Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Jaroslav Simonides

O křivosti ploch

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 9 (1880), No. 5, 267--274

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120882

thybius a vůbec by poměr obyvatelnosti zemské nesmírně se změnil, o čemž poučuje nás i vypočtení povrchu kulového z ellipsoidu vyčnívajícího a sotva $\frac{5}{12}$ celého povrchu obnášejícího.

Konečně poznáváme z celého pojednání tohoto, jak skrovných vědomostí mathematických jest zapotřebí, aby se tyto a podobné vývody mathematického zeměpisu pochopily, a máme zároveň dosti dobrou ukázku ze spisu Martusova, kterouž se zajisté odporučení dříve zde podané co nejvíce podporuje.

O křivosti ploch.

Napsal

Jaroslav Simonides.

V následujících řádcích se chceme pokusiti některé poučky ze všeobecné theorie ploch, vyjádřených pomocí dvou neodvisle proměnných parametrů, dokázati cestou přímou, kdežto obyčejně jich důkaz pomocí jistých identických rovnic se vede.

Jsou-li u, v dvě neodvisle proměnné, f, φ, ψ tři libovolné funkce, můžeme každou plochu určiti následujícími třemi rovnicemi.

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v). \tag{1}$$

Význam těchto parametrů leží na bíledni. Udělíme-li jednomu z nich stálou hodnotu ku př. $u = u_0$, určují nám rovnice (1) jistou křivku na dané ploše; pro všechny možné hodnoty u_0 obdržíme tedy celý systém křivek, tak že každým bodem plochy jedna prochází; jelikož o parametru v platí totéž, nahlížíme, že daná plocha jest pokryta dvěma soustavami křivek, jež mají tu vlastnost, že každá křivka jednoho systemu protíná všechny křivky druhého systemu, kdežto křivky téhož systemu se nikdy neprotínají. Z toho plyne, že v každém bodu plochy se dvě křivky protínají; udáním hodnot jistému bodu příslušících jsou tyto dvě křivky, následovně i bod sám určen.

Volme si zvláštní případ, na př. hyperbolický paraboloid, jehož rovnice jest:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Na této ploše jsou možny dva systémy přímek, jichž rovnice jsou

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2u'} v' + u'\sqrt{a}, \qquad x = \frac{\sqrt{a}}{2u_1'} v' + u_1'\sqrt{a}$$

$$y = \frac{\sqrt{b}}{2u'} v' + u'\sqrt{b}, \qquad y = \frac{\sqrt{b}}{2u_1'} v' + u_1'\sqrt{b}$$

$$z = v', \qquad z = v'$$

u' a u_1' jsou libovolné parametry, za z jsme zavedli ihned v'; zbývá nám teď pouze tyto dva systémy rovnic v jeden spojiti. K tomu účelu patrně dostačí zvolíme-li u' a v' tak, aby bylo:

$$-\frac{v'}{2u'} + u' = \frac{v'}{2u_1'} - u_1',$$

z kteréžto rovnice plyne;

$$v' = 2u' u_1'.$$

Této rovnici patrně vyhovíme, položíme-li

$$u' = \frac{u}{2}; \; u_1' = \frac{v}{2}, \quad v' = \frac{uv}{2}.$$

Lze tedy vyjádřiti hyperbolický paraboloid následujícími rovnicemi

$$x = \sqrt{a} \frac{u+v}{2},$$

$$y = \sqrt{b} \frac{u-v}{2},$$

$$z = \frac{uv}{2}.$$

Udělíme-li prvnímu nebo druhému parametru hodnotu stálou, obdržíme vždy některou z přímek na této ploše možných; a jelikož, jak známo, každým bodem této plochy dvě přímky procházejí, nahlížíme, že udáním těchto i bod určen jest.

Ostatně patrno, že obyčejné určování ploch pomocí jediné rovnice jest pouze zvláštním případem tohoto označování; jest tu totiž:

$$x = x, \quad y = y, \quad z = F(x, y) \text{ čili}$$
$$x = u, \quad y = v, \quad z = F(u, v)$$

Budiž tedy rovnicemi (1) vyjádřena jakákoli plocha, jejížto křivost vyšetřiti chceme. Budiž R (obr. 4.) jakýkoliv řez dané plochy, N normála plochy v daném bodu, p, q, r její kosinusy směrné, T tečná ku R bodem m vedená; jest tedy $\sphericalangle TmN = 90^0$, tedy

$$(\alpha)\qquad p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}+r\frac{dz}{ds}=0,\ \text{čili}$$

$$pdx+qdy+rdz=0,$$

avšak

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv;\quad dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty, obdržíme:

$$\left(p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u}\right)du+\left(p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}+v\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv=0,$$

jelikož u a v jsou neodvisle proměnné, obdržíme z této rovnice dvě jiné, totiž:

$$F=p\frac{\partial x}{\partial u}+q\frac{\partial y}{\partial u}+r\frac{\partial z}{\partial u}=0$$

$$F'=p\frac{\partial x}{\partial v}+q\frac{\partial y}{\partial v}+r\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

pro bod nekonečně blízký ní obdržíme:

$$F+dF=0,\ F'+dF'=0\ \text{či}\ dF=0,\ dF'=0.$$

Vyvineme-li tyto differenciály, obdržíme z F:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial u}+p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=0,\\&\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{dv}+\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0.\end{aligned}\right\}(\alpha)$$

Použijeme následujícího, Hoppem zavedeného označení:

$$p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+q\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+r\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\Sigma p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=E,$$

podobně

$$\Sigma p\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=F;\quad \Sigma p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=G,$$

při čemž se vztahuje znaménko Σ na součet členů, jež obdržíme, položíme-li za p a x písmena q, y, r, z; veličiny E, F, G nazval Hoppe veličinami fundamentálními druhého stupně. Použijeme-li toho označení, obdržíme z rovnice F či α:

$$\Sigma\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}+E=0,\ \Sigma\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+F=0,$$

podobně differencováním rovnice $F'=0$ následující:

$$\Sigma \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} + G = 0,\ \Sigma \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + F = 0.$$

Znásobíme-li první s du^2, druhou a čtvrtou s $du\,dv$, třetí s dv^2 a sečteme je pak, obdržíme:

$$-\left[\Sigma \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} du^2 + \left(\Sigma \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) du\,dv\right.$$

$$\left. + \Sigma \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{dv} dx^2 \right] = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Máme však

$$dp = \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv,$$

tedy

$$dp\,dx = \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} du^2 + \frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} du\,dv + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} dv^2,$$

$$dq\,dy = \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} du^2 + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} du\,dv + \frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v} dv^2,$$

$$dr\,dz = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} du^2 + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} du\,dv + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v} dz^2.$$

Dosadíme-li to do hořejší rovnice a dělíme-li na obou stranách s ds, obdržíme:

$$-\left[dp\frac{dx}{ds} + dq\frac{dy}{ds} + dr\frac{dz}{ds}\right] = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{ds};$$

differencirujeme-li však bezprostředně α, obdržíme:

$$dp\frac{dx}{ds} + dq\frac{dy}{ds} + dr\frac{dz}{ds} = -\left[pd\left(\frac{dx}{ds}\right) + qd\left(\frac{dy}{ds}\right) + rd\left(\frac{dz}{ds}\right)\right];$$

obdržíme tedy, dosadíme-li tuto hodnotu do předešlé rovnice:

$$p\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} + q\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} + r\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = E\left(\frac{du}{ds}\right)^2$$

$$+ 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

avšak budiž $\check{R}$ jakýkoliv řez dané plochy, R poloměr křivosti toho řezu v bodu m, N normála plochy; konečně λ, μ, ν kosinusy směrné poloměru R, tu platí:

$$\lambda = R\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds};\ \mu = R\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds};\ \nu = R\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds}.$$

Dosadíme-li tyto hodnoty do naší rovnice, obdržíme:

$$\frac{1}{R}(p\lambda + q\mu + r\nu) = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{ds^2},$$

avšak

$$p\lambda + q\mu + r\nu = \cos\gamma,$$

tedy:

$$\frac{\cos\gamma}{R} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2}{ds^2},$$

pro řez normálný jest $\gamma = 0^0$ aneb 180^0, $R = \varrho$ tedy:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos\gamma}{R},$$

kterážto rovnice již obsahuje známou poučku Meusnierovu, jež určuje z poloměru křivosti řezu normálného poloměr jakéhokoli jiného řezu, touže tečnou vedeného. Chceme se tedy v dalším počtu pouze na řezy normálné obmeziti. Především však chceme určiti

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right)^2$$
$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right)^2.$$

Po krátké redukci obdržíme

$$ds = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{dv}\right)du\,dv + \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2;$$

pro tyto součty můžeme užíti označení Gauss'em zavedené, totiž:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = e, \quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)2f, \quad \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = g,$$

takže jest tedy:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Užijeme-li podobně pro differenciální poměr $\frac{dv}{du}$ písmene k, obdržíme pro poloměr křivosti normálného řezu výraz:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}.$$

Buďtež ϱ_1 ϱ_2 poloměry křivosti dvou řezů, jež stojí na sobě kolmo, k_1 k_2 pak příslušné poměry differenciální; tu bude:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}{e + 2fk_1 + gk_1^2} + \frac{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}{e + 2fk_2 + gk_2^2} = \frac{\check{C}}{J}. \qquad (\beta)$$

Podmínka, aby oba řezy kolmo na sobě stály, jest:

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = 0;$$

dosadíme-li do této rovnice za dx, dy, dz, dx', dy', dz' příslušné hodnoty $\frac{\partial x}{\partial u}du$, $\frac{\partial x}{\partial v}dv$ atd., obdržíme:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du_1\, du_2 + \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)[dv_1\, du_2 + dv_2\, du_1]$$
$$+\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv_1\, dv_2 = 0,$$

aneb
$$e + f(k_1 + k_2) + gk_1 k_2 = 0. \qquad (\alpha)$$

Vraťme se nyní k rovnici (β). Čitatel $\check{C}$ zlomku jest:

$$\check{C} = eE + 2eFk_1 + eGk_1^2 + 2fEk_2 + 4fFk_1 k_2 + 2fGk_1^2 k_2$$
$$+ gEk_2^2 + 2gFk_1 k_2^2 + gGk_1^2 k_2^2 + eE + 2eFk_2 + eGk_2^2$$
$$+ 2fEk_1 + 4fFk_1 k_2 + 2fGk_1 k_2^2 + gEk_1^2 + 2gFk_1^2 k_2$$
$$+ gGk_1^2 k_2^2.$$

Tento výraz můžeme psáti následovně:

$$\check{C} = 2F[e + f(k_1 + k_2)] + 2Gk_1 k_2[f(k_1 + k_2) + gk_1 k_2] +$$
$$2F(e + gk_1 k_2)(k_1 + k_2) + eG(k_1^2 + k_2^2) + 8fFk_1 k_2 + gE(k_1^2 + k_2^2),$$

užijeme-li rovnice (α), obdržíme:

$$\check{C} = 2Egk_1 k_2 - 2eGk_1 k_2 - 2fF(k_1 + k_2)^2 + 8fFk_1 k_2$$
$$+ eG(k_1^2 + k_2^2) + gE(k_1^2 + k_2^2)$$

čili
$$\check{C} = [eG + gE - 2fF][k_1 - k_2]^2.$$

Podobně obdržíme pro jmenovatele výraz:

$$J = e^2 + 2efk_1 + egk_1^2 + 2efk_2 + 4f^2 k_1 k_2 + 2fgk_1^2 k_2$$
$$+ egk_2^2 + 2fgk_1 k_2^2 + g^2 k_1^2 k_2^2$$
$$J = e[e + f(k_1 + k_2)] + gk_1 k_2[f(k_1 + k_2) + gk_1 k_2]$$
$$+ f(k_1 + k_2)[e + gk_1 k_2] + eg(k_1^2 + k_2^2) + 4f^2 k_1 k_2,$$

použijeme-li opět rovnice (α), obdržíme po krátké redukci:

$$J = (eg - f^2)(k_1 - k_2)^2,$$

tedy
$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG + gE - 2fF}{eg - f^2}.$$

Výraz na pravé straně jest však pro určitý bod plochy konstantní; jsou-li tedy ϱ_1' a ϱ_2' poloměry křivosti kterýchkoliv dvou jiných na sobě kolmo stojících normálných řezů, tímže bodem vedených, bude:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1'} + \frac{1}{\varrho_2'}.$$

Pro poloměr křivosti řezu normálného obdrželi jsme rovnici:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{e + 2fk + gk^2}. \qquad (b)$$

Výraz tento jest v určitém bodu plochy jedině závislý na veličině k; z toho plyne, že maximalní a minimalní hodnotu poloměru ϱ obdržíme z rovnice

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\,k}=0.$$

Differencováním rovnice (b) obdržíme:

$$(e+2fk+gk^2)(F+Gk)-(E+2Fk+Gk^2)(f+gk)=0; \quad (c)$$

uspořádáme-li pak tuto rovnici dle k, obdržíme:

$$(eF-Ef)+(eG-Eg)k+(fG-gF)k^2=0. \quad (d)$$

Rovnice tato jest kvadratická, poloměr křivosti ϱ má tedy jednu maximalní a jednu minimalní hodnotu; řezy, jimž tyto poloměry přislušÍ, nazýváme řezy hlavními; druhý differencialní poměr $\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\,k^2}$ nám netřeba znáti, neboť vyjmeme-li případ zcela zvláštní, že poloměry křivosti všech normálných řezů týmže bodem vedených mají hodnotu stejnou (v bodu kruhovém), přisluší z kořenů k_1 a k_2 rovnice (d), jeden k_1 poloměru maximalnímu r_1, druhý k_2 minimalnímu r_2.

Jelikož, jak známo, křivost plochy v daném bodu měříme výrazem $\frac{1}{r_1 r_2}$, musíme hodnotu tohoto výrazu vyšetřiti. Z rovnice (b) plyne:

$$\frac{1}{r_1 r_2}=\frac{(E+2Fk_1+Gk_1{}^2)(E+2Fk_2+Gk_2{}^2)}{(e+2fk_1+gk_1{}^2)(e+2fk_2+gk_2{}^2)}; \quad (\gamma)$$

z rovnice (c) však plyne pro řezy hlavní následující relace:

$$\frac{E+2Fk+Gk^2}{e+2fk+gk^2}=\frac{F+Gk}{f+gk}; \quad (e)$$

pomocí toho vztahu přejde γ v

$$(\gamma') \quad \frac{1}{r_1 r_2}=\frac{F^2+FG(k_1+k_2)+G^2k_1k_2}{f^2+fg(k_1+k_2)+g^2k_1k_2};$$

z rovnice (d) však obdržíme:

$$k_1+k_2=\frac{Eg-eG}{fG-gF}; \quad k_1k_2=\frac{eF-Ef}{fG-gF}; \quad (2)$$

dosadíme-li to do rovnice γ', obdržíme:

$$\frac{1}{r_1 r_2}=\frac{fF^2G-gF^3+gEFG-eFG^2+eFG^2-fEG^2}{f^3G-f^2gF+fg^2E-fg^2E-efgG+eg^2F},$$

aneb:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{F^2(fG-gF)-EG(fG-gF)}{f^2(fG-gF)-eg(fG-gF)} = \frac{EG-F^2}{eg-f^2}.$$

Pro výraz $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ lze též snadno hodnotu nalézti; jest

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} = \frac{F+Gk_1}{f+gk_1}+\frac{F+Gk_2}{f+gk_2} \text{ [což plyne z } (b) \text{ a } (e)]$$

$$= \frac{2fF+(fG+Fg)(k_1+k_2)+2gGk_1k_2}{f^2+fg(k_1+k_2)+g^2k_1k_2};$$

dosadíme-li za $k_1 k_2$ a k_1+k_2 jich hodnoty, obdržíme po krátké redukci:

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2} = \frac{eG+gE-2fF}{eg-f^2}. \qquad (g)$$

Všechny tyto relace, pokud nám známo, odvozují se obyčejně pomocí jistých identických rovnic, tedy nepřímo, což se důkazům zde podaným vytknouti nemůže.

Značí-li opět ϱ_1 a ϱ_2 dva poloměry křivosti příslušící libovolným dvěma řezům normálným na sobě kolmo stojícím, platí, jak z. předcházejícího bezprostředně plyne:

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}.$$

Soudíme z toho, že řezy hlavní se kolmo protínají, což lze ostatně snadno dokázati.

Dosadíme-li totiž do rovnice (a) hodnoty z rovnic (2), obdržíme:

$$e+f(k_1+k_2)+gk_1k_2 = \frac{e(fG-gF)+f(Eg-eG)+g(eF-Ef)}{fG-gF}$$

$$= \frac{efG-egF+fEg-efG+egF-gfE}{fG-gF} = 0.$$

Stojí tedy hlavní řezy kolmo na sobě.
