Eduard Weyr

O stejnoplochém zobrazování dvou rovin

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 201--216

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120888

O stejnoplochém zobrazování dvou rovin.

Sepsal

Eduard Weyr.

Úvod.

1. Buďte x, y pravoúhlé souřadnice bodu v rovině jedné, ξ, η pak pravoúhlé souřadnice bodu v rovině druhé. Rovinu jednu na druhé *zobrazujeme* tím, že libovolnému bodu x, y přiřadíme jistým zákonem bod ξ, η; souvislost taková je tudíž dána, dány-li jsou ξ a η co funkce hodnot x, y. Naplní-li bod x, y jakýkoliv obrazec, tu sdružený bod (obraz jeho) ξ, η naplní obrazec, který zoveme obrazem onoho obrazce. *Souvislost pak nazveme stejnoplochou, mají-li každé dva sdružené obrazce stejné ploské obsahy.* O stanovení takových souvislostí se nám zde jedná.

Abychom se dodělali formulí tvaru co možná nejvšeobecnějšího, uvažme, že obecně lze stanoviti v rovině bod souřadnicemi křivočarými t. j. tím, že udáme hodnoty dvou funkcí r a s souřadnic x a y, aneb, co je totéž, že pokládáme x a y za funkce dvou nových proměnných r a s. Položme též za ξ a η jakékoli funkce dvou nových proměnných ϱ a σ.*) Souvislost obou rovní pak buď dána dvěma relacemi mezi r, s, ϱ, σ t. j. buďte ϱ a σ dány co funkce proměnných r, s.

Na př. buďte r a s vzdáleností bodu x, y od počátku souřadnic a od bodu a, b t. j. položme

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

obdobně položme třeba

$$\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \qquad \sigma = \sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (\eta-\beta)^2};$$

*) Funkce ty jsou arci potud obmezeny, že musí býti x a y takové výrazy proměnných r a s, abychom z nich mohli r a s co funkce *neodvisle* proměnných x, y pojímati Obdobně o ξ, η.

jsou pak r, s a ϱ, σ souřadnice bipolárné. Souvislost obou rovin dána na př. rovnicemi

$$r + s = \varrho\sigma; \quad \frac{r}{s} = \varrho - \sigma.$$

Patrno, že tu ellipsám, jež mají ohniska v pólech roviny první, přísluší čáry Cassini-ho v rovině druhé mající ohniska též v pólech; že kružnicím $\frac{r}{s} =$ stálé, přísluší konfokální hyperboly $\varrho - \sigma =$ stálé a t. d.

Podmínka zobrazování stejnoplochého.

2. Jaké podmínce musejí vyhověti funkce x, y proměnných r, s, funkce ξ, η proměnných ϱ, σ a konečně funkce ϱ, σ proměnných r, s, aby souvislost takto stanovená byla stejnoplochou?

Buď MM_1M_2 trojúhelník nekonečně malý v rovině xy. Danou souvislostí přísluštež těmto třem bodům body NN_1N_2 i budou patrně též body nekonečně blízkými. Přímkám MM_1, MM_2, M_1M_3 přiřaděny budou obecně arci čáry křivé, obrazec přiřaděný trojúhelníků MM_1M_2 bude tudíž křivočarý trojúhelník NN_1N_2. Má-li býti zobrazení stejnoploché, tu je nutné a patrně také postačí, aby každý infinitesimální trojúhelník MM_1M_2 se rovnal co do plochy sdruženému obrazci NN_1N_2. Nahradíme-li tento trojúhelníkem NN_1N_2, bude odchylka nekonečně malá třetího stupně, pokládáme-li strany trojúhelníku MM_1M_2 za nekonečně malé hodnoty stupně prvního. Dvojnásobná integrace vyzdvihne odchylku až na kvantitu stupně prvního t. j. v limitě na nullu. Vyjádříme-li tedy, že trojúhelník MM_1M_2 je obecně stejnoplochý s *trojúhelníkem* NN_1N_2, tu bude zobrazení stejnoplochým, t. j. sdružené obrazce budou přesně stejnoploché.

Buďte r, s hodnoty stanovící bod M čili x, y; $r + dr$, $s + ds$ nechť stanoví M_1 č. $x + dx$, $y + dy$; konečně stanovte $r + \delta r$, $s + \delta s$ bod M_2 čili $x + \delta x$, $y + \delta y$. Přidružené hodnoty buďte ϱ, σ resp. ξ, η, stanovící bod N; pak $\varrho + d\varrho$, $\sigma + d\sigma$, resp. $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ pro bod N_1 a konečně $\varrho + \delta\varrho$, $\sigma + \delta\sigma$, resp. $\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$ pro bod N_2.

Dvojnásobný ploský obsah trojúhelníku MM_1M_2 dán pak výrazem $dx\,\delta y - dy\,\delta x$.

Avšak

$$dx = \frac{\partial r}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial s} ds,$$

$$\delta x = \frac{\partial r}{\partial r} \delta r + \frac{\partial x}{\partial s} \delta s, \qquad \delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \delta r + \frac{\partial y}{\partial s} \delta s,$$

čímž napsaný determinant rozkladem sloupců podává

$$2 \triangle M M_1 M_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}\right)(dr\,\delta s - ds\,\delta r). \qquad (1)$$

Zcela obdobně máme

$$2 \triangle N N_1 N_2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} - \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right)(d\varrho\,\delta\sigma - d\sigma\,\delta\varrho). \qquad (2)$$

Avšak ϱ a σ jsouce funkce hodnot r, s, nám podávají

$$d\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial r} dr + \frac{\partial \varrho}{\partial s} ds, \qquad d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr + \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds,$$

$$\delta\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial r} \delta r + \frac{\partial \varrho}{\partial s} \delta s, \qquad \delta\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \delta r + \frac{\partial \sigma}{\partial s} \delta s;$$

čímž opět pomocí rozkladu sloupců na sčítance determinant

$$d\varrho\,\delta\sigma - d\sigma\,\delta\varrho = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)(dr\,\delta s - ds\,\delta r).$$

Vloživše tento výraz do (2), plyne z (1) a (2) podmínka

$$\triangle M M_1 M_2 = \triangle N N_1 N_2$$

ve tvaru

$$\pm\left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} - \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right)\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right). \quad (3)$$

Podmínka ta vyjádřuje, že zobrazení je stejnoploché. Znamení $\pm$ připojeno vzhledem k okolnosti, že se nám jedná jen o absolutně pojímané plochy.

Kdybychom připojili ku levé straně stálý faktor m, vyjadřovala by rovnice (3), že obrazy ξ, η jsou m-krát větší, než originály x, y. Případ ten však zahrnut vyšetřováním souvislosti stejnoploché, připojíme-li k ní zobrazení podobné dle měřítka $1 : \sqrt{m}$.

Geometrický význam vyvinutých determinantů.

3. Determinant, jenž tvoří levou stranu rovnice (3), jakož i oba faktory po pravé straně jsou funkcionálné determinanty a sice funkcí x, y proměnných r, s, pak funkcí ξ, η proměnných ϱ, σ a konečně funkcí ϱ, σ proměnných r, s. Prvním

dvěma funkcionálným determinantům se dostává geometrického významu, jež vyložíme.

Představme si veškeré body x, y příslušné stálé hodnotě r, libovolným hodnotám s; body ty naplní čáru, kterou nazveme čarou r. Obdobně budiž čarou s označeno geometrické místo všech bodů x, y příslušných danému s, libovolným hodnotám r. Čáry r a čáry s rozdělí nám rovinu x, y na ploské elementy (rovnoběžníky), z nichž jeden, mezi čarami r, s, $r + \partial r$, $s + \partial s$ vyčíslíme. Polovicí tohoto ploského elementu jest trojúhelník o rozích r, s; $r + dr$, s; r, $s + ds$ t. j. trojúhelník o rozích x, y; $x + \frac{\partial x}{\partial r} dr, dy + \frac{\partial y}{\partial r} dr$; $dx + \frac{\partial x}{ds} ds, dy + \frac{\partial y}{\partial s} ds$, tedy onen element, jež označíme symbolem $(r\, s)$, dán rovnicí

$$(r\, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} dr & \frac{\partial y}{\partial r} dr \\ \frac{\partial x}{\partial s} ds & \frac{\partial y}{\partial s} ds \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}\right) dr\, ds.*)$$

Obdobně máme

$$(\varrho\, \sigma) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varrho}\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} - \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}\frac{\partial \eta}{\partial \varrho}\right) d\varrho\, d\sigma.$$

Vzhledem k tomu můžeme podmínku (3) takto formulovati: „*Stanovíme-li body roviny jedné proměnnými r, s, body roviny druhé proměnnými ϱ, σ, jsou-li mimo to ploské elementy obou rovin resp. dány výrazy*

$$(r\, s) = P\, dr\, ds, \quad (\varrho\, \sigma) = \Pi\, d\varrho\, d\sigma,$$

tu jest rovnice

$$\pm \frac{P}{\Pi} = \frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial r} \tag{4}$$

nutnou a postačující podmínkou, aby souvislost obou rovin byla stejnoplochá.“

Pokládáme-li ξ, η za bod originálný, x, y pak za obraz, máme na místo napsané rovnice patrně tuto:

$$\pm \frac{\Pi}{P} = \frac{\partial r}{\partial \varrho}\frac{\partial s}{\partial \sigma} - \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial s}{\partial \varrho}.$$

Z toho jde, že platí relace:

$$\left(\frac{\partial \varrho}{\partial r}\frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial \varrho}\frac{\partial s}{\partial \sigma} - \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{\partial s}{\partial \varrho}\right) = 1.$$

---

*) V. *Studnička*, Základové vyšší mathematiky, o počtu integrálním, strana 133.

Relace ta vyjadřuje známou vlastnost funkcionálných determinantů; ostatně ji lze přímo takto odvoditi. Máme

$$d\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial r} dr + \frac{\partial \varrho}{\partial s} ds, \quad d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr + \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds.$$

Položivše

$$\frac{\partial \varrho}{\partial r} \frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = D,$$

obdržíme řešením napsaných dvou rovnic dle dr a ds:

$$D\, dr = \frac{\partial \sigma}{\partial s} d\varrho - \frac{\partial \varrho}{\partial s} d\sigma,$$

$$D\, ds = -\frac{\partial \sigma}{\partial r} d\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial r} d\sigma,$$

a tudíž

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} = \frac{1}{D} \frac{\partial \sigma}{\partial s}; \quad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = -\frac{1}{D} \frac{\partial \varrho}{\partial s},$$

$$\frac{\partial s}{\partial \varrho} = -\frac{1}{D} \frac{\partial \sigma}{\partial r}; \quad \frac{\partial s}{\partial \sigma} = \frac{1}{D} \frac{\partial \varrho}{\partial r}.$$

Tím pak plyne

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} \frac{\partial s}{\partial \sigma} - \frac{\partial r}{\partial \sigma} \frac{\partial s}{\partial \varrho} = \frac{1}{D^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial r} \frac{\partial \sigma}{\partial s} - \frac{\partial \varrho}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = \frac{1}{D^2} D = \frac{1}{D},$$

čímž hořejší formule odvozena.

Stanovení systémů o daných ploských elementech.

4. Značí-li $P\ (r, s)$ libovolnou funkci proměnných r, s, tu lze x a y co funkce těchto proměnných vždy tak určiti, aby ploský element (rs) se rovnal $P\, dr\, ds$; a sice lze udati nesčíslně mnoho řešení tohoto úkolu, neboť jednu z hledaných funkcí, na př. y, možno libovolně zvoliti.

Daný úkol požaduje, aby

$$\pm P = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

Zvolivše funkci y, na př. $y = \psi\ (r, s)$, známe i derivace $\frac{\partial y}{\partial r} = \psi_1$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \psi_2$ a máme pro neznámou x částečnou differencialní rovnici lineární

$$\psi_2 \frac{\partial x}{\partial r} - \psi_1 \frac{\partial x}{\partial s} = \pm P. \tag{5}$$

Integrace její vyžaduje, abychom integrovali soudobé rovnice

$$\frac{dr}{\psi_2} = -\frac{ds}{\psi_1} = \frac{dx}{\pm P}. \tag{6}$$

První dva členy podávají
$$\psi_1\, dr + \psi_2\, ds = 0$$
a tu patrně
$$\psi(r, s) = \alpha \tag{7}$$
jedním z integrálů rovnic (6), značí-li α integrační stálou. Pomocí (7) lze vyjádřiti s co funkci r, α a tedy lze z rovnice (6) vyvinouti pouhou kvadraturou druhý integrál
$$x + \beta = \int \pm \frac{P\, dr}{\psi_2}. \tag{8}$$
Rovnice
$$\beta = \text{libovolné funkci } (\alpha)$$
podává pak — dosadivše za α a β hodnoty z (7) a (8) plynoucí — hledanou relaci mezi x, r a s.

Příklad. Zvolíme-li za r a s resp. souřadnice x a y t. j. položíme-li $x = r$; $y = s$, tu máme
$$(r\, s) = dr\,.\, ds \text{ t. j. } P = 1.$$

Položme si otázku: Jaký je obecný tvar funkce x, je-li $y = s$ a opět $(r\, s) = dr\,.\, ds$?

Zde máme $y = \psi(r, s) = s$, tedy $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 1$, čímž pro x platí rovnice (5):
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \pm 1,$$
tedy
$$x = \pm r + F(s),$$
značí-li F libovolnou funkci.

Příklad. Budiž
$$(r\, s) = r\, s\, dr\, ds; \quad y = s - r.$$
Tedy $\psi_1 = -1$, $\psi_2 = 1$, čímž (5) zní
$$\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial x}{\partial s} = \pm r\, s.$$

Jde tedy o integrování soudobých rovnic
$$\frac{dr}{1} = \frac{ds}{1} = \frac{dx}{\pm rs}.$$

Jeden integrál jest
$$s - r = \alpha,$$
tedy $s = r + \alpha$, čímž
$$\frac{dr}{1} = \frac{dx}{\pm r(r + \alpha)},$$

tedy

$$x+\beta=\pm\left(\frac{1}{3}r^3+\frac{\alpha}{2}r^2\right).$$

Řešením obou integrálů dle α a β máme

$$\alpha=s-r;\quad \beta=\pm\left(\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{2}r^2(s-r)\right)-x$$

a tedy representuje

$$\text{libovolná funkce } (s-r)=\pm\left(\frac{1}{2}r^2s-\frac{1}{6}r^3\right)-x$$

hledanou relaci. Lze ji patrně psáti:

$$x=\pm\left(\frac{1}{2}r^2s-\frac{1}{6}r^3\right)+F(s-r);$$

k tomu

$$y=s-r,$$

a máme systém souřadnic, v němž ploský element $(r\,s)$ je dán výrazem $rs\,dr\,d\varrho$.

Na zkoušku utvořme

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\pm(rs-\frac{1}{2}r^2)-F';\quad \frac{\partial x}{\partial s}=\pm\frac{1}{2}r^2+F';$$

$$\frac{\partial y}{\partial r}=-1\quad;\quad \frac{\partial y}{\partial s}=1;$$

tedy

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}=\pm rs.$$

Příklad. Položme

$$(rs)=(r+s)\,dr\,ds;\quad y=rs.$$

Zde $\psi_1=s$; $\psi_2=r$, tedy máme soudobé rovnice (6):

$$\frac{dr}{r}=-\frac{ds}{s}=\frac{dx}{\pm(r+s)}.$$

Jeden integrál $rs=\alpha$ podává $s=\frac{\alpha}{r}$, tedy

$$dx=\pm\frac{dr}{r}\left(r+\frac{\alpha}{r}\right),$$

čímž

$$x+\beta=\pm\left(r-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Máme tedy $\quad \alpha=rs;\ \beta=\pm(r-s)-x,$

pročež libovolná relace mezi α a β dána rovnicí

$$x = \pm (r - s) + F\,(rs),$$

k tomu

$$y = rs,$$

a máme hledaný systém.

Geometrický význam předchozí úvahy.

5. Výsledky, jichž jsme se dodělali v předcházejícím článku, můžeme v případu, že $P = 1$ vyložiti spůsobem geometrickým.

Stanovíme-li body obou rovin přímo pravoúhlými souřadnicemi t. j. položíme-li

$$x = r,\ y = s\,;\ \xi = \varrho, \eta = \sigma,$$

tu zní podmínka (3) vyjadřující, že zobrazení jest stejnoploché

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \pm 1.$$

Zvolivše funkci η proměnných x, y libovolně, lze dle předcházejícího článku pouhou kvadraturou stanoviti funkci ξ.

Učiníme-li však $\eta = \psi\,(x, y)$, tu patrně soustavě přímek $\eta =$ const. rovnoběžných s osu ξ přiřaďujeme systém čar $\psi\,(x, y) =$ const., i můžeme tudíž vyřknouti tuto větu:

„*Stanovení souvislosti stejnoploché, kterou přiřaděna soustava daných čar soustavě rovnoběžných přímek, vyžaduje jediné kvadratury.*“

Příklad. Budiž přiřaděna souvislostí stejnoplochou přímce $\eta =$ const. čára $\lambda\,(x)\,\mu\,(y) =$ const., značí-li λ a μ dvě dané funkce.

Máme zde $\psi\,(x, y) = \lambda\,(x)\,\mu\,(y)$, tudíž

$$\psi_1 = \lambda'(x)\,\mu\,(y)\,;\ \psi_2 = \lambda(x)\,\mu'(y).$$

Rovnice (6) znějí tedy

$$\frac{dx}{\lambda(x)\,\mu'(y)} = -\frac{dy}{\lambda'(x)\,\mu(y)} = \pm\, d\xi.$$

Jeden integrál jest

$$\lambda(x)\,\mu(y) = \alpha,$$

pročež

$$\frac{dx}{\alpha\frac{\mu'}{\mu}} = \frac{dy}{\alpha\frac{\lambda'}{\lambda}} = \pm\, d\xi.$$

Předpokládejme, že

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = m,$$

značíce literou m stálou, pak lze i druhý integrál vyčísliti. Máme

$$\mu = e^{my+n};$$

n jest opět stálá. Tudíž nyní

$$\frac{dx}{\alpha m} = \pm d\xi, \text{ t. j. } \pm \xi + \beta = \frac{x}{\alpha m}.$$

Z rovnic integrálních

$$\lambda\mu = \alpha, \; \beta = \frac{x}{\alpha m} \mp \xi$$

plyne hledaná relace pro ξ:

$$\frac{x}{\alpha m} \mp \xi = \text{libovolné funkci } (\lambda\mu)$$

to jest

$$\xi = \pm \frac{x}{m\lambda\mu} + F(\lambda\mu).$$

Tato a rovnice

$$\eta = \lambda\mu,$$

stanoví tedy souvislost stejnoplochou; arci se tu $\mu = e^{my+n}$, funkce $\lambda(x)$ jest však libovolná.

Zkouška:

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \pm \frac{1}{m\mu}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{x\lambda'}{\lambda^2}\right) + \lambda'\mu F';$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \mp \frac{x}{m\lambda\mu^2}\mu' + \lambda\mu' F';$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \lambda'\mu; \; \frac{\partial\eta}{\partial y} = \lambda\mu'.$$

Avšak

$$\frac{\mu'}{m\mu} = 1$$

a tudíž skutečně

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \pm\left[\lambda\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda' x}{\lambda^2}\right) + \frac{\lambda' x}{\lambda}\right] = \pm 1.$$

6. Položme si úlohu obecnější: „*V každé z obou rovin dána jest soustava čar; má se stanoviti souvislost stejnoplochá tak, aby čarám soustavy jedné daným způsobem příslušely čáry soustavy druhé.*“

Buď

$$f(x, y) = c,$$

kdež c značí parametr stanovící jednotlivé čáry, rovnicí dané soustavy v rovině x, y a

$$\varphi(\xi, \eta) = \gamma$$

soustava daná v rovině ξ, η. Sdružené čáry nechť jsou vytknuty relací

$$\gamma = \chi(c) .$$

Zvolme pak v rovině x, y neodvisle proměnné r, s_0 a v rovině ξ, η hodnoty ϱ, σ dle rovnic

$$r = f_1(x, y), \; s_0 = f(x, y) ; \; \varrho = \varphi_1(\xi, \eta), \; \sigma = \varphi(\xi, \eta) ,$$

kdež f_1 a φ_1 libovolné funkce značí. Pak rovnice $\gamma = \chi(c)$ podává relaci

$$\sigma = \chi(s_0),$$

a tato přejde prostě na

$$\sigma = s, \tag{α}$$

položíme-li

$$\chi(s_0) = \chi(f(x,y)) = s ,$$

značí-li s novou proměnnou na místě s_0 zavedenou. Jde nyní o to, abysme stanovili mezi r, s, ϱ, σ ještě jednu relaci tak, aby vznikající souvislost byla stejnoplochá. Jestliže vyčíslením obdržíme $(rs) = P dr\, ds$; $(\varrho\sigma) = \Pi d\varrho\, d\sigma$,

tedy jest podmínka zobrazení stejnoplochého

$$\pm \frac{P(r, s)}{\Pi(\varrho, \sigma)} = \frac{\partial\varrho}{\partial r}\frac{\partial\sigma}{\partial s} - \frac{\partial\varrho}{\partial s}\frac{\partial\sigma}{\partial r},$$

t. j.

$$\pm \frac{P(r,s)}{\Pi(\varrho, \sigma)} = \frac{\partial\varrho}{\partial r},$$

z čehož vzhledem k relaci (α) integrováním obdržíme

$$\pm \int P(r, s)\, dr = \int \Pi(\varrho, s)\, d\varrho + \text{libovolná funkce}\,(s). \tag{β}$$

Relace (α) a (β) stanoví hledanou souvislost. *Je patrno, že řešení daného úkolu vyžaduje jen dvou kvadratur.*

Příklad. Nechť soustavě soustředných kružnic je přiřaděna soustava parabol se společným vrcholem a společnou osou; tedy položme

$$x^2 + y^2 = c ; \; \eta^2 = 2\gamma\xi ,$$

a souvislost mezi poloměrem a parametrem buď na př.

$$\gamma = e^c = \chi(c) .$$

Máme tedy

$$e^c = e^{x^2+y^2} = s\,;\quad \frac{\eta^2}{2\xi} = \sigma \tag{α}$$

a tedy

$$s = \sigma\,. \tag{β}$$

Zaveďme r a ϱ třeba rovnicemi

$$x^2 + y^2 = r\,;\quad 2\xi = \varrho\,, \tag{γ}$$

i obdržíme z (α) a (γ) řešením dle x, y resp. ξ, η:

$$2x^2 = r + \log s \quad ;\ \xi = \frac{1}{2}\varrho\,;$$

$$2y^2 = -r + \log s\,;\ \eta = \sqrt{\varrho\sigma}\,.$$

Differencováním

$$4x\frac{\partial x}{\partial r} = 1\,;\ 4x\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{s}\,;\ 4y\frac{\partial y}{\partial r} = -1\,;\ 4y\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{s}$$

a tedy

$$16\,xy\,P(r_1\,s) = \frac{2}{s}\,;\ P = \frac{1}{8s\,xy} = \frac{1}{4s\sqrt{(\log s)^2 - r^2}}\,.$$

Dále

$$\Pi(\varrho,\,\sigma) = \frac{1}{4\varrho\sqrt{\varrho\sigma}}\,.$$

Ku stanovení ϱ máme tedy rovnici

$$\pm\int\frac{dr}{4s\sqrt{(\log s)^2 - r^2}} = \int\frac{d\varrho}{4\varrho\sqrt{\varrho s}} + \text{libovoln. funkce } (s),$$

t. j.

$$\pm\frac{1}{s}\,\arcsin\frac{r}{\log s} = -\frac{2}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\varrho}} + \text{libovol. funkce } (s),$$

t. j.

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} = F(s) \pm \frac{1}{\sqrt{2s}}\arcsin\frac{r}{\log s}\,. \tag{δ}$$

Rovnice (β) a (δ) stanoví hledanou souvislost.

7. Problém v předcházejícím odstavci vytknutý připouštěl nekonečné množství řešení; toto se však úplně určí, formulován-li úkol takto: „Soustavě daných čar má přiřaděna býti soustava jiná daným spůsobem; mimo to libovolné čáře nechť přísluší jistá též libovolně vytknutá čára.“ Patrně lze tedy za jednu hledanou relaci položiti opět $s = \sigma$, dále vyřknout pod-

mínku, aby čáře $r = f(s)$ příslušela čára nějaká $\varrho = \varphi(\sigma)$. Máme-li zase $(r, s) = P dr\, ds$; $(\varrho, \sigma) = \Pi d\varrho\, d\sigma$,
tedy máme zase podmínku

$$\pm \frac{P}{\Pi} = \frac{\partial \varrho}{\partial r}$$

a tedy — jelikož při $r = f(s)$ má býti $\varrho = \varphi(\sigma)$ —

$$\pm \int_{r = f(s)}^{r} P\, dr = \int_{\varrho = \varphi(\sigma)}^{\sigma} \Pi\, d\varrho \tag{9}$$

co druhou relaci stanovící hledanou souvislost stejnoplochou.

Příklad. Buďte jak čáry $s = \text{const.}$, tak i čáry $\sigma = \text{const.}$, čárami aequidistantními t. j. orthogonálnými trajektoriemi soustavy přímek. Budiž dále r oblouk měřený na čárách s od nějakých pevných míst t. j. z jisté pevné čáry; obdobného významu měj hodnota ϱ. Pak patrně

$$(r, s) = dr\, ds; \quad (\varrho, \sigma) = d\varrho\, d\sigma,$$

i máme tedy

$$\pm \int_{r = f(s)}^{r} dr = \int_{\varrho = \varphi(\sigma)}^{\varrho} d\varrho,$$

a stejnoplochá souvislost tu stanovena rovnicemi

$$r - f(s) = \varrho - \varphi(\sigma),$$
$$s = \sigma.$$

Rozdíl oblouků $r - \varrho$ závisí tedy jen na hodnotě s, t. j. podél čar s a σ jsou sdružené body v stejných vzdálenostech uspořádány; vzdálenostmi zde arci rozumíme *oblouky* těchto čar.

Kollineárný vztah stejnoplochý.

8. Položme si otázku: *Který jest nejobecnější stejnoplochý vztah kollineárný?*

Učinivše k vůli stručnosti
$R = ax + by + c$; $R_1 = a_1 x + b_1 y + c_1$; $R_2 = a_2 x + b_2 y + c_2$,
tu dán rovnicemi

$$\xi = \frac{R_1}{R}; \quad \eta = \frac{R_2}{R}$$

obecný vztah kollineárný, značí-li x, y, ξ, η zase souřadnice pravoúhlé. Jelikož $P = \Pi = 1$, máme

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \pm 1$$

za podmínku, aby souvislost byla stejnoplochou. Avšak

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{a_1R-aR_1}{R^2};\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{a_2R-aR_2}{R^2};$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{b_1R-bR_1}{R^2};\quad \frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{b_2R-bR_2}{R^2},$$

tudíž ona podmínka

$\pm R^4=(a_1R-aR_1)(b_2R-bR_2)-(b_1R-bR_1)(a_2R-aR_2)$,

t. j. $\pm R^3=(a_1b_2-a_2b_1)R+(a_2b-ab_2)R_1+(ab_1-a_1b)R_2$,

čili píšíce pravou stranu co determinant

$$\pm R^3=\begin{vmatrix} R & R_1 & R_2\\ a & a_1 & a_2\\ b & b_1 & b_2\end{vmatrix}.$$

Levá strana jest výrazem kubickým vzhledem ku x a y, pravá však jen lineárným; má-li napsaná totožnost existovati, nesmí levá strana, a tedy taky pravá, obsahovati ani x ani y. Máme tedy

$$a=b=0;\quad R=c,$$

čímž ona podmínka zní:

$$\pm c^3=\begin{vmatrix} c & R_1 & R_2\\ 0 & a_1 & a_2\\ 0 & b_1 & b_2\end{vmatrix},$$

t. j.
$$\pm c^2=a_1b_2-a_2b_1.$$

Relace

$$\xi=\frac{1}{c}(a_1x+b_1y+c_1);\quad \eta=\frac{1}{c}(a_2x+b_2y+c_2),$$

je-li zároveň $\pm c^2=a_1b_2-a_2b_1$, (10)

representují tudíž nejobecnější kollinearný stejnoplochý vztah dvou rovin. Relace tyto stanoví patrně příbuznost stejnoplochou.

O isogonálném vztahu stejnoplochém.

9. Položme si další otázku: *Který vztah dvou rovin, jsa stejnoplochým, jest současně isogonálným*, t. j. takovým, že se sdružené čáry v stejných úhlech protínají? Snadno můžeme předvídati, že vztah stejnoplochý a isogonálný jest shodností (kongruencí). Počtem to můžeme takto ukázati.

Buďte x, y a ξ, η pravoúhlé souřadnice sdružených bodů. Stejnost sdružených ploch vyžaduje, aby

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\pm 1, \tag{11}$$

isogonálnost pak, aby

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mp \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

kdež platí obě horní aneb obě dolní znamení. Ponechme na dále jen horní, poněvadž substitucí $\eta = -\eta_1$ případ znamení dolních na onen převádíme.*) Máme tedy

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{12}$$

Snadno nyní ukážeme, že funkce ξ, η proměnných x, y, které by vyhověly rovnicím (11) a (12), jsou nutně funkcemi celistvými a lineárnými.

Především máme z (12) derivováním

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0, \\ \text{obdobně z (12)} \quad &\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Položíme-li za derivace η dle x a y jich hodnoty z (12) anebo naopak za derivace ξ dle x a y jich hodnoty z těchže rovnic do (11), obdržíme

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 1; \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 1. \tag{14}$$

Podrželi jsme na pravých stranách jen znamení $+$, jelikož jsou při realné transformaci i levé strany kladné. Derivujeme-li první z nich dle x a dle y, máme tyto dvě relace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0; \end{aligned} \tag{15}$$

a sečtením obou, násobivše je $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ resp. $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, obdržíme

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) + \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0,$$

*) V. *Ed. Weyr*, „O vztahu dvou rovin, jímž se nekonečně malé části podobně zobrazují (o vztahu isogonálném), tento časopis, 1873.

t. j. vzhledem ku (13) a (14)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0. \tag{16}$$

Nechtějíce předpokládati, že $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ a $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ se rovnají nulle (což by bylo přílišné a dalším beztoho zahrnuté specialisování), máme z rovnic (15) vzhledem k (16) ihned

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0. \tag{17}$$

Vzhledem k (16) a (17) soudíme, že $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ a $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ jsou hodnoty stálé, t. j. že ξ jest funkcí linearnou proměnných x, y. Z rovnic (13) a (14) lze téhož výsledku odvoditi vzhledem ku η. Položme již tedy

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by + c, \\ \eta &= a_1 x + b_1 y + c_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Rovnice (11) tu vyžaduje, by

$$ab_1 - a_1 b = \pm 1,$$

rovnice (12) čili (14), by

$$a^2 + b^2 = 1; \quad a_1{}^2 + b_1{}^2 = 1.$$

Můžeme tudíž položiti

$$a = \cos\varphi, \ b = \sin\varphi; \quad a_1 = \cos\varphi_1, \ b_1 = \sin\varphi_1.$$

Relace mezi a, b, a_1, b_1 pak podává

$$\cos\varphi \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 \sin\varphi = \pm 1 \text{ t. j. } \sin(\varphi_1 - \varphi) = \pm 1.$$

Tedy

$$\varphi_1 - \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \pm k \, . \, 2\pi.$$

Stačí vzíti $k = 0$, poněvadž jde jen o *sin* a *cos* úhlů φ a φ_1, t. j. stačí položiti

$$\varphi_1 = \varphi \pm \frac{\pi}{2},$$

čímž

$$\cos\varphi_1 = \mp \sin\varphi; \quad \sin\varphi_1 = \pm \cos\varphi, \tag{19}$$

a tedy při znameních horních formule (18):

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varphi + y\sin\varphi + c, \\ \eta &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi + c_1. \end{aligned}$$

Učinivše $\varphi = -\alpha$, máme patrně

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + c,\\ \eta &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + c_1.\end{aligned} \tag{20}$$

V případu, kdy v (19) zvolíme dolní znamení, máme formule

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos\varphi + y \sin\varphi + c,\\ \eta &= x \sin\varphi - y \cos\varphi + c_1.\end{aligned}$$

Učinivše $\varphi = \pi - \alpha$, máme

$$\begin{aligned}\xi &= -x \cos\alpha + y \sin\alpha + c,\\ \eta &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + c_1.\end{aligned} \tag{21}$$

Formule (20) jsou transformačními formulemi ze souřadnic pravoúhlých k novým, též pravoúhlým osám; formule (21) nabývají téhož tvaru, píšeme-li $-\xi$ místo ξ, a *tudíž jest systém bodů ξ, η vždy shodným se systémem bodů x, y*, čímž naše tvrzení dokázáno.

Obdobné úvahy bychom mohli provésti vzhledem k libovolným plochám a vzhledem k prostoru; nechtěje však příliš rozšiřovati objem tohoto článku, zůstavuji je době pozdější.

Příspěvek ku theorii ploch rotačních.

Zaslal

Vilém Jung v Pardubicích.

§. 1. V následujícím chci odvoditi, kdy znamená rovnice

$$(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4)\frac{\partial z}{\partial x} + (b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4)\frac{\partial z}{\partial y} = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 \tag{1}$$

differencialnou rovnici plochy rotační.

Rovnice plochy rotační má všeobecně tvar

$$\Phi\,[\delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z,\ (x - l_1)^2 + (y - l_2)^2 + (z - l_3)^2], \tag{2}$$

při čemž značí symbol Φ libovolnou funkci; o geometrickém významu veličin δ_1, δ_2, δ_3, l_1, l_2, l_3 netřeba se šířiti; jestiť každému, v tomto oboru pracujícímu, znám!

Abych řešil rovnici (1), utvořím si dle známé zásady srovnalost

$$\frac{dx}{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4} = \frac{dy}{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4} =$$