rovině sečné, pak-li souřadnice jeho vyhovují rovnici (40). Dosadíme-li tedy hodnoty za ξ, η, ζ do rovnice (40) místo x, y, z, obdržíme podmínečnou rovnici, kdy bod křivky vratu náleží též rovině sečné.

Podmínka ta jest

$$\beta'(M + N\alpha + P\gamma) - \alpha'(N\beta + P\delta + Q) = 0. \qquad (42)$$

Naopak tedy podává tato rovnice ony hodnoty t, které určují přímky povrchové, jež rovinu (40) protínají v bodech křivky vratu; znajíce z rovnice (42) tyto hodnoty t, obdržíme pak snadno souřadnice hledaných bodů křivky vratu, dosadíme-li je postupně do výrazů (10) neb (41). Kolik různých kořenů t rovnice (42) podává, v tolika bodech protíná rovina sečná křivku vratu.

28. Dá se dokázati, že v každém takovém bodu má křivka průsečná *úvrat.* Křivka *rovinná v prostoru* má úvrat, pak-li nejméně jeden z průmětů jejich na roviny souřadné má úvrat. Uvažujme na př. průmět křivky naší na rovině XY; průmět ten určen jest oběma prvními rovnicemi (41), při čemž pro body křivky vratu platí podmínka (42).

Křivka takto určená má tenkráte v některém bodu úvrat neb vůbec mnohonásobný bod, jest-li že souřadnice toho bodu vyhovují podmínkám

$$\frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

a tomu tak skutečně jest pro průměty bodů uvažovaných.

Neboť jest

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt} + \alpha' x + \beta' = 0,$$

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{(M+N\alpha+P\gamma)(N\beta'+P\delta')-(N\beta+P\delta+Q)(N\alpha'+P\gamma')}{(M+N\alpha+P\gamma)^2}=0;$$

první podmínka v základě druhé redukuje se na

$$\alpha'x+\beta'=0$$

a není nic jiného jak rovnice (42), vložíme-li za x hodnotu z (41), jest tudíž vyplněna.

Druhou podmínku lze psáti

$$\frac{M+N\alpha+P\gamma}{N\beta+P\delta+Q}=\frac{N\alpha'+P\gamma'}{N\beta'+P\delta'},$$

a nahradíme-li levou stranu pomocí (42) též

$$\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{N\alpha'+P\gamma'}{N\beta'+P\delta'},$$

aneb dále

$$P(\alpha'\delta'-\beta'\gamma')=0,$$

kteréžto podmínce na základě (2) u každé plochy rozvinutelné vyhověno jest.

Tím jest především dokázáno, že průmět křivky průsečné v bodech, v kterých se promítají body křivky vratu, určené rovnicí (42), má mnohonásobné body, předpokládáme-li všeobecnou polohu roviny sečné vůči rovinám souřadným; poněvadž však dle čl. 8. každý průmět křivky vratu jest zároveň obrysem, a tedy uvažované body obrysu náleží, může v bodech těch nastati pouze úvrat neb návrat. V skutečnosti jest to úvrat, jak nejlépe geometrický názor o tom poučuje. Bodů úvratu jest tolik, kolik různých kořenů t podává rovnice (42).

Zde zároveň poznáváme důvod, o kterém v čl. 7 jsme se zmínili, proč totiž křivka tato obdržela jméno křivky vratu.

Rovnice tečny v bodu úvratu obdržeti lze co průsečnice roviny sečné (40) s rovinou tečnou (5), při čemž arci třeba vložiti za t hodnoty z rovnice (42) vypočtené. Obdržíme tu řešením rovnic (40) a (6) co rovnice tečny

$$\left.\begin{aligned} y&=\frac{(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')P-\alpha'M}{\alpha'N+\gamma'P}x+\frac{(\beta\gamma'-\delta\alpha')P-\alpha'Q}{\alpha'N+\gamma'P},\\ z&=-\frac{(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')N+\delta'M}{\alpha'N+\gamma'P}x-\frac{(\beta\gamma'-\delta\alpha')N+\gamma'Q}{\alpha'N+\gamma'P},\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

29. Předpokládejme nyní případ druhý, kde rovina sečná obsahuje jednu přímku povrchovou plochy. Přímce té nechť ná-

leží určitá hodnota t_1 a buďtež α_1, β_1, atd. hodnoty funkcí α, β, atd. pro zvláštní tuto hodnotu. Přímka má pak rovnice

$$y = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$z = \gamma_1 x + \delta_1,$$

a libovolná rovina přímkou tou procházející rovnici tvaru

$$(\gamma_1 + \varrho\alpha_1) x - \varrho y - z + \delta_1 + \varrho\beta_1 = 0,$$

kdež značí ϱ jistého součinitele, který polohu roviny blíže stanoví.

Rovina touto rovnicí určená jest nyní naší rovinou sečnou; jak patrno možno pro tento případ užíti veškerých odvozených vzorců článků 27. a 28., vložíme-li tam všude

$$\begin{array}{ccc} \gamma_1 + \varrho\alpha_1 & \text{místo} & M, \\ -\varrho & \text{„} & N, \\ -1 & \text{„} & P, \\ \delta_1 + \varrho\beta_1 & \text{„} & Q; \end{array}$$

učiníme-li tak, obdržíme pro souřadnice křivky průsečné dle (41) výrazy

$$x = -\frac{\varrho(\beta_1 - \beta) + \delta_1 - \delta}{\varrho(\alpha_1 - \alpha) + \gamma_1 - \gamma}$$
$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta.$$

Vyloučíme-li opět vždy ze dvou těchto rovnic proměnnou t, zjednáme si rovnice průmětů křivky průsečné na rovinách souřadných. Poněvadž každá přímka povrchová jest tečnou křivky vratu, dotýká se též rovina sečná a přímku t_1 obsahující křivky vratu v bodu, jehož souřadnice dle (10) jsou

$$x = -\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}, \quad y = \alpha_1 x + \beta_1, \quad z = \gamma_1 x + \delta_1;$$

přímce t_1 předcházející přímka jakož i následující protínají rovinu sečnou ve dvou soumezných bodech křivky vratu; prvek těmito body omezený náleží tudíž současně křivce vratu, křivce průsečné a přímce povrchové t_1, t. j. všechny tři útvary se dotýkají v jediném bodu, jehož souřadnice jsou

$$x = -\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}, \quad y = \frac{\beta_1\alpha'_1 - \alpha_1\beta'_1}{\alpha'_1}, \quad z = \frac{\delta_1\alpha'_1 - \gamma_1\beta'_1}{\alpha'_1}.$$

Mimo to protíná však všeobecně rovina sečná křivku vratu ještě v jiných bodech, které se stanoví jako v případě prvním z podmínečné rovnice (42); tato rovnice v tomto případě jest

$$\beta'[\varrho(\alpha_1 - \alpha) + \gamma_1 - \gamma] - \alpha'[\varrho(\beta_1 - \beta) + \delta_1 - \delta] = 0.$$

Kořeny t této rovnice podávají ony přímky povrchové, které rovinu sečnou protínají v bodech křivky vratu. V každém z těchto bodů má křivka průsečná opět úvrat a tečny příslušné obdrží se opět dle vzorců (43), vloží-li se tam za M, N, P, Q výše uvedené hodnoty.

30. Podobně se má věc v případu třetím, pak-li totiž rovina sečná jest rovinou tečnou plochy, t. j. rovinou oskulační křivky vratu; v případu tom skládá se průsek ze dvou nekonečně blízkých přímek povrchových a z křivky, která s křivkou vratu má tři po sobě jdoucí body společné, tedy dotknutí stupně druhého. Obě křivky mají v bodu tom stejný poloměr křivosti.

Rovina tečná podle přímky t_1 má dle (5) rovnici

$$(\alpha_1\gamma'_1 - \gamma_1\alpha'_1)x - \gamma'_1 y + \alpha'_1 z + \beta_1\gamma'_1 - \delta_1\alpha'_1 = 0;$$

jest tu tedy

$$M = \alpha_1\gamma'_1 - \gamma_1\alpha'_1, \quad N = -\gamma'_1,$$
$$P = \alpha'_1 \quad , \quad Q = \beta_1\gamma'_1 - \delta_1\alpha'_1$$

a následovně souřadnice bodů křivky průsečné dle (41)

$$x = -\frac{\gamma'_1(\beta_1 - \beta) - \alpha'_1(\delta_1 - \delta)}{\gamma'_1(\alpha_1 - \alpha) - \alpha'_1(\gamma_1 - \gamma)},$$
$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta.$$

Vyloučením t obdrží se opět průměty křivky průsečné na rovinách souřadných.

Rovina tečná může mimo to protínati ještě křivku vratu v některých bodech; ty se obdrží jako v prvních dvou případech z podmínečné rovnice (42), která v tomto případu jest

$$\beta'[\gamma'_1(\alpha_1-\alpha)-\alpha'_1(\gamma_1-\gamma)]-\alpha'[\gamma'_1(\beta_1-\beta)-\alpha'_1(\delta_1-\delta)] = 0.$$

Podobně se ustanoví i rovnice tečen v těchto bodech úvratu dle vzorců (43).

Podotýkáme ještě, že ve všech třech případech křivka průsečná má též *dvojné body* tam, kde rovina sečná protíná křivku dvojnou plochy rozvinutelné. Třeba tedy jen dle čl. 23. stanoviti rovnice křivky dvojné a určiti pak průseky její s rovinou sečnou. Obě tečny v dvojném bodu křivky průsečné obdrží se co průsečnice roviny sečné s oběmi rovinami tečnými, které onomu dvojnému bodu plochy přísluší.

31. *Asymptoty křivky průsečné.* Poněvadž asymptoty jsou tečny v bodech v nekonečnu, třeba především vyšetřiti, zda-li křivka průsečná vůbec takových bodů má. Body ty vzniknouti

mohou dvojím způsobem: 1. je-li některá přímka povrchová rovnoběžna s rovinou sečnou a 2. má-li plocha některé přímky zcela v nekonečnu.

ad 1. Přímka povrchová

$$y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta$$

jest tenkráte rovnoběžna s rovinou

$$Mx + Ny + Pz + Q = 0,$$

pak-li vyplněna jest podmínka *)

$$M + N\alpha + P\gamma = 0; \tag{44}$$

naopak podává tato rovnice ony hodnoty t, jimž příslušné přímky povrchové jsou rovnoběžny s rovinou sečnou a roviny tečné podle těchto přímek protínají rovinu sečnou v asymptotách křivky průsečné. Třeba tudíž nejprve řešiti rovnici (44), obdržené hodnoty t vložiti postupně do (5), čímž obdržíme rovnice příslušných rovin tečných, a konečně určiti průsečnice těchto rovin s rovinou sečnou (40).

ad 2. Zde především jest nám zodpovídati otázku: Kdy má plocha přímky zcela v nekonečnu? Předpokládáme-li přímku ve všeobecné poloze, totiž ku všem třem průmětnám nakloněnou, bude tenkráte nalezati se zcela v nekonečnu, pak-li nejméně dva z průmětův jejích zapadnou do nekonečna; jsou-li však průměty zcela v nekonečnu, určují na osách nekonečně velké úseky a z toho nalezti lze ony hodnoty t, jimž příslušné přímky povrchové plochy jsou zcela v nekonečnu.

Úsekové rovnice průmětů přímky povrchové jsou

$$\frac{\alpha x}{-\beta} + \frac{y}{\beta} = 1, \quad \frac{\gamma x}{-\delta} + \frac{z}{\delta} = 1,$$

$$\frac{\gamma y}{\beta\gamma - \alpha\delta} - \frac{\alpha z}{\beta\gamma - \alpha\delta} = 1;$$

a tedy podmínky, aby průměty přímky zapadly do nekonečna

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \infty, \quad \beta = \infty,$$

$$-\frac{\delta}{\gamma} = \infty, \quad \delta = \infty,$$

$$\frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} = \infty, \quad \frac{-\beta\gamma - \alpha\delta}{\alpha} = \infty.$$

*) Dr. F. J. Studnička: „Anal. geometrie v prostoru“ str. 44.

Stává-li tedy takové hodnoty t, která čtyrem těmto podmínkám, z nichž vždy dvě v jedné řádce psané současně platí, vyhovuje, pak přímka povrchové této hodnotě náležící nalezá se zcela v nekonečnu; rovnice roviny tečné podle této přímky obdrží se vložením vypočtěné hodnoty t do rovnice (5). Takto stanovená rovina tečná může též zcela nalezati se v nekonečnu, načež i průsečnice její s rovinou sečnou, t. j. asymptota jest v nekonečnu. Jest-li však rovina tečná jen v konečnu, určuje v průseku svém s rovinou sečnou hledanou asymptotu křivky průsečné.

Řídící kužel plochy rozvinutelné.

32. Myslíme-li libovolným bodem v prostoru ku každé přímce povrchové plochy rozvinutelné přímku rovnoběžnou, vytvořují veškeré tyto přímky plochu kuželovou, která slove *řídící.* Rovnice plochy té lze snadno sobě zjednati.

Budiž plocha rozvinutelná určena opět rovnicemi

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta, \\ z &= \gamma x + \delta, \end{aligned} \tag{1}$$

a m, n, p souřadnice bodu, který volíme co střed plochy kuželové. Rovnice přímky rovnoběžné s přímkou (1) a procházející bodem m, n, p jsou

$$\begin{aligned} y - n &= \alpha (x - m), \\ z - p &= \gamma (x - m); \end{aligned}$$

rovnicemi těmi jest již plocha kuželová řídící určena. Vyloučíme-li z obou rovnic proměnnou t v α a γ obsaženou, obdržíme rovnici kužele v obyčejném tvaru.

V případu, kde volíme počátek souřadnic co střed kužele, jest

$$m = 0, \quad n = 0, \quad p = 0$$

a kužel určen pak jednoduššími rovnicemi

$$y = \alpha x, \quad z = \gamma x.$$

Poněvadž dvěma soumezným přímkám plochy rozvinutelné přísluší taktéž dvě soumezné přímky plochy kuželové, k oněm rovnoběžné, a dvěmi soumeznými přímkami na jedné i druhé ploše roviny tečné určeny jsou, jsou patrně i roviny tečné kužele podle jednotlivých jeho přímek povrchových rovnoběžny k rovinám tečným plochy rozvinutelné podle přímek oněm na kuželi příslušných. Této vlastnosti kužele řídícího užívá se v deskriptivní geometrii hojně k řešení úloh k rovinám tečným plochy rozvinutelné se vztahujících, jako určení tečných rovin daným bodem v prostoru procházejících, neb k určité přímce neb rovině rovnoběžných atd. Při analytickém vyšetřování, jehož jsme se v předcházejícím výhradně přidrželi, řešiti lze úlohy takové bezprostředně bez řídícího kužele, pouze užitím rovnice (5) roviny tečné plochy rozvinutelné.

Dějiny všeobecné gravitace.

Od

Dr. A. Seydlera.

(Pokračování.)

IV. O tvaru země.

Tvar země naší jest problem, jenž přes dva tisíce let zaměstnává mysl lidskou, aniž by byl dosud nalezl úplného řešení. Jest to problem, k jehož řešení přispívaly po staletí nejbystřejší hlavy z oboru věd mathematických, nejbedlivější pozorovatelé, jichž zrak vynikal schopností, oceniti minimalní veličiny, nejpilnější počtáři, kteří leta živobytí svého věnovali výpočtům, jichž výsledek lze vyjádřiti několika číslicemi; problem, jenž důrazně hlásá, že jest sebe mohutnější práce jednotlivce pouhou buňkou v organismu vědy, ovšem buňkou, jejíž plastická síla témuž organismu vykazuje na staletí, snad na vždy určitý směr rozvoje, byl-li původcem jejím — Newton!

Otázku po tvaru země lze řešiti ze dvou stránek, které se k sobě mají jako zkušenost a theorie, indukce a dedukce, vzájemně se takto doplňujíce. Můžeme totiž tvar země vyšetřiti skutečným měřením, které ovšem vede, ačkoli jest na pohled velmi jednoduché, k velmi komplikovaným diskussím mathematickým. Řadu mužů, kteří v tomto směru byli činni, zahajuje ctihodný *Eratosthenes* (III. stol. př. Kr.). O pracích v ohledu tom podniknutých nalezne čtenář důkladného poučení ve stati prof. *Em. Čubra: O měření země* (tohoto časopisu r. III. a IV., vyšla též co samostatný spisek).