Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Emil Weyr

O rekurentním vzorci k sestrojování rovin involučních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 279--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120883

$$(\varrho_2 x\, r\, y) = (\varrho_1\, o\, r\, p) = (\varrho\, m\, r\, n) = -1.$$

Šestiúhelníku $m\,o\,x\,n\,p\,y$ možná kuželosečku opsati i vepsati.

Body styku stran šestiúhelníka $m\,o\,x\,n\,p\,y$, vzhledem ke kuželosečce vepsané, určují opět šestiúhelník, jemuž se jiná kuželosečka dá vepsati.

A podobně: Tečné v rozích šestiúhelníku $moxnpy$, vzhledem ke kuželosečce opsané, určují šestistran, jemuž se jiná kuželosečka dá vepsati.

O rekurentním vzorci k sestrojování rovnic involučních.

Sděluje

prof. **Em. Weyr** ve Vídni.

Rovnice involuce n-tého stupně zní:

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_0) - y(b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots b_0) = 0, \quad (1)$$

aneb kratčeji:

$$f(x) - y\,\varphi(x) = 0. \quad (1')$$

Jsou-li $x\;x'$ dva prvky téže skupině náležející, máme:

$$f(x) - y\,\varphi(x) = 0,$$
$$f(x') - y\,\varphi(x') = 0,$$

z kterýchžto rovnic vyloučením hodnoty y obdržíme

$$f(x)\,\varphi(x') - f(x')\,\varphi(x) = 0$$

co rovnici vyjadřující vztah mezi dvěma prvky téže skupině náležejícími. Rovnice poslední obsahuje patrně činitele $(x - x')$, t. j. nechá se vždy vpraviti do tvaru

$$(x - x')\,\psi(x\,x') = 0,$$

kde $\psi\,(x\,x')$ značí symmetrickou funkci $(n-1)$-ho stupně.

Rovnice (involuční) vyjadřující vztah dvou téže skupině náležejících prvků jest tudíž

$$\psi\,(x\,x') = 0. \quad (2')$$

Provedeme-li zde naznačený průběh skutečně, shledáme, že rovnice (2′) sestavena jest z členů všeobecného tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{n-r} & a_{n-p} \\ b_{n-r} & b_{n-p} \end{vmatrix} x^{n-p}\, x'^{n-p}\, (x^{p-r-1} + x^{p-r-2}\, x'^{p-r-3}\, x'^2 + \ldots x'^{p-r-1})$$

pro $r < p$.

Tak na př. obdržíme co rovnici involuce kvadratické

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0) - y\,(b_2x^2 + b_1x + b_0) = 0 \qquad (3)$$

rovnici následující:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x\,x' + \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} (x + x') + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b^0 \end{vmatrix} = 0; \qquad (3')$$

pro kubickou involuci

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) - y\,(b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0) = 0 \quad (4)$$

obdržíme involuční rovnici, upotřebíce k vůli jednoduchosti známého zkrácení

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix} = (a_i\,b_k),$$

$$(a_3\,b_2)\,x^2x'^2 + (a_3\,b_1)\,x\,x'\,(x + x') + (a_3\,b_0)\,(x^2 + x\,x' + x'^2) +$$
$$(a_2\,b_1)\,x\,x' + (a_2\,b_0)\,(x + x') + (a_1\,b_0) = 0; \qquad (4')$$

pro bikvadratickou involuci

$$(a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0)-y(b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0)=0$$

obdržíme involuční rovnici:

$$(a_4b_3)\,x^3x'^3 + (a_4b_2)\,x^2x'^2\,(x + x') + (a_4b_1)\,x\,x'\,(x^2 + xx' + x'^2) +$$
$$(a_4b_0)\,(x^3 + x^2x' + x'^2x + x'^3) + (a_3b_2)\,x^2x'^2 + (a_3b_1)\,xx'\,(x+x') +$$
$$(a_3b_0)\,(x^2 + xx' + x'^2) + (a_2b_1)\,xx' + (a_2b_0)\,(x+x') + (a_1b_0) = 0.$$

atd. atd.

Upravíme-li levou stranu rovnice $\psi\,(x\,x') = 0$, týká-li se involuce n-tého stupně symbolem U_n takže rovnice involuční pro involuci n-tého stupně zní $U_n = 0$; pak máme patrně:

$$U_2 = (a_2\,b_1)\,xx' + (a_2\,b_0)\,(x + x') + (a_1\,b_0)\,, \qquad (3'')$$
$$U_3 = U_2 + (a_3b_2)\,x^2x'^2 + (a_3b_1)\,xx'\,(x+x') + (a_3b_0)\,(x^2 + xx' + x'^2)$$
$$U_4 = U_3 + (a_4\,b_3)\,x^3x'^3 + (a_4\,b_2)\,x^2x'^2\,(x + x') +$$
$$(a_4\,b_1)\,xx'\,(x^2 + xx' + x'^2) + (a_4\,b_0)\,(x^3 + x^2x' + x'^2x + x'^3)$$

Pokročíme-li v řadě těchto rovnic dále, shledáme snadno následující všeobecný vzorec.

$$U_n = U_{n-1} + (a_n\,b_0)\,[x^{n-1} + x^{n-2}\,x' + \ldots\, x'^{n-1}] +$$
$$(a_n\,b_1)\,xx'\,[x^{n-2} + x^{n-3}x' + \ldots\, x'^{n-3}] +$$
$$(a_n\,b_2)\,x^2\,x'^2\,[x^{n-3} + x^{n-4}\,x' + \ldots\, x'^{n-4}] +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n\,b_{n-1})\,x^{n-1}\,x'^{n-1}$$

aneb kratčeji:

$$U_n = U_{n-1} + \sum_{k=0}^{k=n-1} (a_n b_k) x^k x'^k [x^{n-k-} + x^{n-k-2} x' \ldots x^{n-k-1}]$$

pro $n > 2$; pro $n = 2$ máme jak dříve:

$$U_2 = (a_2 b_1) xx' + (a_2 b_0)(x + x') + (a_1 b_0).$$

Úlohy.

Řešení mathematické úlohy 24.

Zaslal *Jos. Papežík*, z VII. tř. r. v Přerově.

Vyjádříme-li $\sin 2x$ známým součinem $2 \sin x \cos x$, obdržíme

$$3 \sin^2 x - 3 \cos^2 x = \cos^2 x + \sin x \cos x,$$

z čehož jde rozvedením levé strany a krácením

$$3 (\sin x - \cos x) = \cos x,$$

takže konecně se příjde ke vzorci

$$tg\, x = \frac{4}{3},$$

jemuž odpovídá ostrý úhel, užijeme-li pětimístných logarithmů,

$$x = 53^0\, 7'\, 48''.$$

(Tutéž úlohu řešil: *K. Esop* ze VI. tř. r. g., *St. Maršálek*, *V. Mikan, V. Wakunda*, ze VII tř. real. gymn. na Malé straně, *J. Tilšer,* právník v Praze, *Max Chotaš*, *A. Niederle* a *V. Remeš* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *J. Kolářský*, *J. Munzar* a *J. Ulrich* z VI. tř. r. v Hradci Kr., *J. Kopp* v Táboře, *Em. Čihák* ze VII. a *Fr. Jedlička*, z VIII. tř. gym. v Chrudími, *Fr. Kulhavý* z VI. tř. v Mladé Boleslavi, *Jan Dostál* ze VII. tř. r. v Kutné Hoře, *J. Sluka* a *J. Winkler* ze VI., *A. Basler* ze VII. tř. real. v Přerově, *Vl. Novotný*, kand. učit. v Brně, *Fr. Fischer*, *H. Polák* ze VII. a *Jos. Pytlík* ve Vodňanech.

Řešení fysikální úlohy 21.

Zaslal *V. Remeš*, ze VII. real. v Pardubicích.

Značí-li φ zeměpisnou šířku, obdržíme ze vzorce příslušného

$$\cot \varphi = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}},$$